Department of Applied Mathematics
Faculty of Transportation Sciences
Czech Technical University in Prague

Dopravní plánování a modelování
(11 DOPM)

Lekce 5:
FSM: Trip distribution

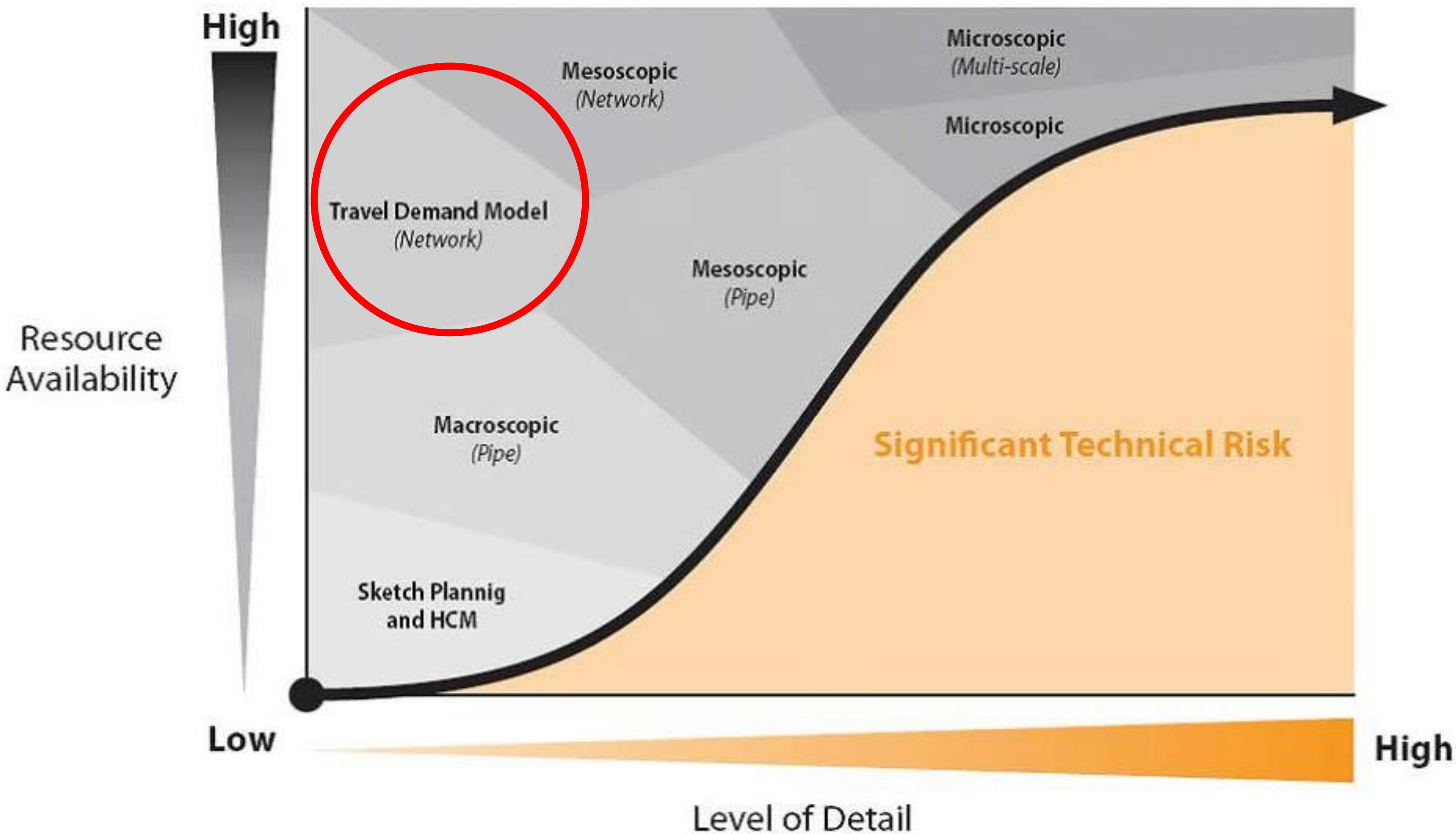
Prof. Ing. Ondřej Přibyl, Ph.D.

Ing. Milan Kříž

Obsah přednášky

- Úvod
- Náhodný model
- Gravitační model
- Princip maximalizace entropie
- Řešení okrajových podmínek
- Obecný model distribuce cest

Úvod



Source: http://ops.fhwa.dot.gov/wz/traffic_analysis/tatv9_wz/sec4.htm

Trip distribution

Origins	Destinations 1	2	3	$\dots j$	$\dots z$	$\sum_i T_{ij}$
1	T_{11}	T_{12}	T_{13}	$\dots T_{1j}$	$\dots T_{1z}$	O_1
2	T_{21}	T_{22}	T_{23}	$\dots T_{2j}$	$\dots T_{2z}$	O_2
3	T_{31}	T_{32}	T_{33}	$\dots T_{3j}$	$\dots T_{3z}$	O_3
$\vdots$						
I	T_{i1}	T_{i2}	T_{i3}	$\dots T_{ij}$	$\dots T_{iz}$	O_i
$\vdots$						
Z	T_{z1}	T_{z2}	T_{z3}	$\dots T_{zj}$	$\dots T_{zz}$	O_z
$\sum_i T_{ij}$	D_1	D_2	D_3	$\dots D_j$	$\dots D_z$	$\sum_{ij} T_{ij} = T$

Trip distribution

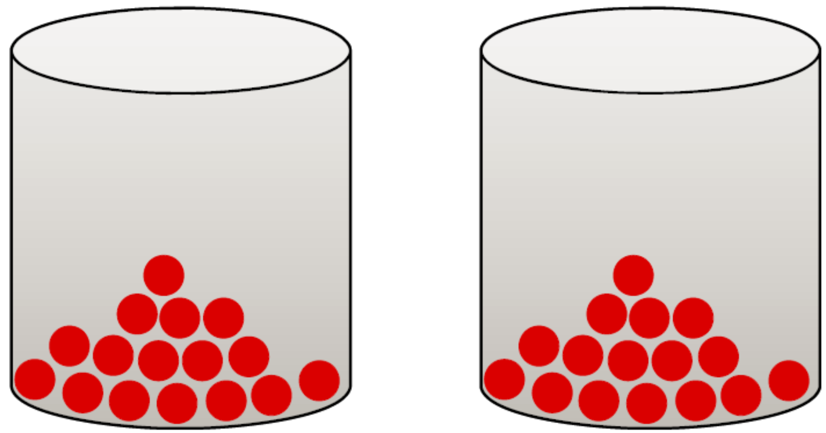
- Jedná se o rozdělení a přidělení
  - disponibility každé zóny O_i na všechny možné cíle
  - atraktivity každé zóny D_j na všechny možné zdroje
  - dodržení hodnot O_i a D_j, případně alespoň T
- Výpočet přemísťovacích vztahů v matici příslušné modelované oblasti a příslušné části poptávky
- Oba dva směry působí současně a nezávisle

Trip distribution

- Velikost jednotlivých přemísťovacích vztahů závisí na:
  - uvažované skupině osob
  - disponibilitě
  - atraktivitě
  - dopravní síti / dopravních módech
  - modelované oblasti
- Vstupní data:
  - hodnoty O_i, D_j *a* T
  - dopravní síť a její ohodnocení uživateli
  - pravidlo pro výpočet trip distribution

Náhodný model

- Losujme dvojice míčků



Míčky se znakem *i*

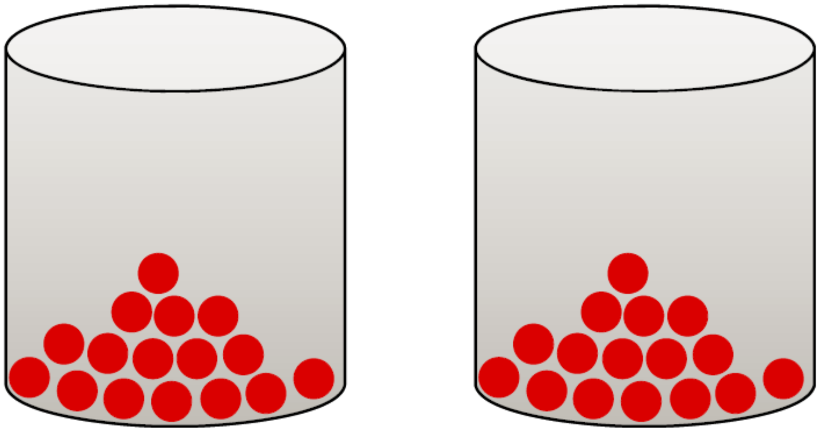
Míčky se znakem *j*

Počet míčků s určitým znakem $i = O_i$

Počet míčků s určitým znakem $j = D_j$

Počet míčků v každém osudí *T*

Náhodný model



$$P(\text{počátek } i) = \frac{O_i}{T} \qquad P(\text{konec } j) = \frac{D_j}{T}$$

$$T_{ij} = P(\text{počátek } i \cap \text{konec } j) \cdot T$$

$$T_{ij} = P(\text{počátek } i) \cdot P(\text{konec } j) \cdot T$$

$$T_{ij} = \frac{O_i}{T} \cdot \frac{D_j}{T} \cdot T = \frac{O_i \cdot D_j}{T}$$

Náhodný model

	j	Σ
i	T_{ij}	O_i
Σ	D_j	T

$$P(\text{počátek } i) = \frac{O_i}{T} \qquad P(\text{konec } j) = \frac{D_j}{T}$$

$$T_{ij} = P(\text{počátek } i \cap \text{konec } j) \cdot T$$

$$T_{ij} = P(\text{počátek } i) \cdot P(\text{konec } j) \cdot T$$

$$T_{ij} = \frac{O_i}{T} \cdot \frac{D_j}{T} \cdot T = \frac{O_i \cdot D_j}{T}$$

Náhodný model

- Náklady nejsou zohledněny, resp. mají na všech relacích stejnou hodnotu: $f(X_{ij}) = 1$
- Aplikace:
  - modely měst do velikosti o průměru cca 6 km pro IAD, resp. VD
  - určité páry aktivit (např. dálkové služební cesty)

Tij	1	2	3	4	5	Oi
1						50,00
2						200,00
3						300,00
4						150,00
5						100,00
Dj	50,00	150,00	250,00	100,00	250,00	800,00

Tij	1	2	3	4	5	skutečnost	cíl
1	3,13	9,38	15,63	6,25	15,63	50,00	50,00
2	12,50	37,50	62,50	25,00	62,50	200,00	200,00
3	18,75	56,25	93,75	37,50	93,75	300,00	300,00
4	9,38	28,13	46,88	18,75	46,88	150,00	150,00
5	6,25	18,75	31,25	12,50	31,25	100,00	100,00
skutečnost	50,00	150,00	250,00	100,00	250,00	800,00	
cíl	50,00	150,00	250,00	100,00	250,00		

Obecný model

- při užití jiného ohodnocení nákladů (např. zakázat diagonálu) můžeme odvodit obecný model se zachováním hodnoty *T*

Tij	1	2	3	4	5	skutečnost	cíl
1	0,00	9,38	15,63	6,25	15,63	46,88	50,00
2	12,50	0,00	62,50	25,00	62,50	162,50	200,00
3	18,75	56,25	0,00	37,50	93,75	206,25	300,00
4	9,38	28,13	46,88	0,00	46,88	131,25	150,00
5	6,25	18,75	31,25	12,50	0,00	68,75	100,00
skutečnost	46,88	112,50	156,25	81,25	218,75	615,63	
cíl	50,00	150,00	250,00	100,00	250,00		800,00

$$T_{ij} = f(X_{ij}) \cdot \frac{O_i \cdot D_j}{T} \cdot \frac{T}{\sum_i \sum_j f(X_{ij}) \frac{O_i \cdot D_j}{T}}$$

Tij	1	2	3	4	5	skutečnost	cíl
1	0,00	12,18	20,30	8,12	20,30	60,91	50,00
2	16,24	0,00	81,22	32,49	81,22	211,17	200,00
3	24,37	73,10	0,00	48,73	121,83	268,02	300,00
4	12,18	36,55	60,91	0,00	60,91	170,56	150,00
5	8,12	24,37	40,61	16,24	0,00	89,34	100,00
skutečnost	60,91	146,19	203,05	105,58	284,26	800,00	
cíl	50,00	150,00	250,00	100,00	250,00		800,00

$$T_{ij} = \frac{f(X_{ij}) \cdot O_i \cdot D_j}{\sum_i \sum_j f(X_{ij}) \cdot O_i \cdot D_j} \cdot T$$

Typy modelů

- Způsoby ohodnocení nákladů odvozeny z různých zdrojů:
  - zákony fyziky
  - ekonometrické přístupy
  - psychologické vnímání
  - teorie informace

Gravitační model

- Analogie s fyzikálním gravitačním zákonem:

$$F_g = \kappa \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

- Použit již v roce 1891 Eduardem Lillem
  - vrchní inspektor Rakouské severozápadní dráhy (ÖNWB)
  - aplikoval zákon na přepravní vztahy na tratích ÖNWB

DAS REISEGESETZ

UND SEINE

ANWENDUNG AUF DEN EISENBAHNVERKEHR.

MIT VERSCHIEDENEN

AUF DIE BETRIEBSERGEBNISSE DES JAHRES 1889

BEZUGNEHMENDEN

STATISTISCHEN BEILAGEN IN TABELLEN UND BILDLICHER FORM.

VON

EDUARD LILL

OBER-INSPECTOR DER ÖSTERREICHISCHEN NORDWESTBAHN.

WIEN.

IM COMMISSIONS-VERLAG VON SPIELHAGEN & SCHURICH.

1891.

Gravitační zákon

- klasický gravitační zákon:
  - zohlednění pouze celkového počtu cest
  - implicitně aplikace vážení potenciálem zóny (zdrojovým i cílovým)

$$T_{ij} = \frac{O_i \cdot D_j}{X_{ij}^2} \cdot \frac{T}{\sum_i \sum_j \frac{O_i \cdot D_j}{X_{ij}^2}}$$

$$T_{ij} = \frac{O_i \cdot D_j}{X_{ij}^\alpha} \cdot \frac{T}{\sum_i \sum_j \frac{O_i \cdot D_j}{X_{ij}^\alpha}}$$

$$T_{ij} = \frac{X_{ij}^{-\alpha} \cdot O_i \cdot D_j}{\sum_i \sum_j X_{ij}^{-\alpha} \cdot O_i \cdot D_j} \cdot T$$

Gravitační zákon

$$T_{ij} = \frac{X_{ij}^{-\alpha} \cdot O_i \cdot D_j}{\sum_i \sum_j X_{ij}^{-\alpha} \cdot O_i \cdot D_j} \cdot T$$

Tij	1	2	3	4	5	Oi
1						50,00
2						200,00
3						300,00
4						150,00
5						100,00
Dj	50,00	150,00	250,00	100,00	250,00	800,00

Xij	1	2	3	4	5
1	0,00	1,00	2,00	3,00	4,00
2	1,00	1,00	2,00	3,00	4,00
3	2,00	2,00	2,00	3,00	4,00
4	3,00	3,00	3,00	3,00	4,00
5	4,00	4,00	4,00	4,00	4,00

α
0,30

f(Xij)	1	2	3	4	5
1	1,00	1,00	0,81	0,72	0,66
2	1,00	1,00	0,81	0,72	0,66
3	0,81	0,81	0,81	0,72	0,66
4	0,72	0,72	0,72	0,72	0,66
5	0,66	0,66	0,66	0,66	0,66

Tij	1	2	3	4	5	skutečnost	cíl
1	4,19	12,56	17,01	6,02	13,82	53,60	50,00
2	16,75	50,26	68,03	24,10	55,26	214,40	200,00
3	20,41	61,23	102,05	36,15	82,89	302,73	300,00
4	9,04	27,11	45,18	18,07	41,45	140,85	150,00
5	5,53	16,58	27,63	11,05	27,63	88,42	100,00
skutečnost	55,91	167,74	259,91	95,39	221,05	800,00	
cíl	50,00	150,00	250,00	100,00	250,00		800,00

Princip maximalizace entropie

- Systémy mají tendenci přecházet do stavu s nejvyšší pravděpodobností při zohlednění působení vnějších sil
- Viz též kinetická teorie plynů
- Systémová podmínka: $\sum_i \sum_j T_{ij} \cdot X_{ij} = const.$
- Ekvivalentní vyjádření: $\frac{\sum_i \sum_j T_{ij} \cdot X_{ij}}{\sum_i \sum_j T_{ij}} = \bar{X} = const.$
- (celočíselná) maximalizace entropie $E = \frac{T!}{\prod_{ij} T_{ij}!} \rightarrow MAX$
- Pro necelá čísla za použití Stirlingova vzorce upravená kriteriální funkce: $\sum_i \sum_j \left(T_{ij} \cdot ln\left(T_{ij}\right) - T_{ij}\right) \rightarrow MIN$
- Opět předpokládáme dodržení *T*

Princip maximalizace entropie

- Mikro-stav / mezo-stav, resp. makro-stav

1	0	1
0	1	1
1	1	2

a	0	1
0	b	1
1	1	2

b	0	1
0	a	1
1	1	2

0	1	1
1	0	1
1	1	2

0	b	1
a	0	1
1	1	2

0	a	1
b	0	1
1	1	2

$$E = \frac{T!}{\prod_{ij} T_{ij}!} = \frac{2!}{1! \cdot 0! \cdot 1! \cdot 0!} = 2$$

Princip maximalizace entropie

Tij	1	2	3	4	5	Oi
1						50,00
2						200,00
3						300,00
4						150,00
5						100,00
Dj	50,00	150,00	250,00	100,00	250,00	800,00

Xij	1	2	3	4	5
1	0,00	1,00	2,00	3,00	4,00
2	1,00	1,00	2,00	3,00	4,00
3	2,00	2,00	2,00	3,00	4,00
4	3,00	3,00	3,00	3,00	4,00
5	4,00	4,00	4,00	4,00	4,00

E	1	2	3	4	5	
1	2235,45	289,55	28,96	0,32	-0,91	
2	289,36	289,36	28,96	0,32	-0,91	
3	28,96	28,96	28,96	0,32	-0,91	
4	0,32	0,32	0,32	0,32	-0,91	
5	-0,91	-0,91	-0,91	-0,91	-0,91	
						3242,58

Tij	1	2	3	4	5	skutečnost	cíl
1	439,55	84,31	16,22	3,02	0,60	543,69	50,00
2	84,26	84,26	16,22	3,02	0,60	188,36	200,00
3	16,22	16,22	16,22	3,02	0,60	52,27	300,00
4	3,02	3,02	3,02	3,02	0,60	12,68	150,00
5	0,60	0,60	0,60	0,60	0,60	3,00	100,00
skutečnost	543,65	188,41	52,27	12,68	3,00	800,00	
cíl	50,00	150,00	250,00	100,00	250,00		800,00

C	1	2	3	4	5	
1	0,00	84,31	32,43	9,06	2,40	
2	84,26	84,26	32,43	9,06	2,40	
3	32,43	32,43	32,43	9,06	2,40	
4	9,06	9,06	9,06	9,06	2,40	
5	2,40	2,40	2,40	2,40	2,40	
						500,00

cíl
500

Princip maximalizace entropie

- Výsledný vztah:

$$T_{ij} = \frac{e^{-\beta \cdot X_{ij}}}{\sum_i \sum_j e^{-\beta \cdot X_{ij}}} \cdot T$$

Xij	Tij	Tij - norm	výpočet	1,652281
0	439,55	1,00000	1,00000	
1	84,26	0,19171	0,19161	
2	16,22	0,03689	0,03672	
3	3,02	0,00687	0,00704	
4	0,60	0,00137	0,00135	

Logit model

- Teorie diskrétní volby (viz další přednáška)
- Výsledný vztah stejný jako u principu maximalizace entropie

$$T_{ij} = \frac{e^{-\beta \cdot X_{ij}}}{\sum_i \sum_j e^{-\beta \cdot X_{ij}}} \cdot T$$

Tij	1	2	3	4	5	Oi
1						50,00
2						200,00
3						300,00
4						150,00
5						100,00
Dj	50,00	150,00	250,00	100,00	250,00	800,00

Xij	1	2	3	4	5
1	0,00	1,00	2,00	3,00	4,00
2	1,00	1,00	2,00	3,00	4,00
3	2,00	2,00	2,00	3,00	4,00
4	3,00	3,00	3,00	3,00	4,00
5	4,00	4,00	4,00	4,00	4,00

β
1,652281

f(Xij)	1	2	3	4	5
1	1,00	0,19	0,04	0,01	0,00
2	0,19	0,19	0,04	0,01	0,00
3	0,04	0,04	0,04	0,01	0,00
4	0,01	0,01	0,01	0,01	0,00
5	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

Tij	1	2	3	4	5	skutečnost	cíl
1	439,61	84,23	16,14	3,09	0,59	543,67	50,00
2	84,23	84,23	16,14	3,09	0,59	188,30	200,00
3	16,14	16,14	16,14	3,09	0,59	52,11	300,00
4	3,09	3,09	3,09	3,09	0,59	12,96	150,00
5	0,59	0,59	0,59	0,59	0,59	2,96	100,00
skutečnost	543,67	188,30	52,11	12,96	2,96	800,00	
cíl	50,00	150,00	250,00	100,00	250,00		800,00

Obecný model

- V zásadě je možné zvolit libovolnou funkci
- Obecně lepší zvonovitý tvar, který lépe zobrazuje ohodnocení nákladů, avšak zpravidla složitější matematické operace

$$T_{ij} = \frac{f\left(X_{ij}\right)}{\sum_i \sum_j f\left(X_{ij}\right)} \cdot T$$

Řešení okrajových podmínek

- Kromě ohodnocení nákladů je třeba brát ještě v úvahu okrajové podmínky
- Dosud řešeno pouze dodržení *T*

Tij	1	2	3	4	5	skutečnost	cíl
1	439,61	84,23	16,14	3,09	0,59	543,67	50,00
2	84,23	84,23	16,14	3,09	0,59	188,30	200,00
3	16,14	16,14	16,14	3,09	0,59	52,11	300,00
4	3,09	3,09	3,09	3,09	0,59	12,96	150,00
5	0,59	0,59	0,59	0,59	0,59	2,96	100,00
skutečnost	543,67	188,30	52,11	12,96	2,96	800,00	
cíl	50,00	150,00	250,00	100,00	250,00		800,00

- Zohlednění prostorových omezení:
  - jednostranně omezený model (fixace jedné strany)
  - oboustranně omezený model

Jednostranně omezený model

- Fixace jedné strany znamená, že tato bude přesně dodržena
- Zpravidla bývá fixace na straně domácí aktivity (pokud se aplikuje)
- gravitační model (implicitně obsahuje potenciály jako váhy):

$$T_{ij} = \frac{X_{ij}^{-\alpha} \cdot D_j}{\sum_j X_{ij}^{-\alpha} \cdot D_j} \cdot O_i \qquad\qquad T_{ij} = \frac{X_{ij}^{-\alpha} \cdot O_i}{\sum_i X_{ij}^{-\alpha} \cdot O_i} \cdot D_j$$

- logit model:

$$T_{ij} = \frac{e^{-\beta \cdot X_{ij}}}{\sum_j e^{-\beta \cdot X_{ij}}} \cdot O_i \qquad\qquad T_{ij} = \frac{e^{-\beta \cdot X_{ij}}}{\sum_i e^{-\beta \cdot X_{ij}}} \cdot D_j$$

Jednostranně omezený model

- Gravitační model fixovaný přes zdroj (zdrojově fixovaný):

Tij	1	2	3	4	5	Oi
1						50,00
2						200,00
3						300,00
4						150,00
5						100,00
Dj	50,00	150,00	250,00	100,00	250,00	800,00

Xij	1	2	3	4	5
1	0,00	1,00	2,00	3,00	4,00
2	1,00	1,00	2,00	3,00	4,00
3	2,00	2,00	2,00	3,00	4,00
4	3,00	3,00	3,00	3,00	4,00
5	4,00	4,00	4,00	4,00	4,00

α
0,80

f(Xij)	1	2	3	4	5
1	1,00	1,00	0,57	0,42	0,33
2	1,00	1,00	0,57	0,42	0,33
3	0,57	0,57	0,57	0,42	0,33
4	0,42	0,42	0,42	0,42	0,33
5	0,33	0,33	0,33	0,33	0,33

Tij	1	2	3	4	5	skutečnost	cíl
1	5,35	16,04	15,35	4,44	8,82	50,00	50,00
2	21,39	64,16	61,42	17,76	35,27	200,00	200,00
3	22,53	67,58	112,63	32,57	64,69	300,00	300,00
4	10,02	30,06	50,09	20,04	39,79	150,00	150,00
5	6,25	18,75	31,25	12,50	31,25	100,00	100,00
skutečnost	65,53	196,59	270,75	87,31	179,83	800,00	
cíl	50,00	150,00	250,00	100,00	250,00		800,00

Jednostranně omezený model

- Výhody/nevýhody:
  - jednoduchý výpočet
  - není potřeba iterativní výpočet
  - není ale možné obecně dodržet O_i a D_j zároveň

Oboustranně omezený model

- Matice přemísťovacích vztahů s okrajovými podmínkami
  - *n* řádkových součtů
  - *n* sloupcových součtů
  - celkově 2 *n* rovnic
  - *n***n* neznámých

$$O_i = \sum_j T_{ij}$$

$$D_j = \sum_i T_{ij}$$

Okrajové podmínky

1	2	3
2	1	3
3	3	6

2	1	3
1	2	3
3	3	6

0	3	3
3	0	3
3	3	6

3	0	3
0	3	3
3	3	6

Princip maximalizace entropie

- Systémová podmínka: $\sum_i \sum_j T_{ij} \cdot X_{ij} = const.$
- Ekvivalentní vyjádření: $\frac{\sum_i \sum_j T_{ij} \cdot X_{ij}}{\sum_i \sum_j T_{ij}} = \bar{X} = const.$
- (celočíselná) maximalizace entropie $E = \frac{T!}{\prod_{ij} T_{ij}!} \rightarrow MAX$
- Pro necelá čísla za použití Stirlingova vzorce upravená kriteriální funkce: $\sum_i \sum_j \left(T_{ij} \cdot ln\left(T_{ij}\right) - T_{ij}\right) \rightarrow MIN$
- Okrajové podmínky:

$$O_i^{\min} \le O_i = \sum_j T_{ij} \le O_i^{\max}$$

$$D_j^{\min} \le D_j = \sum_i T_{ij} \le D_j^{\max}$$

Princip maximalizace entropie

- Řešení:

$$T_{ij} = e^{-\beta \cdot X_{ij}} \cdot fo_i \cdot fd_j$$

$$O_i^{\min} \leq O_i = \sum_j T_{ij} \leq O_i^{\max}$$

$$D_j^{\min} \leq D_j = \sum_i T_{ij} \leq D_j^{\max}$$

- Okrajové podmínky mohou být elastické nebo neelastické

Minimalizace informačního zisku

- Měřítko odchylky jednoho pravděpodobnostního rozdělení od druhého

$$I\left(T_{ij}||f\left(X_{ij}\right)\right)=\sum_{ij}\left[T_{ij}\cdot ln\left(\frac{T_{ij}}{f\left(X_{ij}\right)}\right)-T_{ij}\right]\rightarrow MIN$$

$$O_i^{\min} \leq O_i = \sum_j T_{ij} \leq O_i^{\max}$$

$$D_j^{\min} \leq D_j = \sum_i T_{ij} \leq D_j^{\max}$$

- Hledáme příslušnou matici: $T_{ij}=f\left(f\left(X_{ij}\right),O_i,D_j\right)$

Obecný model distribuce cest

- Řešení:

$$T_{ij} = f(X_{ij}) \cdot fo_i \cdot fd_j$$

$$O_i^{\min} \leq O_i = \sum_j T_{ij} \leq O_i^{\max}$$

$$D_j^{\min} \leq D_j = \sum_i T_{ij} \leq D_j^{\max}$$

- Okrajové podmínky mohou být elastické nebo neelastické
- Obecně je možno použít libovolnou funkci ohodnocení

Obecný model distribuce cest

- Řešení matice:
  - koeficienty fo_i a fd_j musí být určeny tak, aby byly zároveň dodrženy všechny O_i a D_j
  - je nutné řešit iterativním algoritmem
- Používané metody:
  - MULTI
  - FURNESS
  - DETROIT
  - FRATAR

Model růstových koeficientů

- Existuje matice přepravních vztahů $T_{ij}{}^*$ (např. ze sčítání nebo odhadů)
- Tato matice je dostatečně reprezentativní, avšak již ne aktuální
- Od vytvoření matice nedošlo k významným změnám ve struktuře území
- Stejně tak nedošlo ke změnám v dopravní nabídce

$$T_{ij} = T_{ij}{}^* \cdot fo_i \cdot fd_j$$

$$O_i^{\min} \le O_i = \sum_j T_{ij} \le O_i^{\max}$$

$$D_j^{\min} \le D_j = \sum_i T_{ij} \le D_j^{\max}$$

Použité zdroje

- Ben-Akiva, Moshe. *Transportation Systems Analysis: Demand & Economics*. Podklady k přednáškám. 2008.
- Lohse, Dieter. *Grundlagen der Strassenverkehrstechnik und der Verkehrsplanung. Band 2, Verkehrsplanung*. Berlin, 2011.
- Ortúzar, J. de D. & Willumsen, L. *Modelling Transport*. Chichester, 2011.
- Schiller, Christian. *Theorie der Verkehrsplanung I + II*. Podklady k přednáškám. 2011.

Děkuji Vám za pozornost