Cvičení 6 – spojité systémy

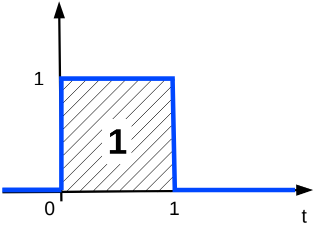
Modelování systémů a procesů

Lucie Kárná

karna@fd.cvut.cz

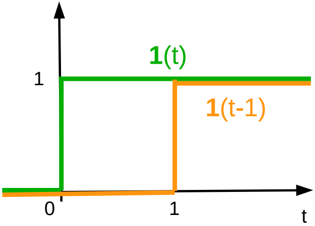
April 2, 2020

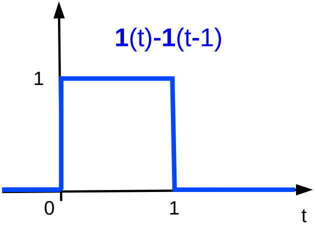
Modelování Diracova impulsu



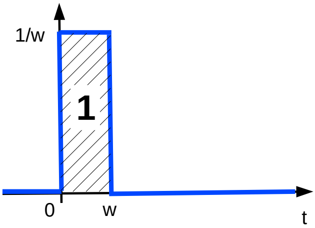
Diracův impuls jako rozdíl dvou jednotkových skoků

$$u(t) = \mathbf{1}(t) - \mathbf{1}(t-1)$$



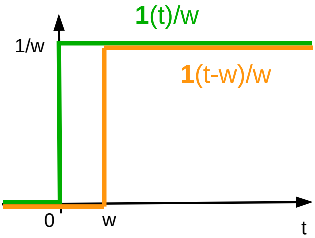


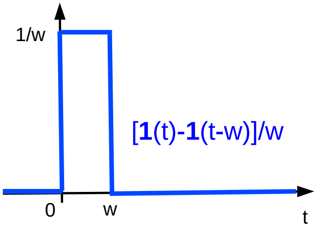
Vylepšení Diracova impulsu



Diracův impuls jako puls šířky w a výšky $1/w$; $w \to 0$

$$u(t) = (1/w)\,[\mathbf{1}(t) - \mathbf{1}(t-w)]$$



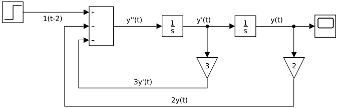


Cvičení 6 – 2. díl

Příklad 1

Systém druhého řádu z minulého týdne

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = u(t).$$

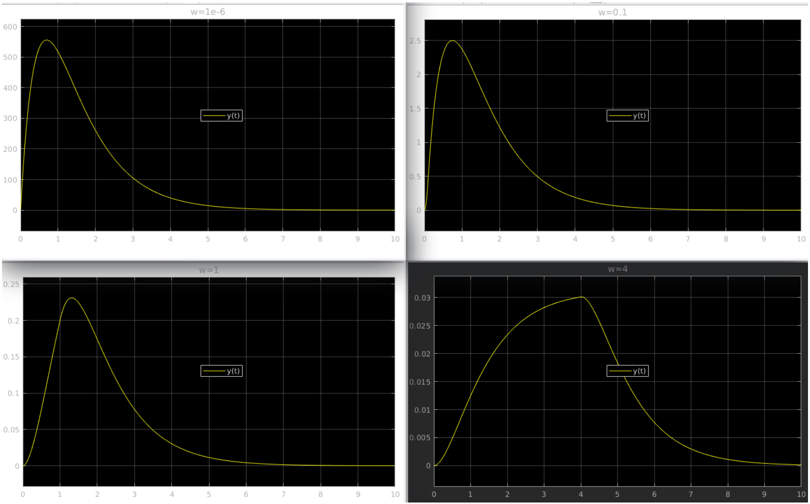


Nasimulujte:

- přechodovou odezvu,
- impulsní odezvu,
- jak ovlivní hodnota w kvalitu simulace impulsní odezvy? zkusit třeba `w = 1e-6`, `w = 0.1` a `w = 4`.

! nulové počáteční podmínky !, jinak je odezva superpozicí odezvy na vstup a odezvy na počáteční podmínky

Výstupy ze simulace



Cvičení 6 – 3. díl

Vnitřní a vnější popis systému

Vnější popis

- systém jako černá skříňka
- popis vektorem vstupu $\vec{u}$ a vektorem výstupu $\vec{y}$
- jedna diferenciální (resp. diferenční) rovnice, obecně vyššího řádu

Vnitřní popis

- popis vektorem vnitřních stavů $\vec{x}$
- vektor vstupu $\vec{u}$ a vektor výstupu $\vec{y}$ jsou druhotné
- soustava diferenciálních (resp. diferenčních) rovnic prvního řádu

Převod vnějšího popisu na vnitřní

Převeďte systém

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = u(t)$$

s počátečními podmínkami $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$ na vnitřní popis.

Řešení

stavové proměnné $x_1(t) = y(t)$, $x_2(t) = y'(t)$
stavové rovnice

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= y'(t) = x_2(t) \\ x_2'(t) &= y''(t) = -2\,x_1(t) - 3\,x_2(t) + u(t) \end{aligned}$$

rovnice pro výstup: $y(t) = x_1(t)$
počáteční podmínky: $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = -1$

Maticový zápis

Zapište vnitřní popis systému do maticového tvaru.

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= x_2(t) \\ x_2'(t) &= -2\,x_1(t) - 3\,x_2(t) + u(t) \end{aligned}$$

výstup: $y(t) = x_1(t)$
počáteční podmínky: $x_1(0) = 1,\ x_2(0) = -1$

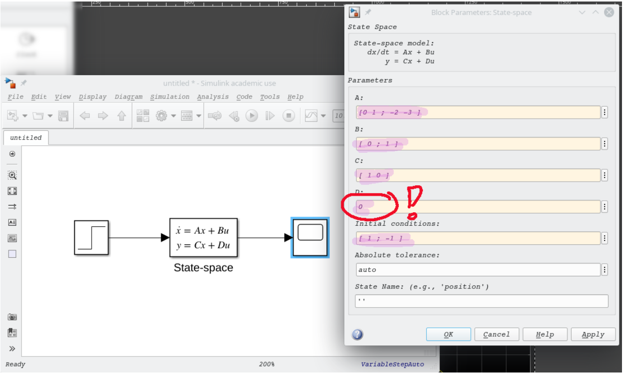
Řešení

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Blok State space

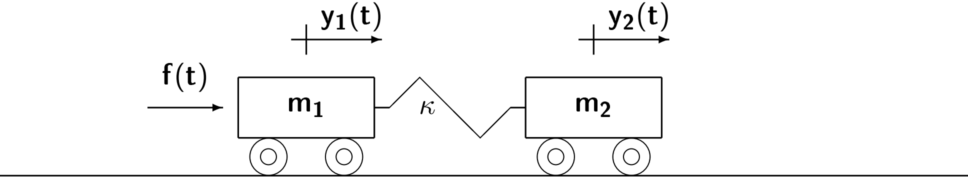
Matice **A**, **B**, **C**, **D** zadejte jako parametry bloku `State space`.
Výstup porovnejte s výstupem vnějšího modelu systému.



Cvičení 6 – 4. díl

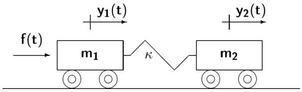
Model dvou spřažených vozítek

Dva vozíky s hmotností m_1 a m_2 jsou spojeny pružinou, která má koeficient pružnosti κ.



Sestavte a namodelujte pohybové rovnice vozíků. Tření zanedbejte.

Odvození pohybových rovnic

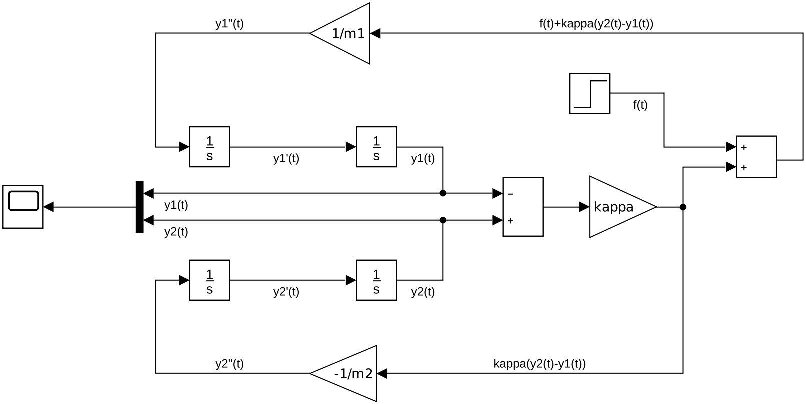


- síla je hmotnost krát zrychlení
- zrychlení je druhá derivace dráhy
- síla způsobená pružinou je přímo úměrná jejímu prodloužení
- okamžitá délka pružiny je $y_2(t) - y_1(t)$
- $y_1(0) = 0,\ y_2(0) = y_0,\ y_1'(0) = y_2'(0) = 0$

Rovnice

$$m_1\, y_1''(t) = f(t) + \kappa\,(y_2(t) - y_1(t))$$
$$m_2\, y_2''(t) = -\kappa\,(y_2(t) - y_1(t))$$

Simulinkový model



Převod na vnitřní popis . . .

Pohybové rovnice

$$m_1\, y_1''(t) = f(t) + \kappa\,(y_2(t) - y_1(t))$$
$$m_2\, y_2''(t) = -\kappa\,(y_2(t) - y_1(t))$$

Položíme $x_1(t) = y_1(t)$, $x_2(t) = y_2(t)$, $x_3(t) = y_1'(t)$, $x_4(t) = y_2'(t)$ a dostáváme soustavu rovnic

$$\begin{aligned}
x_1'(t) &\equiv y_1'(t) = x_3(t)\\
x_2'(t) &\equiv y_2'(t) = x_4(t)\,,\\
x_3'(t) &\equiv y_1''(t) = \frac{\kappa}{m_1}\,(x_2(t) - x_1(t)) + \frac{1}{m_1}\,f(t)\\
x_4'(t) &\equiv y_2''(t) = -\frac{\kappa}{m_2}\,(x_2(t) - x_1(t))
\end{aligned}$$

. . . a do maticového tvaru . . .

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ x_3'(t) \\ x_4'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{\kappa}{m_1} & \frac{\kappa}{m_1} & 0 & 0 \\ \frac{\kappa}{m_2} & -\frac{\kappa}{m_2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m_1} \\ 0 \end{bmatrix} f(t)$$

$$\vec{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix}, \qquad \vec{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ y_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

...do Matlabu/Simulinku zadáme

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{\kappa}{m_1} & \frac{\kappa}{m_1} & 0 & 0 \\ \frac{\kappa}{m_2} & -\frac{\kappa}{m_2} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/m_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, počáteční podmínka $\vec{x} = [0, y_0, 0, 0]^{\mathsf{T}}$.

Parametry:

- $m_1 = m_2 = 500\,\mathrm{kg}$
- $\kappa = 1000\,\mathrm{kg/s^2}$
- $f(t) = 1000 \cdot \mathbf{1}(t)$ nebo Diracův impuls
- $y_0 = 2$
- trvání simulace $10\,\mathrm{s}$

Samostatná práce

Převeďte na vnitřní popis systém

$$2y^{(3)}(t) + 4y''(t) + 6y'(t) + 8y(t) = 10u(t)$$

s počátečními podmínkami $y(0) = 2,\ y'(0) = 1,\ y''(0) = 1$.
Zapište matice $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$ stavového popisu.
Vytvořte v Simulinku model původního vnějšího popisu systému a jeho stavového popisu pomocí bloku `State space`.
Ověřte, že je jejich chování shodné.

Poznámka ke značení: $y^{(n)}$ je označení n–té derivace y (takže $y^{(3)}$ je třetí derivace).


END