Modelování systémů a procesů

prof. Miroslav Vlček

7. dubna 2011

Obsah

Obsah

Obsah

Obsah

Přenosová funkce a impulsní odezva

Pro LTI systém je přenosová funkce definována jako podíl Laplaceova obrazu výstupu $Y(p)$ ku obrazu vstupu $X(p)$ za předpokladu nulových počátečních podmínek

$$\boxed{H(p) = \frac{Y(p)}{X(p)}}$$

Protože vstup a výstup LTI systému spolu souvisí prostřednictvím konvoluce

$$y(t) = \int_0^\infty h(\tau)x(t-\tau)d\tau = h(t) * x(t)\,,$$

platí...

Přenosová funkce a impulsní odezva

že Laplaceova transformace impulsní odezvy $h(t)$ je přenosová funkce

$$\boxed{H(p) = \mathcal{L}\left[h(t)\right] = \int_0^{\infty} h(t)e^{-pt}dt}$$

pro kterou je splněn vztah

$$Y(p) = H(p)\,X(p)\,.$$

Přenosová funkce a přechodová odezva

Přechodová odezva $s(t)$ je definována jako odezva na jednotkový skok. Pro její Laplaceovu transformaci platí

$$S(p) = H(p).X(p) \equiv H(p)\frac{1}{p}.$$

takže platí

$$s(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{H(p)}{p}\right].$$

Přechodovou odezvu proto nalezneme jako integrál impulsní odezvy

$$\boxed{s(t) = \int_0^t h(\tau) d\tau}$$

Kmitočtová charakteristika

Kmitočtovou charakteristiku získáme z přenosové funkce substitucí takže platí

$$p = \jmath\omega\,,$$

kde ω je úhlový kmitočet. Protože přenosová funkce je racionální lomenou funkcí tvaru

$$H(p) = \frac{Q(p)}{N(p)} = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} \cdots + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} \cdots + a_0}\,,$$

Kmitočtová charakteristika

dostáváme

$$H(p)|_{p=\jmath\omega} = \frac{b_m(\jmath\omega)^m + b_{m-1}(\jmath\omega)^{m-1}\cdots + b_0}{a_n(\jmath\omega)^n + a_{n-1}(\jmath\omega)^{n-1}\cdots + a_0}$$

$$= A(\omega)e^{\jmath\Phi(\omega)},$$

kde $A(\omega)$ je amplitudová charakteristika a $\Phi(\omega)$ se nazývá fázová charakteristika.

Kmitočtová charakteristika - příklad 1

Nalezněte amplitudovou a fázovou charakteristiku LTI systému s přenosovou funkcí

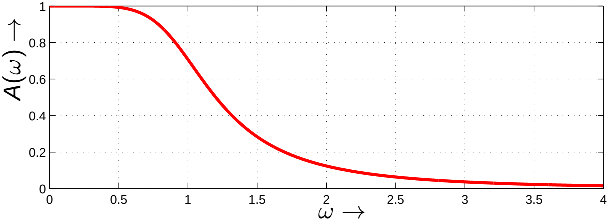
$$H(p) = \frac{1}{p^3 + 2p^2 + 2p + 1}$$

Kmitočtová charakteristika - příklad 1

Postupně platí

$$
\begin{aligned}
H(p)|_{p=\jmath\omega} &= \frac{1}{(\jmath\omega)^3 + 2(\jmath\omega)^2 + 2(\jmath\omega) + 1} \\
&= \frac{1}{-\jmath\omega^3 - 2\omega^2 + 2\jmath\omega + 1} \\
&= \frac{1}{(1 - 2\omega^2) + \jmath\omega(2 - \omega^2)} \\
&= \frac{(1 - 2\omega^2) - \jmath\omega(2 - \omega^2)}{(1 - 2\omega^2)^2 + \omega^2(2 - \omega^2)^2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^6}} \, \frac{(1 - 2\omega^2) - \jmath\omega(2 - \omega^2)}{\sqrt{1 + \omega^6}} \equiv A(\omega) e^{-\jmath\Phi(\omega)}.
\end{aligned}
$$

Kmitočtová charakteristika - příklad 1



Obrázek: Kmitočtová charakteristika amplitudy $A(\omega) = \dfrac{1}{\sqrt{1+\omega^6}}$

Obecné řešení diferenciální rovnici druhého řádu

Diferenciální rovnici

$$\ddot{y}(t) + 2a\dot{y}(t) + (a^2 + b^2)y(t) = u(t)$$

s počátečními podmínkami ve tvaru

$$y(0) = c_1 \quad \text{a} \quad \dot{y}(0) = c_2,$$

řešíme pomocí Laplaceovy transformace.

Obecné řešení diferenciální rovnici druhého řádu

Protože platí

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left(\frac{d}{dt}y(t)\right) &= pY(p) - y(0) \\
\mathcal{L}\left(\frac{d^2}{dt^2}y(t)\right) &= p^2Y(p) - py(0) - \dot{y}(0)
\end{aligned}$$

nalezneme Laplaceovou transformací diferenciální rovnice její algebraický tvar

$$p^2Y(p) - py(0) - \dot{y}(0) + 2a(pY(p) - y(0)) + (a^2 + b^2)Y(p) = U(p).$$

Obecné řešení diferenciální rovnici druhého řádu

Vyřešíme předchozí rovnici vzhledem k obrazu výstupní veličiny Y(p) a dostáváme

$$\left(p^2 + 2ap + (a^2 + b^2)\right) Y(p) = U(p) + py(0) + \dot{y}(0) + 2ay(0)$$

nebo

$$\boxed{Y(p) = \frac{U(p) + c_2 + (p + 2a)c_1}{(p + a + ib)(p + a - ib)}}$$

Obecné řešení diferenciální rovnici druhého řádu

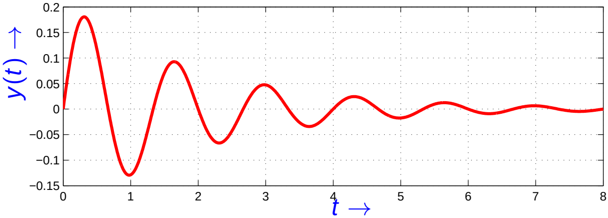
Přenosová funkce $H(p)$ je definována jako podíl obrazu výstupu k obrazu vstupu $\dfrac{Y(p)}{U(p)}$ pro nulové počáteční podmínky a tedy

$$\boxed{H(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{1}{(p+a+ib)(p+a-ib)}}$$

Obecné řešení diferenciální rovnici druhého řádu

Impulsní odezvu určíme jako zpětnou Laplaceovu transformaci přenosové funkce

$$\boxed{\mathcal{L}^{-1}(H(p)) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(p+a)^2+b^2}\right) = \frac{1}{b}e^{-at}\sin bt}$$



Obrázek: Impulsní odezva

Obecné řešení diferenciální rovnici druhého řádu

Přechodovou odezvu $s(t)$ určíme zpětnou Laplaceovu transformaci $s(t) = \mathcal{L}^{-1}(H(p)\frac{1}{p})$

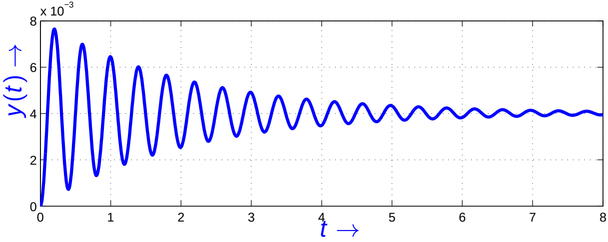
$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p((p+a)^2+b^2)}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{a^2+b^2}\left[\frac{1}{p} - \frac{p+2a}{(p+a)^2+b^2}\right]\right) =$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{a^2+b^2}\left[\frac{1}{p} - \frac{p+a}{(p+a)^2+b^2} - \frac{a}{(p+a)^2+b^2}\right]\right)$$

$$= \frac{1}{a^2+b^2}\left[1 - e^{-at}\cos bt - \frac{a}{b}e^{-at}\sin bt\right] .$$

Obecné řešení diferenciální rovnici druhého řádu

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{a^2+b^2}\left[\frac{1}{p}-\frac{p+2a}{(p+a)^2+b^2}\right]\right)=$$
$$\frac{1}{a^2+b^2}\left[1-e^{-at}\cos bt-\frac{a}{b}e^{-at}\sin bt\right]$$



Obrázek: Přechodová odezva

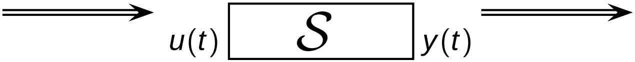
Přenosová funkce a vnější popis

$$\xrightarrow{\quad\quad} \delta(t) \; \boxed{\quad \mathcal{S} \quad} \; h(t) \xrightarrow{\quad\quad}$$

Přenosová funkce LTI systému je ve spojitém čase definována jako Laplaceův obraz odezvy systému na jednotkový impuls při nulových počátečních podmínkách.

$$H(p) = \mathcal{L}\left[h(t)\right]$$

Přenosová funkce a vnější popis



Ekvivalentně, je přenosová funkce definována jako poměr Laplaceova obrazu výstupu k Laplaceově obrazu vstupu při nulových počátečních podmínkách

$$H(p) = \frac{\mathcal{L}\left[y(t)\right]}{\mathcal{L}\left[u(t)\right]} = \frac{Y(p)}{U(p)}$$

Přenosová funkce a vnější popis

Předpokládejme, že systém je popsán diferenciální rovnicí

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y^{(1)} + a_0 y =$$
$$= b_m u^{(m)} + b_{m-1} u^{(m-1)} + \cdots + b_1 u^{(1)} + b_0 u$$

kde koeficienty a_i a b_j jsou reálná čísla a pro indexy platí $n \geq m$.

Je-li $n > m$, systém se nazývá ryzí a výstup systému má vždy jisté zpoždění.

Přenosová funkce a vnější popis

Přenos lineárního systému odvodíme pro nulové počáteční podmínky pomocí Laplaceovy transformace obou stran rovnice.

Výsledkem je rovnice

$$\left(a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \cdots + a_1 p^1 + a_0\right) Y(p) =$$
$$= \left(b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \cdots + b_1 p^1 + b_0\right) U(p)$$

Přenosová funkce má potom tvar racionální lomené funkce

$$H(p) = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \cdots + b_1 p^1 + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \cdots + a_1 p^1 + a_0}$$

Přenosová funkce a vnitřní popis

$$\boxed{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}} \Longrightarrow \boxed{H(p)}$$

Stavový model lineárního časově invariantního systému

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\,\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \end{aligned}$$

Přenosová funkce a vnitřní popis

převedeme pomocí Laplaceovy na algebraické rovnice rovnice tvaru

$$\begin{aligned} pX(p) - x(0) &= \mathbf{A}\,X(p) + \mathbf{B}\,U(p) \qquad (1)\\ Y(p) &= \mathbf{C}\,X(p) + \mathbf{D}\,U(p) \qquad (2) \end{aligned}$$

Rovnici (1) upravíme do tvaru

$$(p\mathbf{1} - \mathbf{A})\;X(p) = x(0) + \mathbf{B}\,U(p)$$

a vypočítáme

$$X(p) = (p\mathbf{1} - \mathbf{A})^{-1}\,x(0) + (p\mathbf{1} - \mathbf{A})^{-1}\,\mathbf{B}\,U(p).$$

Přenosová funkce a vnitřní popis

Přenosová funkce je definována pro nulovou počáteční podmínku $x(0) = 0$. Po dosazení do rovnice (2) dostáváme

$$\begin{aligned} Y(p) &= \mathbf{C}\,(p\mathbf{1} - \mathbf{A})^{-1}\,\mathbf{B}\,U(p) + \mathbf{D}\,U(p) \\ &= \left[\mathbf{C}\,(p\mathbf{1} - \mathbf{A})^{-1}\,\mathbf{B} + \mathbf{D}\right]\,U(p) \end{aligned} \tag{3}$$

takže přenosová funkce je

$$\boxed{H(p) = \mathbf{C}\,(p\mathbf{1} - \mathbf{A})^{-1}\,\mathbf{B} + \mathbf{D}}$$

Přenosová funkce a vnitřní popis

Pokud se jedná o ryzí systém, který nemá žádnou přímou vazbu ze vstupu na výstup a tedy $\mathbf{D} = 0$, potom

$$\boxed{H(p) = \mathbf{C}\,(p\mathbf{1} - \mathbf{A})^{-1}\,\mathbf{B} = \mathbf{C}\,\frac{adj(p\mathbf{1}-\mathbf{A})}{det(p\mathbf{1}-\mathbf{A})}\,\mathbf{B}}$$


Don't
switch!