Inverzní $\mathcal{Z}$-transformace

Modelování systémů a procesů (11MSP)

Bohumil Kovář, Jan Přikryl, Miroslav Vlček

Ústav aplikované matematiky
ČVUT v Praze, Fakulta dopravní

9. přednáška 11MSP
čtvrtek 19. dubna 2018

verze: 2018-04-18 11:30

Obsah přednášky

Metody výpočtu inverzní $\mathcal{Z}$-transformace

Zpětná $\mathcal{Z}$-transformace má tvar integrálu

$$y[n] = \frac{1}{2\pi i} \oint_C Y(z) z^{n-1} \, \mathrm{d}z \equiv \mathcal{Z}^{-1}\{Y(z)\}$$

podél uzavřené křivky C, která obsahuje všechny singulární body racionální lomené funkce

$$Y(z) = \frac{Q(z)}{N(z)}.$$

Metody výpočtu inverzní $\mathcal{Z}$-transformace

O racionální lomené funkci

$$\frac{Q(z)}{N(z)}$$

říkáme, že má nulové body $z_{0\nu}$, jestliže

$$Q(z_{0\nu}) = 0,$$

a že má póly $z_{\infty\mu}$, jestliže

$$N(z_{\infty\mu}) = 0.$$

Rozklad racionální lomené funkce na parciální zlomky

Pokud má funkce $\frac{Q(z)}{N(z)}$ jednoduché póly, potom

$$N(z) = \prod_{\mu=1}^{N}(1-z_{\infty\mu}z^{-1}) = (1-z_{\infty 1}z^{-1})(1-z_{\infty 2}z^{-1})\ldots(1-z_{\infty N}z^{-1})$$

a platí

$$\begin{aligned} \frac{Q(z)}{N(z)} &= \sum_{\mu=1}^{N} \frac{k_\mu}{1-z_{\infty\mu}z^{-1}} \\ &= \frac{k_1}{1-z_{\infty 1}z^{-1}} + \frac{k_2}{1-z_{\infty 2}z^{-1}} + \cdots + \frac{k_N}{1-z_{\infty N}z^{-1}} \end{aligned}$$

Rozklad racionální lomené funkce na parciální zlomky

kde

$$
\begin{aligned}
k_\mu &= \lim_{z \to z_{\infty\mu}} (1 - z_{\infty\mu} z^{-1}) \frac{Q(z)}{N(z)} \\
&= Q(z_{\infty\mu}) \lim_{z \to z_{\infty\mu}} (1 - z_{\infty\mu} z^{-1}) \frac{1}{N(z)} \\
&= Q(z_{\infty\mu}) \lim_{z \to z_{\infty\mu}} \frac{1}{\frac{N(z)}{1 - z_{\infty\mu} z^{-1}}} \\
&= Q(z_{\infty\mu}) \frac{1}{N_\mu(z_{\infty\mu})}
\end{aligned}
$$

Rozklad racionální lomené funkce na parciální zlomky

Pro jednoduchost budeme dále psát $z_{\infty\mu} \to z_\mu$. Protože pro $|az^{-1}| < 1$ platí

$$\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{1}{1 - az^{-1}}\right\} = \mathcal{Z}^{-1}\left\{\sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n}\right\} = a^n$$

dostaneme

$$\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{Q(z)}{N(z)}\right\} = \mathcal{Z}^{-1}\left\{\sum_{\mu=1}^{N} \frac{k_\mu}{1 - z_\mu z^{-1}}\right\} = \sum_{\mu=1}^{N} k_\mu z_\mu^n.$$

Obsah přednášky

Příklady použití

Diferenční rovnice – mikroekonomický model

Rovnice nabídky – nabídka dnes závisí na včerejší ceně a to tak, že nabídka stoupá s rostoucí cenou. Pro $\mathcal{C} > 0$ platí

$$n[k] = \mathcal{C}c[k-1] + \mathcal{A}x[k].$$

Rovnice poptávky – poptávka dnes závisí na dnešní ceně a to tak, že poptávka klesá s rostoucí cenou. Pro $\mathcal{D} > 0$ platí

$$p[k] = -\mathcal{D}c[k] + \mathcal{B}x[k].$$

Příklady použití

Diferenční rovnice – mikroekonomický model

Rovnost nabídky a poptávky

$$n[k] = p[k]$$

pak vede na diferenční rovnici prvního řádu

$$c[k] + \frac{\mathcal{C}}{\mathcal{D}} c[k-1] = \frac{\mathcal{B} - \mathcal{A}}{\mathcal{D}} x[k].$$

Příklady použití

Diferenční rovnice – mikroekonomický model

Pro jednoduchost označíme

$$\frac{\mathcal{C}}{\mathcal{D}} = \gamma, \qquad \frac{\mathcal{B} - \mathcal{A}}{\mathcal{D}} = \alpha.$$

Diferenční rovnice má v označení $c[k] \equiv y[k]$ tvar

$$y[k] + \gamma y[k-1] = \alpha x[k]$$

Příklady použití

Diferenční rovnice – mikroekonomický model

Za přepokladu $x[k] = \mathbf{1}[k]$ a $y[k] = 0$ pro $k < 0$ dostaneme použitím $\mathcal{Z}$-transformace algebraickou rovnici

$$Y(z) + \gamma z^{-1} Y(z) = \frac{\alpha}{1 - z^{-1}}$$

s řešením v $\mathcal{Z}$-rovině ve tvaru

$$Y(z) = \frac{\alpha}{(1 - z^{-1})(1 + \gamma z^{-1})}.$$

Příklady použití

Diferenční rovnice – mikroekonomický model

Rozložíme na parciální zlomky

$$Y(z) = \frac{\alpha}{(1 - z^{-1})(1 + \gamma z^{-1})} = \frac{k_1}{1 - z^{-1}} + \frac{k_2}{1 + \gamma z^{-1}},$$

kde

$$k_1 = \lim_{z \to 1} (1 - z^{-1}) Y(z) = \frac{\alpha}{1 + \gamma},$$
$$k_2 = \lim_{z \to -\gamma} (1 + \gamma z^{-1}) Y(z) = \frac{\alpha\gamma}{1 + \gamma}.$$

Příklady použití

Diferenční rovnice – mikroekonomický model

Zpětná transformace funkce

$$Y(z) = \frac{\alpha}{1+\gamma}\left(\frac{1}{(1-z^{-1})} + \frac{\gamma}{1+\gamma z^{-1}}\right)$$

pak vede na řešení ve tvaru diferenční rovnice

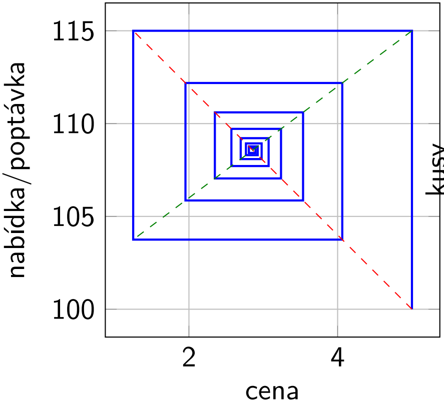
$$y[k] = \frac{\alpha}{1+\gamma}\left(1-(-\gamma)^{k+1}\right)\mathbf{1}[k],$$

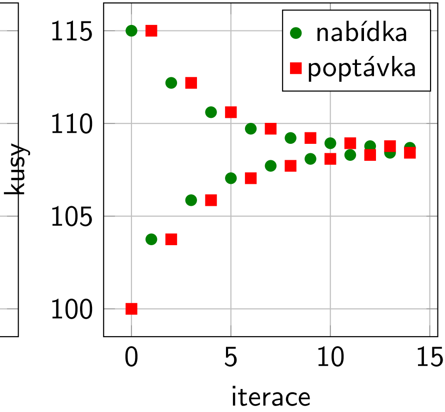
které v případě stabilního trhu $\gamma = \dfrac{C}{D} < 1$ určuje limitní velikost ceny

$$\lim_{k\to\infty} c[k] = \frac{\alpha}{1+\gamma} = \frac{B-A}{C+D}.$$

Řešení diferenční rovnice 1.řádu

Pro následující obrázek byly zvoleny hodnoty $A = 100$, $B = 120$, $C = 3$, $D = 4$.





Řešení diferenční rovnice 2. řádu

Hledejme řešení diferenční rovnice druhého řádu, která popisuje LTI diskrétní systém,

$$y[n+2] + 2a\,y[n+1] + (a^2 + b^2)y[n] = c_0\,u[n]$$

splňující počáteční podmínky ve tvaru

$$y[0] = y_0 = 1, \quad y[1] = y_1 = -1.$$

Řešení diferenční rovnice 2. řádu

Rovnici řešíme pomocí $\mathcal{Z}$-transformace. Protože platí

$$\mathcal{Z}\left\{y[n+m]\right\} = z^m \left[Y(z) - \sum_{\nu=0}^{m-1} y[\nu] z^{-\nu} \right]$$

tak

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\left\{y[n]\right\} &= Y(z), \\ \mathcal{Z}\left\{y[n+1]\right\} &= z^1 \left[Y(z) - y[0] \right], \\ \mathcal{Z}\left\{y[n+2]\right\} &= z^2 \left[Y(z) - y[0] - z^{-1} y[1] \right]. \end{aligned}$$

Řešení diferenční rovnice 2. řádu

Transformací nalezneme algebraický tvar

$$Y(z)\left(z^2 + 2a\,z^1 + (a^2 + b^2)\right) - z^2 y_0 - z^1 y_1 - 2a\,z^1 y_0 = c_0 X(z).$$

a vyjádříme

$$Y(z) = \frac{c_0 X(z) + z^1 + z^2 - z^1}{z^2 + 2a\,z^1 + (a^2 + b^2)} \times \frac{z^{-2}}{z^{-2}}.$$

respektive

$$Y(z) = \frac{1 + c_0 X(z) z^{-2}}{1 + 2a\,z^{-1} + (a^2 + b^2) z^{-2}}.$$

Řešení diferenční rovnice 2. řádu

Přenosová funkce $H(z)$ je definována jako podíl obrazu výstupu k obrazu vstupu

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)}$$

pro nulové počáteční podmínky a tedy

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{c_0 z^{-2}}{1 + 2a\,z^{-1} + (a^2 + b^2)z^{-2}}$$
$$= \frac{c_0 z^{-2}}{(1 - z_1 z^{-1})(1 - z_2 z^{-1})},$$

kde z_1 a z_2 jsou póly přenosové funkce

$$z_{1,2} = -a \pm ib.$$

Řešení diferenční rovnice 2. řádu

Impulsní odezvu určíme jako inverzní $\mathcal{Z}$-transformaci přenosové funkce. Potože platí

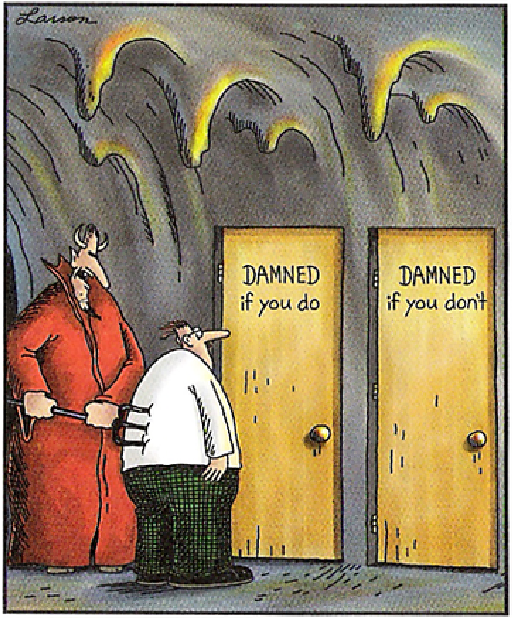
$$\lim_{z\to z_1} H(z)(1 - z_1 z^{-1}) = \frac{c_0 z_1^{-1}}{z_1 - z_2},$$

$$\lim_{z\to z_2} H(z)(1 - z_2 z^{-1}) = -\frac{c_0 z_2^{-1}}{z_1 - z_2},$$

obdržíme impulsní odezvu ve tvaru

Řešení diferenční rovnice 2. řádu

$$h[n] = \mathcal{Z}^{-1}\{H(z)\} = c_0 \frac{z_1^{n-1} - z_2^{n-1}}{z_1 - z_2}$$



"C'mon, c'mon—it's either one or the other."