

Cvičení 6

Modelování systémů a procesů

Lucie Kárná

karna@fd.cvut.cz

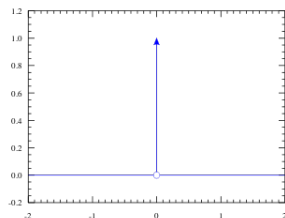
March 26, 2018

- 1 Diracův impuls
- 2 Impulsní a přechodová odezva
- 3 Vnitřní a vnější popis systému
- 4 Model dvou spřažených vozítek
- 5 Samostatná práce

Diracův impuls

Namodelování Diracova impulsu

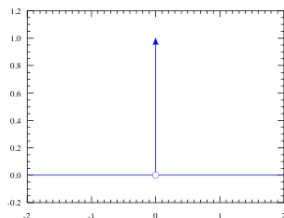
- pomocí bloku Pulse Generator – nastavíme dlouhou periodu mezi pulsy



Diracův impuls

Namodelování Diracova impulsu

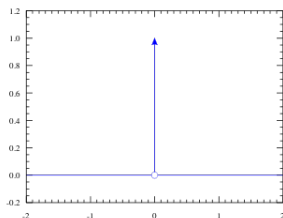
- pomocí bloku Pulse Generator – nastavíme dlouhou periodu mezi pulsy
- jako rozdíl dvou jednotkových skoků, $u(t) = \mathbf{1}(t) - \mathbf{1}(t - 1)$.



Diracův impuls

Namodelování Diracova impulsu

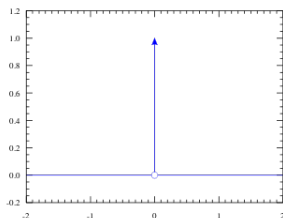
- pomocí bloku Pulse Generator – nastavíme dlouhou periodu mezi pulsy
- jako rozdíl dvou jednotkových skoků, $u(t) = \mathbf{1}(t) - \mathbf{1}(t - 1)$.
- jako puls šířky w a výšky $1/w$, $u(t) = (1/w) [\mathbf{1}(t) - \mathbf{1}(t - w)]$



Diracův impuls

Namodelování Diracova impulsu

- pomocí bloku Pulse Generator – nastavíme dlouhou periodu mezi pulsy
- jako rozdíl dvou jednotkových skoků, $u(t) = \mathbf{1}(t) - \mathbf{1}(t - 1)$.
- jako puls šířky w a výšky $1/w$, $u(t) = (1/w) [\mathbf{1}(t) - \mathbf{1}(t - w)]$
- schovat model Diracova impulsu do bloku Subsystem



Příklad 1

System druhého řádu z minulého týdne

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = u(t).$$

Příklad 1

Systém druhého řádu z minulého týdne

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = u(t).$$

Nasimulujte:

- přechodovou odezvu,

! nulové počáteční podmínky !, jinak je odezva superpozicí odezvy na vstup a odezvy na počáteční podmínky

Příklad 1

Systém druhého řádu z minulého týdne

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = u(t).$$

Nasimulujte:

- přechodovou odezvu,
- impulsní odezvu,

! nulové počáteční podmínky !, jinak je odezva superpozicí odezvy na vstup a odezvy na počáteční podmínky

Příklad 1

Systém druhého řádu z minulého týdne

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = u(t).$$

Nasimulujte:

- přechodovou odezvu,
- impulsní odezvu,
- jak ovlivní hodnota w kvalitu simulace impulsní odezvy?
zkusit třeba $w = 1e-6$, $w = 0.1$ a $w = 4$.

! nulové počáteční podmínky !, jinak je odezva superpozicí odezvy na vstup a odezvy na počáteční podmínky

Vnitřní a vnější popis systému

Vnější popis

- systém jako černá skříňka
- popis vektorem vstupu \vec{u}
a vektorem výstupu \vec{y}

Vnitřní a vnější popis systému

Vnější popis

- systém jako černá skříňka
- popis vektorem vstupu \vec{u} a vektorem výstupu \vec{y}

Vnitřní popis

- popis vektorem vnitřních stavů \vec{x}
- vektor vstupu \vec{u} a vektor výstupu \vec{y} jsou druhotné

Vnitřní a vnější popis systému

Vnější popis

- systém jako černá skříňka
- popis vektorem vstupu \vec{u} a vektorem výstupu \vec{y}
- jedna diferenciální (resp. diferenční) rovnice, obecně vyššího řádu

Vnitřní popis

- popis vektorem vnitřních stavů \vec{x}
- vektor vstupu \vec{u} a vektor výstupu \vec{y} jsou druhotné

Vnitřní a vnější popis systému

Vnější popis

- systém jako černá skříňka
- popis vektorem vstupu \vec{u} a vektorem výstupu \vec{y}
- **jedna** direfenciální (resp. diferenční) rovnice, obecně vyššího řádu

Vnitřní popis

- popis vektorem vnitřních stavů \vec{x}
- vektor vstupu \vec{u} a vektor výstupu \vec{y} jsou druhotné
- soustava direfenciálních (resp. diferenčních) rovnic **prvního** řádu

Převod vnějšího popisu na vnitřní

Převeďte systém

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = u(t)$$

s počátečními podmínkami $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$ na vnitřní popis.

Převod vnějšího popisu na vnitřní

Převeďte systém

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = u(t)$$

s počátečními podmínkami $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$ na vnitřní popis.

Řešení

stavové proměnné $x_1(t) = y(t)$, $x_2(t) = y'(t)$
stavové rovnice

$$x_1'(t) = x_2(t)$$

$$x_2'(t) = -2x_1(t) - 3x_2(t) + u(t)$$

rovnice pro výstup $y(t) = x_1(t)$

počáteční podmínky $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = -1$

Blok State space

Zapište vnitřní popis systému do maticového tvaru.

Matice **A**, **B**, **C**, **D** zadejte jako parametry bloku State space.

Výstup porovnejte s výstupem vnějšího modelu systému.

Blok State space

Zapište vnitřní popis systému do maticového tvaru.

Matice **A**, **B**, **C**, **D** zadejte jako parametry bloku State space.

Výstup porovnejte s výstupem vnějšího modelu systému.

Řešení

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

Blok State space

Zapište vnitřní popis systému do maticového tvaru.

Matice **A**, **B**, **C**, **D** zadejte jako parametry bloku State space.

Výstup porovnejte s výstupem vnějšího modelu systému.

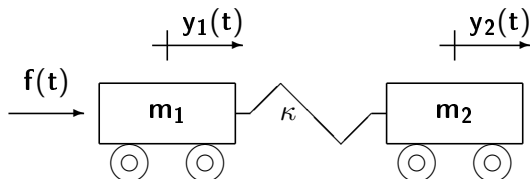
Řešení

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Model dvou spřažených vozítek

Dva vozíky s hmotností m_1 a m_2 jsou spojeny pružinou, která má koeficient pružnosti κ .



Sestavte a namodelujte pohybové rovnice vozíků. Tření zanedbejte.

Vozítka – převod na vnitřní popis ...

Pohybové rovnice

$$m_1 y_1''(t) = f(t) + \kappa (y_2(t) - y_1(t))$$

$$m_2 y_2''(t) = -\kappa (y_2(t) - y_1(t))$$

Vozítka – převod na vnitřní popis ...

Pohybové rovnice

$$m_1 y_1''(t) = f(t) + \kappa (y_2(t) - y_1(t))$$

$$m_2 y_2''(t) = -\kappa (y_2(t) - y_1(t))$$

Položíme $x_1(t) = y_1(t)$, $x_2(t) = y_2(t)$, $x_3(t) = y_1'(t)$, $x_4(t) = y_2'(t)$

Vozítka – převod na vnitřní popis ...

Pohybové rovnice

$$m_1 y_1''(t) = f(t) + \kappa (y_2(t) - y_1(t))$$

$$m_2 y_2''(t) = -\kappa (y_2(t) - y_1(t))$$

Položíme $x_1(t) = y_1(t)$, $x_2(t) = y_2(t)$, $x_3(t) = y_1'(t)$, $x_4(t) = y_2'(t)$
a dostáváme soustavu rovnic

$$x_1'(t) \equiv y_1'(t) = x_3(t)$$

$$x_2'(t) \equiv y_2'(t) = x_4(t),$$

$$x_3'(t) \equiv y_1''(t) = \frac{\kappa}{m_1} (x_2(t) - x_1(t)) + \frac{1}{m_1} f(t)$$

$$x_4'(t) \equiv y_2''(t) = -\frac{\kappa}{m_2} (x_2(t) - x_1(t))$$

... a do maticového tvaru ...

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ x_3'(t) \\ x_4'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{\kappa}{m_1} & \frac{\kappa}{m_1} & 0 & 0 \\ \frac{\kappa}{m_2} & -\frac{\kappa}{m_2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m_1} \\ 0 \end{bmatrix} f(t)$$

... a do maticového tvaru ...

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ x_3'(t) \\ x_4'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{\kappa}{m_1} & \frac{\kappa}{m_1} & 0 & 0 \\ \frac{\kappa}{m_2} & -\frac{\kappa}{m_2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m_1} \\ 0 \end{bmatrix} f(t)$$

$$\vec{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix}$$

... do Matlabu/Simulinku zadáme

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{\kappa}{m_1} & \frac{\kappa}{m_1} & 0 & 0 \\ \frac{\kappa}{m_2} & -\frac{\kappa}{m_2} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/m_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ počáteční podmínka } \vec{x} = [0, 0, 0, 0]^T.$$

... do Matlabu/Simulinku zadáme

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{\kappa}{m_1} & \frac{\kappa}{m_1} & 0 & 0 \\ \frac{\kappa}{m_2} & -\frac{\kappa}{m_2} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/m_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ počáteční podmínka } \vec{x} = [0, 0, 0, 0]^T.$$

Parametry:

- $m_1 = m_2 = 500 \text{ kg}$
- $\kappa = 1000 \text{ kg/s}^2$
- $f(t) = 1000 \cdot \mathbf{1}(t)$ nebo Diracův impuls
- trvání simulace 10 s

Samostatná práce

Převeďte na vnitřní popis systém

$$2y^{(3)}(t) + 4y''(t) + 6y'(t) + 8y(t) = 10u(t)$$

s počátečními podmínkami $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 1$.

Zapište matice **A**, **B**, **C**, **D** stavového popisu.

Vytvořte v Simulinku model původního vnějšího popisu systému a jeho stavového popisu pomocí bloku State space.

Ověřte, že je jejich chování shodné.

Poznámka ke značení: $y^{(n)}$ je označení n -té derivace y (takže $y^{(3)}$ je třetí derivace).

END