Rozklad na parciální zlomky

$$R(p)=\frac{Q(p)}{N(p)}=\frac{b_m p^m+b_{m-1}p^{m-1}+\cdots+b_1p+b_0}{a_np^n+a_{n-1}p^{n-1}+\cdots+a_1p+a_0}$$

$$\boxed{m < n}$$

$$R(p)=\frac{Q(p)}{\underbrace{(p-p_1)^{m_1}(p-p_2)^{m_2}\cdots(p-p_N)^{m_N}}_{\text{reálné kořeny}}\ \underbrace{(p^2+\alpha_1p+\beta_1)^{m_1}\cdots(p^2+\alpha_Mp+\beta_M)^{m_M}}_{\text{komplexní kořeny}}}$$

I. Nenásobné reálné kořeny

$$R(p)=\frac{p+5}{p^2-2p-3}=\frac{p+5}{(p-3)(p+1)}=\frac{A}{p-3}+\frac{B}{p+1}$$

a) „násobící metoda"

$$\frac{p+5}{(p-3)(p+1)}=\frac{A}{p-3}+\frac{B}{p+1}=\frac{A(p+1)+B(p-3)}{(p-3)(p+1)}=\frac{Ap+A+Bp-3B}{(p-3)(p+1)}$$

$$1\cdot p+5=(A+B)p+(A-3B)$$

$$1 = A+B$$
$$5 = A-3B \quad /-$$
$$-4 = 4B \quad \Rightarrow \quad \underline{B=-1} \quad ; \quad \underline{A=2}$$

b)

$$R(p)=\frac{p+5}{(p-3)(p+1)}=\frac{A}{p-3}+\frac{B}{p+1}$$

$$A=\lim_{p\to3}\frac{p+5}{p+1}=\frac{8}{4}=\underline{\underline{2}} \qquad B=\left.\frac{p+5}{(p-3)(\cancel{p+1})}\right|_{p=-1}=\frac{4}{-4}=\underline{\underline{-1}}$$

II. Násobné reálné kořeny

a) $$R(p)=\frac{2p^2-1}{p^3-p^2}=\frac{2p^2-1}{p^2(p-1)}=\frac{A}{p}+\frac{B}{p^2}+\frac{C}{p-1}$$

$$C=\left.\frac{2p^2-1}{p^2(\cancel{p-1})}\right|_{p=1}=\frac{1}{1}=\underline{\underline{1}}$$

$$B=\left.\frac{2p^2-1}{(\cancel{p^2})(p-1)}\right|_{p=0}=\frac{-1}{-1}=\underline{\underline{1}}$$

$$\frac{2p^2-1}{p^2(p-1)}=\frac{A}{p}+\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p-1}$$

$$\boxed{A=1,\ B=1,\ C=1}$$

$$2p^2-1=Ap(p-1)+(p-1)+p^2 \quad (*)$$
$$2p^2-1=(A+1)p^2+(1-A)p-1$$

$$2=A+1 \Rightarrow A=1$$

b) „dosazovací" $\left\{ \frac{2p^2-1}{2(\ldots)} \right.$ nulové body

b) „dosazovací"

$$2p^2-1 = Ap(p-1) + (p-1) + p^2 \qquad \Big\} \frac{2p^2-1}{p^2(p-1)}$$

nulovi broj $p=0$ i $p=1$

$\underline{p=-1}$:

$$\cancel{1} = 2A - 2 + \cancel{1} \quad ; \quad 2A-2=0 \Rightarrow A=1$$

c) „limitní"

$$\frac{2p^2-1}{p^2(p-1)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p^2} + \frac{C}{p-1}$$

$$\frac{2p^3-p}{p^2(p-1)} = A + \frac{B}{p} + \frac{Cp}{p-1} \quad \Big/ \lim_{p\to\infty}$$

$$\lim_{p\to\infty} \frac{2p^3-p}{p^3-p} = \lim_{p\to\infty} \frac{\cancel{p^3}\left(2-\frac{1}{p^2}\right)}{\cancel{p^3}\left(1-\frac{1}{p^2}\right)} = 2 \qquad \frac{1}{p^2} \to 0$$

$$2 = A + C \quad \Big\} \ C = 1$$

$$\underline{\underline{A=1}}$$

d)

$$R(p) = \frac{1}{(p+1)^2(p+2)} = \frac{A}{p+1} + \frac{B}{(p+1)^2} + \frac{C}{p+2}$$

$$\frac{1}{p+1}\left[\frac{1}{(p+1)(p+2)}\right] \qquad \Bigg\{ \frac{1}{(p+1)(p+2)} = \frac{A}{p+1} + \frac{B}{p+2}$$

$$A = \frac{1}{p+2}\Big|_{p=-1} = 1$$

$$B = \frac{1}{p+1}\Big|_{p=-2} = -1$$

$$R(p) = \frac{1}{p+1}\left[\frac{1}{p+1} - \frac{1}{p+2}\right] = \frac{1}{(p+1)^2} - \frac{1}{(p+1)(p+2)} =$$

$$= \frac{1}{(p+1)^2} - \left[\frac{A}{p+1} + \frac{B}{p+2}\right] = \frac{1}{(p+1)^2} - \left[\frac{1}{p+1} - \frac{1}{p+2}\right]$$

$$R(p) = \frac{1}{(p+1)^2} - \frac{1}{p+1} + \frac{1}{p+2} \qquad A=1 \ ; \ B=-1 \ ; \ C=1$$

III. Kompleksni korijeni

$$R(p) = \frac{a(p)}{p(p^2+6p+10)} = \frac{A}{p} + \frac{Bp+C}{p^2+6p+10}$$

Nalezněte takovou zpětnou Laplaceovu transformaci racionální lomené funkce

$$F(p) = \frac{2p+3}{p^2+6p+10},$$

v níž se nevyskytují komplexní proměnné (postupujte přímým převodem na nějakou variantu obsahující $\sin \omega t$ či $\cos \omega t$).

$e^{-\alpha t} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(p+\alpha)^2+\omega^2}$
$e^{-\alpha t} \cos \omega t$	$\frac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2+\omega^2}$

$$p^2+6p+10 = (p+3)^2 + 1$$

$$p^2+6p+9$$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha = 3 \\ \omega = 1 \end{array}\right.$$

$$R(p) = \frac{2p+3}{(p+3)^2+1} =$$

$$2 \cdot \frac{p+3}{(p+3)^2+1} + \frac{-3}{(p+3)^2+1}$$

$$r(t) = 2 \cdot e^{-3t} \cdot \cos t - 3 e^{-3t} \sin t$$