

Modelování systémů a procesů

prof. Miroslav Vlček

17. března 2011



System druhého řádu

Diferenční rovnice druhého řádu s počátečními podmínkami ve tvaru

$$y(n+2) + \alpha_1 y(n+1) + \alpha_0 y(n) = u(n) \quad (1)$$

$$y(0) = \gamma_1 \quad \text{a} \quad y(1) = \gamma_2, \quad (2)$$

udává vztah vstupu $u(n)$ a výstupu $y(n)$ diskrétního LTI systému



Tento vnější popis převedeme na stavový popis volbou stavového vektoru

$$\begin{aligned}x_1(n) &= y(n), \\x_2(n) &= y(n+1).\end{aligned}$$



Dosadíme za $y(n+1) = x_2(n)$ a $y(n+2) = x_2(n+1)$ do původní diferenční rovnice a je

$$x_2(n+1) = -\alpha_1 x_2(n) - \alpha_0 x_1(n) + u(n). \quad (3)$$

Současně platí

$$x_1(n+1) = y(n+1) = x_2(n). \quad (4)$$



System druhého řádu

Dostáváme tak

$$\begin{bmatrix} x_1(n+1) \\ x_2(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(n) \quad (5)$$

nebo

$$\begin{bmatrix} x_1(n+1) \\ x_2(n+1) \end{bmatrix} = \mathbf{M} \begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{bmatrix} + \mathbf{N} u(n), \quad (6)$$

resp.

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{N} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$



System druhého řádu

Rovnici pro výstup vyjádříme z definice stavových veličin

$$y(n) = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{bmatrix} + 0 u(n). \quad (7)$$

Matice **D** je tedy nulová a pro výstupní matici dostáváme

$$\mathbf{C} = [1 \quad 0]. \quad (8)$$

Lineární systém, který má matici **D** nulovou, se nazývá **ryzí** systém. Je vhodné podotknout, že počáteční podmínky se transformují do stavového popisu takto

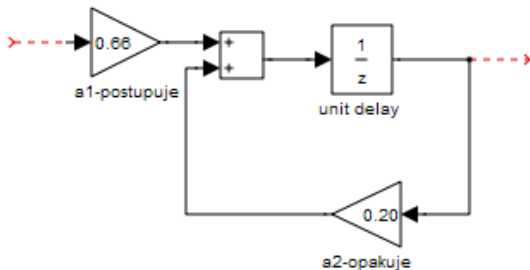
$$y(0) = \gamma_1 = x_1(0) \quad \text{a} \quad y(1) = \gamma_2 = x_2(0).$$



Příklad 3 Vznik nové fakulty a hledání odpovědí na různé otázky související s počty studentů jsou ukázkou diskrétního stavového systému, ve kterém složka stavového vektoru x_i reprezentuje počet studentů v i -tém ročníku. Předpokládejme dále, že do prvního ročníku budeme přijímat pravidelně každý rok $u(n)$ studentů.

- Jestliže z každého ročníku postoupí bez potíží $a_1 x_i$ studentů, opakuje $a_2 x_i$ studentů a fakultu opustí $a_3 x_i$ studentů, kde $a_1 + a_2 + a_3 = 1$, nalezněte počty absolventů, pokud úspěšnost u státních závěrečných zkoušek je $a \equiv a_1^{(5)}$.
- Nalezněte celkový počet studentů, kteří studují v jednom akademickém roce na fakultě.





Obrázek: Model jednotlivého ročníku.



Stavový popis této vzorové situace je

$$\begin{bmatrix} x_1(n+1) \\ x_2(n+1) \\ x_3(n+1) \\ x_4(n+1) \\ x_5(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2^{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1^{(1)} & a_2^{(2)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1^{(2)} & a_2^{(3)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_1^{(3)} & a_2^{(4)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_1^{(4)} & a_2^{(5)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \\ x_3(n) \\ x_4(n) \\ x_5(n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(n)$$

$$y(n) = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ a] \begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \\ x_3(n) \\ x_4(n) \\ x_5(n) \end{bmatrix}.$$



Nebo se můžeme ptát, jaký je celkový počet studentů na fakultě v určitém roce. Potom pro výstup obdržíme

$$y(n) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \\ x_3(n) \\ x_4(n) \\ x_5(n) \end{bmatrix} .$$



Vztah mezi diskrétním a spojitým popisem

Spojitý systém popsáný stavovými rovnicemi

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \mathbf{u}(t), \quad (9)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C} \mathbf{x}(t) + \mathbf{D} \mathbf{u}(t), \quad (10)$$

můžeme převést na ekvivalentní diskrétní systém tak, že čas t nahradíme diskrétními časovými okamžiky $t = nT$, kde T je vzdálenost mezi následujícími časovými okamžiky.



Vztah mezi diskrétním a spojitým popisem

Všechny veličiny měříme pouze v čase $t = nT$ a proto

$$x(t) = x(nT) \equiv x(n),$$

$$y(t) = y(nT) \equiv y(n),$$

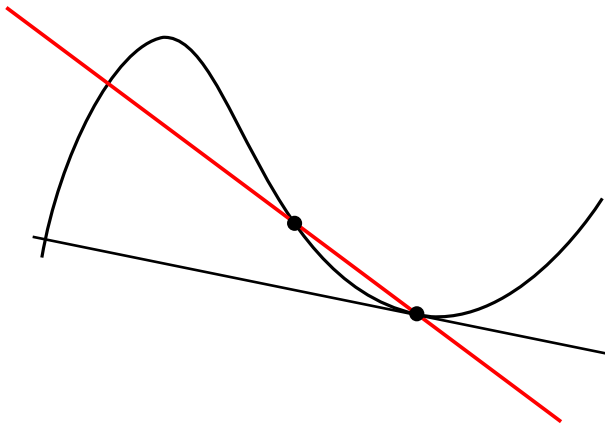
$$u(t) = u(nT) \equiv u(n).$$

Derivaci stavu $\dot{x}(t)$ nahradíme v prvním přiblížení první diferencí

$$\dot{\mathbf{x}}(t) \approx \frac{\mathbf{x}((n+1)T) - \mathbf{x}(nT)}{T} = \frac{1}{T}(\mathbf{x}(n+1) - \mathbf{x}(n))$$



Vztah mezi diskretním a spojitým popisem



Obrázek: Tečna (spojitý systém) a sečna (diskretní systém) v bodě křivky



Vztah mezi diskretním a spojitým popisem

Dosazení do (1) a (2) dostaneme po úpravě diskretní tvar stavových rovnic

$$\mathbf{x}(n+1) = (\mathbf{1} + T\mathbf{A})\mathbf{x}(n) + T\mathbf{B}u(n) \quad (11)$$

$$\mathbf{y}(n) = \mathbf{C}\mathbf{x}(n) + \mathbf{D}u(n) \quad (12)$$

V rovnici (3) identifikujeme $\mathbf{M} = \mathbf{1} + T\mathbf{A}$ a $\mathbf{N} = T\mathbf{B}$ a obdržíme stavový popis v diskretním čase tak, jak byl zaveden v předchozí přednášce.



Stavové rovnice z diferenciální rovnice n-tého řádu

Předpokládejme, že spojitý LTI systém je popsán diferenciální rovnicí

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1y^{(1)}(t) + a_0y(t) = u(t) \quad (13)$$

Ukážeme nyní, jak se koeficienty diferenciální rovnice objeví ve stavových maticích. Postup je zobecněním příkladu LTI systému 2. řádu.



Stavové rovnice z diferenciální rovnice n-tého řádu

Stavové veličiny volíme jako derivace hledaného řešení $y(t)$
takto

$$\begin{aligned}x_1(t) &= y(t), \\x_2(t) &= y^{(1)}(t), \\x_3(t) &= y^{(2)}(t), \\&\vdots \\x_n(t) &= y^{(n-1)}(t),\end{aligned}$$



Stavové rovnice z diferenciální rovnice n-tého řádu

Ze soustavy (13) a diferenciální rovnice plyne postupně

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t),$$

$$\dot{x}_2(t) = x_3(t),$$

$$\vdots$$

$$\dot{x}_{n-1}(t) = x_n(t),$$

$$\dot{x}_n(t) = u(t) - a_0 x_1(t) - a_1 x_2(t) - \dots - a_{n-1} x_n(t),$$



Stavové rovnice z diferenciální rovnice n-tého řádu

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & & \vdots & & \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$



Stavové rovnice z diferenciální rovnice n-tého řádu

V souladu s obecným značením pro stavový popis LTI systémů označíme

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & \vdots & & & \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

a

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$



Stavové rovnice z diferenciální rovnice n-tého řádu

Dále platí

$$y = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix},$$

takže

$$\mathbf{C} = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0]$$

a

$$\mathbf{D} = [0].$$



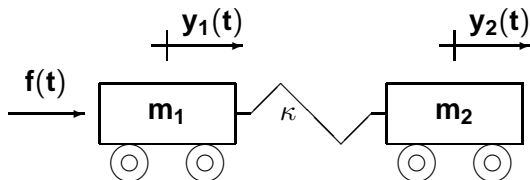
Stavové rovnice z diferenciální rovnice n-tého řádu

Počáteční podmínky mají tvar

$$\begin{aligned}y(0) &= x_1(0) = c_1, \\y^{(1)}(0) &= x_2(0) = c_2, \\y^{(2)}(0) &= x_3(0) = c_3, \\&\vdots \\y^{(n-1)}(0) &= x_n(0) = c_n.\end{aligned}$$



Příklad 4 Dva vozíky s hmotností m_1 a m_2 jsou spojeny pružinou, která má koeficient pružnosti κ .



Podle obrázku působí na první vozík hnací síla $f(t)$.



Polohy vozíků jsou $y_1(t)$ a $y_2(t)$, takže při zanedbání tření mají pohybové rovnice tvar

$$\begin{aligned}m_1 \ddot{y}_1(t) &= f(t) + \kappa (y_2(t) - y_1(t)), \\m_2 \ddot{y}_2(t) &= -\kappa (y_2(t) - y_1(t)).\end{aligned}$$

Máme sestavit stavové rovnice pro systém dvou vozíků.



Položíme

$$\begin{aligned}x_1(t) &= y_1(t), & x_2(t) &= y_2(t), \\x_3(t) &= \dot{y}_1(t), & x_4(t) &= \dot{y}_2(t)\end{aligned}$$

a dostáváme soustavu rovnic

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &\equiv \dot{y}_1(t) &= &x_3(t), \\ \dot{x}_2(t) &\equiv \dot{y}_2(t) &= &x_4(t), \\ \dot{x}_3(t) &\equiv \ddot{y}_1(t) &= &\frac{\kappa}{m_1} (x_2(t) - x_1(t)) + \frac{1}{m_1} f(t) \\ \dot{x}_4(t) &\equiv \ddot{y}_2(t) &= &-\frac{\kappa}{m_2} (x_2(t) - x_1(t))\end{aligned}$$



kterou již snadno převedeme na stavový popis

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \dot{x}_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{\kappa}{m_1} & \frac{\kappa}{m_1} & 0 & 0 \\ \frac{\kappa}{m_2} & -\frac{\kappa}{m_2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m_1} \\ 0 \end{bmatrix} f(t) \quad (14)$$



a

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} . \quad (15)$$



Máme matice stavového popisu ve tvaru

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{\kappa}{m_1} & \frac{\kappa}{m_1} & 0 & 0 \\ \frac{\kappa}{m_2} & -\frac{\kappa}{m_2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m_1} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (16)$$

a

$$\mathbf{C} = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0] \quad (17)$$

