Příklady na Laplaceovu transformaci

Jan Přikryl, Miroslav Vlček, Bohumil Kovář

24. dubna 2015

Abstrakt

Tento text je průběžně doplňovaným základem budoucí cvičebnice Laplaceovy transformace pro předmět Modelování systémů a procesů, vyučovaný v druhém ročníku bakalářského studia na ČVUT v Praze, Fakultě dopravní. Vzhledem k vývojové fázi je možné, že příklady obsahují chyby.

■ **Doplnit více diskusi o posunutí, zvláště případ $\mathbb{1}(t-2)(t-2)^2$.** ■

Změny v dokumentu:

2014-04-14	jp	Přidán příklad na rozklad racionální lomené funkce s p^3 ve jmenovateli, vedoucí na součet sin a cos a exponencielu.
2014-03-31	jp	Přidána Heavisideova metoda rozkladu násobných pólů.
2015-04-24	jp	Oprava příkladu 3.1 (Marek Blaščík).

Milé kolegyně, milí kolegové, tyto sady příkladů nejsou nutně zcela správně, mohou se v nich vyskytnout chyby, kterých jsme se při přepisu dopustili. Kdo nějakou chybu odhalí jako první, dostane (nejvýše jeden) extra bod.

1 Rozklad na parciální zlomky

Mějme racionální lomenou funkci

$$H(p) = \frac{1}{N(p)}$$

kde $N(p)$ je polynom s násobnými kořeny. Hledáme rozklad $H(p)$ na parciální zlomky.

Nechť například

$$N(p) = (p-2)^2(p+5)(p+7).$$

Rozklad na parciální zlomky hledáme ve tvaru

$$\frac{1}{(p-2)^2(p+5)(p+7)} = \frac{k_1^{(2)}}{(p-2)^2} + \frac{k_1^{(1)}}{p-2} + \frac{k_2}{p+5} + \frac{k_3}{p+7}\,. \tag{1}$$

1.1 Redukce násobného pólu

Jednou z možností je vynásobit rovnici členem $(p-2)^2$

$$\begin{aligned}\frac{(p-2)^2}{(p-2)^2(p+5)(p+7)} &= \\ &= k_1^{(2)} + k_1^{(1)}(p-2) + \frac{k_2(p-2)^2}{p+5} + \frac{k_3(p-2)^2}{p+7}\end{aligned}$$

a nalezneme limitu pro $p \to 2$,

$$\frac{1}{(2+5)(2+7)} = k_1^{(2)}\,.$$

Odečteme-li výraz $\dfrac{1}{63(p-2)^2}$ od obou stran rovnice (1) dostáváme

$$\frac{1}{(p-2)^2(p+5)(p+7)} - \frac{1}{63(p-2)^2} = \frac{k_1^{(1)}}{p-2} + \frac{k_2}{p+5} + \frac{k_3}{p+7}\,,$$

respektive rovnici

$$\frac{1}{63}\left[\frac{-(p+14)}{(p-2)(p+5)(p+7)}\right] = \frac{k_1^{(1)}}{p-2} + \frac{k_2}{p+5} + \frac{k_3}{p+7},$$

pro kterou se výpočet k_μ redukuje již na případ s jednoduchými póly.

1.2 Hevisideova varianta rozkladu

Na přednáškách jsme si ukázali, že v případě násobného pólu lze volit i metodu postupného rozkladu racionální lomené funkce na dílčí zlomky z jednoduchými póly. V případě rovnice (1) nejprve vytkneme člen $1/(p-2)$ a zbytek s jednoduchými póly rozložíme:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(p-2)^2(p+5)(p+7)} &= \frac{1}{p-2}\cdot\frac{1}{(p-2)(p+5)(p+7)} = \\
&= \frac{1}{p-2}\left[\frac{\frac{1}{63}}{p-2} - \frac{\frac{1}{14}}{p+5} + \frac{\frac{1}{18}}{p+7}\right] = \\
&= \frac{1}{63}\,\frac{1}{(p-2)^2} - \frac{\frac{1}{14}}{(p-2)(p+5)} + \frac{\frac{1}{18}}{(p-2)(p+7)}.
\end{aligned}$$

Po roznásobení zbývají v rozkladu dvě nové racionální lomené funkce s jednoduchými póly, které rozložíme na

$$\begin{aligned}
\frac{-\frac{1}{14}}{(p-2)(p+5)} &= -\frac{\frac{1}{98}}{p-2} + \frac{\frac{1}{98}}{p+5}, \\
\frac{\frac{1}{18}}{(p-2)(p+7)} &= \frac{\frac{1}{162}}{p-2} - \frac{\frac{1}{162}}{p+7}.
\end{aligned}$$

Po dosazení zpět máme

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(p-2)^2(p+5)(p+7)} &= \frac{1}{63}\,\frac{1}{(p-2)^2} + \frac{1}{98}\,\frac{1}{p-2} - \frac{1}{98}\,\frac{1}{p+5} + \frac{1}{162}\,\frac{1}{p-2} - \frac{1}{162}\,\frac{1}{p+7} = \\
&= \frac{1}{63}\,\frac{1}{(p-2)^2} + \frac{65}{3969}\,\frac{1}{p-2} - \frac{1}{98}\,\frac{1}{p+5} - \frac{1}{162}\,\frac{1}{p+7}.
\end{aligned}$$

2 Řešení diferenciální rovnice druhého řádu

Diferenciální rovnici

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}y(t) + 2a\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y + (a^2+b^2)y(t) = k\cdot u(t) \tag{2}$$

s počátečními podmínkami ve tvaru

$$y(0) = c_1 \quad \text{a} \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(0) = c_2,$$

řešíme pomocí Laplaceovy transformace.

Protože platí

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt}y(t)\right\} = pY(p) - y(0),$$
$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2}{dt^2}y(t)\right\} = p^2Y(p) - py(0) - \frac{dy(0)}{dt},$$

nalezneme Laplaceovou transformací diferenciální rovnice (2) její algebraický tvar

$$p^2Y(p) - py(0) - \frac{dy(0)}{dt} + 2a(pY(p) - y(0)) + (a^2 + b^2)Y(p) = kU(p). \tag{3}$$

Rovnici (3) vyřešíme vzhledem k obrazu výstupní veličiny $Y(p)$ a dostáváme

$$\left(p^2 + 2ap + (a^2 + b^2)\right) Y(p) = kU(p) + py(0) + \frac{dy(0)}{dt} + 2ay(0)$$

neboli

$$Y(p) = \frac{kU(p) + c_2 + (p + 2a)c_1}{(p + a + ib)(p + a - ib)} = \frac{kU(p) + c_2 + (p + 2a)c_1}{(p + a)^2 + b^2}.$$

Bez znalosti vstupního signálu nelze jednoznačně určit $y(t)$, můžeme ale určit přenosovou funkci systému a jeho impulsní a přechodovou odezvu.

Přenosová funkce $H(p)$ je definována jako podíl obrazu výstupu k obrazu vstupu $\dfrac{Y(p)}{U(p)}$ pro nulové počáteční podmínky a tedy

$$H(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{k}{(p + a + ib)(p + a - ib)} = \frac{k}{(p + a)^2 + b^2}.$$

Impulsní odezva $h(t)$ je dána inverzní Laplaceovou transformací přenosové funkce a platí

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{H(p)\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{k}{(p + a)^2 + b^2}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{k}{b}\frac{b}{(p + a)^2 + b^2}\right\} = \frac{k}{b}\,\mathrm{e}^{-at}\sin bt\,\mathbb{1}(t)\,.$$

Přechodovou odezvu $s(t)$ určíme inverzní Laplaceovu transformací výrazu $\dfrac{H(p)}{p}$:

$$\begin{aligned}
s(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{S(p)\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p}H(p)\right\} \\
&= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{k}{p\,\left((p + a)^2 + b^2\right)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{k}{a^2 + b^2}\left[\frac{1}{p} - \frac{p + 2a}{(p + a)^2 + b^2}\right]\right\} \\
&= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{k}{a^2 + b^2}\left[\frac{1}{p} - \frac{p + a}{(p + a)^2 + b^2} - \frac{a}{(p + a)^2 + b^2}\right]\right\} \\
&= \frac{k}{a^2 + b^2}\left[1 - \mathrm{e}^{-at}\cos bt - \frac{a}{b}\,\mathrm{e}^{-at}\sin bt\right]\mathbb{1}(t),
\end{aligned}$$

kde $\mathbb{1}(t)$ označuje funkci jednotkového skoku.

3 Příklady na Laplaceovu transformaci

V této části ukážeme použití Laplaceovy transformace v analýze LTI spojitých systémů. Jelikož přenosové funkce těchto systémů jsou ve tvaru racionální lomené funkce, ukážeme řešení impulsní a přenosové odezvy pro všechny možnosti kombinací pólů. Součástí problematiky je i řešení lineárních diferenciálních rovnic.

Příklad 3.1 (zpětná transformace)**.** *Nalezněte takovou zpětnou Laplaceovu transformaci racionální lomené funkce*

$$X(p) = \frac{2p+3}{p^3+5p^2+3p+15}$$

v níž se nevyskytují komplexní proměnné. Při rozkladu jmenovatele využijte toho, že jeden z pólů $X(p)$ je $p_1 = -5$.

Řešení:

Nejprve musíme najít všechny póly $X(p)$. Vzhledem k tomu, že jeden pól je $p_1 = -5$, stačí pomocí polynomiálního dělení nalézt podíl

$$(p^3+5p^2+3p+15) : (p+5) = p^2+3$$

a můžeme psát

$$X(p) = \frac{2p+3}{p^3+5p^2+3p+15} = \frac{Ap+B}{p^2+3} + \frac{C}{p+5}. \tag{4}$$

Hodnotu C určíme pomocí zakrývacího pravidla,

$$C = \lim_{p \to 5} \frac{2p+3}{p^2+3} = \frac{-7}{28} = -\frac{1}{4}$$

a hodnoty A a B dopočteme ze soustavy rovnic pro koeficienty polynomů, jenž vznikne vynásobením rovnice (4)

$$\begin{aligned}
2p+3 &= (Ap+B)(p+5) + C(p^2+3) \\
2p+3 &= (Ap+B)(p+5) - \frac{1}{4}(p^2+3) \\
2p+3 &= Ap^2 + (B+5A)p + 5B - \frac{1}{4}p^2 - \frac{3}{4}
\end{aligned}$$

z čehož plyne

$$\begin{aligned}
0p^2 &= Ap^2 - \frac{1}{4}p^2 \\
2p &= (B+5A)p \\
3 &= 5B - \frac{3}{4}.
\end{aligned}$$

Máme tedy

$$A = \frac{1}{4}, \qquad B = \frac{3}{4}$$

a platí

$$X(p) = \frac{2p+3}{p^3+5p^2+3p+15} = \frac{\frac{1}{4}p + \frac{3}{4}}{p^2+3} + \frac{-\frac{1}{4}}{p+5} = \frac{1}{4}\left(\frac{p}{p^2+3} + \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{3}}{p^2+3} - \frac{1}{p+5}\right).$$

Použijeme tabulky Laplaceovy transformace větu o linearitě a pro $t > 0$ vyjádříme

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{X(p)\right\} = x(t) = \frac{1}{4}\left(\cos\sqrt{3}t + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\sqrt{3}t - \frac{1}{4}\,\mathrm{e}^{-5t}\right).$$

□

Příklad 3.2 (jednoduché póly). *Mějme přenosovou funkci spojitého systému:*

$$H(p) = \frac{1}{p^2 - 5p + 6} \tag{5}$$

Nalezněte impulsní odezvu tohoto systému.

Řešení:
Přenosovou funkci (5) *je možno zapsat a rozložit na parciální zlomky:*

$$H(p) = \frac{1}{(p-2)(p-3)} = \frac{k_1}{p-2} + \frac{k_2}{p-3} \tag{6}$$

kde k_1 a k_2 jsou konstanty, které určíme zakrývacím pravidlem (pomocí limit v pólech), případně je lze dopočítat následujícím postupem tak, aby byla splněna rovnost na pravé i levé straně rovnice:

$$\frac{1}{(p-2)(p-3)} = \frac{k_1}{p-2} + \frac{k_2}{p-3} \tag{7}$$

Vynásobením pravé i levé strany rovnice (7) *výrazem* $(p-2)(p-3)$ *získáme polynomiální rovnici:*

$$1 = k_1(p-3) + k_2(p-2)$$

kde porovnáním koeficientů polynomů na pravé i levé straně obdržíme následující vztahy pro neznámé parametry k_1 a k_2:

$$\begin{aligned} k_1 + k_2 &= 0, \\ -3k_1 - 2k_2 &= 1. \end{aligned}$$

Výsledkem řešení jsou hodnoty koeficientů $k_1 = -1$, $k_2 = 1$. Rovnici (5) *proto můžeme zapsat ve tvaru*

$$H(p) = -\frac{1}{p-2} + \frac{1}{p-3} \tag{8}$$

Pomocí věty o linearitě a tabulek Laplaceovy transformace lze jednoduše vypočítat zpětnou Laplaceovu transformaci přenosové funkce (připomínáme, že přenosová funkce $H(p)$ je obrazem impulsní odezvy $h(t)$):

$$h(t) = -\mathrm{e}^{2t} + \mathrm{e}^{3t} \tag{9}$$

□

Příklad 3.3 (násobné póly). *Mějme přenosovou funkci spojitého systému:*

$$H(p) = \frac{1}{p^3 - 7p^2 + 16p - 12} \tag{10}$$

Nalezněte jeho impulsní odezvu.

Řešení:
Přenosovou funkci (10) *lze rozepsat na parciální zlomky:*

$$H(p) = \frac{1}{(p-2)^2(p-3)} = \frac{k_1}{p-2} + \frac{k_2}{(p-2)^2} + \frac{k_3}{p-3} \tag{11}$$

kde k_1, k_2 a k_3 jsou konstanty, které je nutno dopočítat.

Je vidět, že systém popsaný přenosovou funkcí (10) *má jeden pól jednoduchý a jeden pól násobný. Jak bylo uvedeno dříve, při násobném pólu musí být každý násobek zvlášť zopakován s rozdílnou konstantou.*

Vynásobením pravé i levé strany rovnice (11) *výrazem* $(p-2)^2$ *dostáváme rovnici:*

$$\frac{1}{p-3} = k_1(p-2) + k_2 + \frac{k_3(p-2)^2}{p-3} \tag{12}$$

Limitujme rovnici (12) v bodě $p \to 2$. *Výsledkem je vypočtení konstanty* $k_2 = -1$.

Dvojnásobný pól odstraníme z rovnice (11) pokud odečteme od pravé i levé strany této rovnice výraz $\frac{k_2}{(p-2)^2}$. *Výsledkem této operace je rovnice:*

$$\frac{1}{(p-2)(p-3)} = \frac{k_1}{p-2} + \frac{k_3}{p-3} \tag{13}$$

která již obsahuje pouze jednoduché póly. Vynásobením obou stran rovnice (13) *výrazem* $(p-2)(p-3)$ *získáme polynomiální rovnici:*

$$1 = k_1(p-3) + k_3(p-2)$$

z níž lze jednoduše vypočítat konstanty $k_1 = -1$ *a* $k_3 = 1$. *Přenosovou funkci* (10) *lze přepsat do tvaru:*

$$H(p) = \frac{-1}{p-2} + \frac{-1}{(p-2)^2} + \frac{1}{p-3}$$

Pomocí slovníku Laplaceovy transformace lze zapsat impulsní odezvu systému následovně:

$$h(t) = -\mathrm{e}^{2t} - t\,\mathrm{e}^{2t} + \mathrm{e}^{3t}$$

$\square$

Příklad 3.4 (komplexně sdružené póly)**.** *Mějme přenosovou funkci spojitého systému:*

$$H(p) = \frac{1}{p^3 + p^2 + 3p - 5} \tag{14}$$

Nalezněte jeho impulsní odezvu.

Řešení:

Systém popsaný přenosovou funkcí (14) *má jeden pól jednoduchý a jeden pól komplexně sdružený. U komplexně sdruženého pólu buď* počítáme s komplexními póly, *potom ale koeficienty rozkladu vychází též komplexní anebo* počítáme ve jmenovateli s (v reálném oboru) nerozložitelným kvadratickým členem. *V tom případě musí být v čitateli uveden lineární člen, aby byl zachován řád systému:*

$$H(p) = \frac{1}{(p^2+2p+5)(p-1)} = \frac{k_1 p + k_2}{p^2+2p+5} + \frac{k_3}{p-1} \tag{15}$$

kde k_1, k_2 *a* k_3 *jsou konstanty, které je nutno dopočítat. Vynásobením pravé i levé strany rovnice* (15) *výrazem* $(p^2+2p+5)(p-1)$ *dostáváme rovnici:*

$$1 = (k_1 p + k_2)(p-1) + k_3(p^2 + 2p + 5) \tag{16}$$

Porovnáním koeficientů polynomů na pravé a levé straně rovnice (16) *získáme rovnice:*

$$\begin{aligned} k_1 &= -k_3 \\ k_1 &= k_2 + 2k_3 \\ 5k_3 - k_2 &= 1 \end{aligned}$$

z nichž lze jednoduše vypočítat hodnoty koeficientů $k_1 = -\frac{1}{8}$, $k_2 = -\frac{3}{8}$ *a* $k_3 = \frac{1}{8}$. *Přenosovou funkci* (14) *lze tedy zapsat ve tvaru:*

$$H(p) = -\frac{\frac{1}{8}p + \frac{3}{8}}{p^2 + 2p + 5} + \frac{\frac{1}{8}}{p - 1}$$

Zpětná Laplaceova transformace komplexně sdruženého pólu je založena na aplikaci dvou tabulkových výrazů:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{\mathrm{e}^{\alpha t}\cos\omega t\right\} &= \frac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2+\omega^2}\\ \mathcal{L}\left\{\mathrm{e}^{\alpha t}\sin\omega t\right\} &= \frac{\omega}{(p+\alpha)^2+\omega^2}\end{aligned} \tag{17}$$

Srovnáním jmenovatele komplexně sdruženého pólu se jmenovatelem rovnic (17) *získáme hodnoty parametrů* $\alpha = 1$, $\omega = 2$.

Principem zpětné Laplaceovy transformace komplexně sdruženého pólu je doladit lineární koeficienty d_1 *a* d_2 *tak, aby pro vypočtené hodnoty* α *a* ω *platila rovnost*

$$-\frac{\frac{1}{8}p + \frac{3}{8}}{p^2 + 2p + 5} = d_1\frac{p+1}{p^2 + 2p + 5} + d_2\frac{2}{p^2 + 2p + 5}.$$

Jednoduše lze ukázat, že rovnost platí pro koeficienty $d_1 = -\frac{1}{8}$ *a* $d_2 = -\frac{1}{8}$ *a výsledek rozkladu přenosové funkce* (14) *je*

$$H(p) = -\frac{1}{8}\left[\frac{p+1}{p^2 + 2p + 5} + \frac{2}{p^2 + 2p + 5}\right] + \frac{1}{8}\frac{1}{p-1} \tag{18}$$

Pomocí tabulek zpětné Laplaceovy transformace lze vyjádřit impulsní odezvu systému popsaného přenosovou rovnicí (14) *následovně:*

$$h(t) = -\frac{1}{8}\,\mathrm{e}^{-t}\left[\cos 2t + \sin 2t\right] - \frac{1}{8}\,\mathrm{e}^{t} \tag{19}$$

□

Příklad 3.5 (komplexně sdružený pól)**.** *Ukažme si, že opravdu platí*

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p^2+1}\right\} = \sin t. \tag{20}$$

Řešení:

Rozložíme-li jmenovatele (20) *na součin dvou komplexních lineárních členů, obdržíme*

$$F(p) = \frac{1}{p^2+1} = \frac{-\frac{1}{2\mathrm{i}}}{p+\mathrm{i}} + \frac{\frac{1}{2\mathrm{i}}}{p-\mathrm{i}},$$

což podle tabulkových vzorců odpovídá

$$f(t) = -\frac{1}{2i}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t} + \frac{1}{2\mathrm{i}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} = \frac{1}{2}i\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t} - \frac{1}{2}\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}. \tag{21}$$

Exponenciální funkce v komplexní rovině je funkcí periodickou s imaginární periodou $2\pi i$ *a lze ji zapsat jako*

$$\mathrm{e}^{a+bi} = \mathrm{e}^{a}\left(\cos b + \mathrm{i}\sin b\right).$$

Funkci (21) *můžeme tedy vyjádřit jako*

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2}\mathrm{i}\left(\cos(-t) + \mathrm{i}\sin(-t)\right) - \frac{1}{2}\mathrm{i}\left(\cos t + \mathrm{i}\sin t\right) \\ &= \frac{1}{2}\mathrm{i}\cos(-t) - \frac{1}{2}\mathrm{i}\cos t - \frac{1}{2}\sin(-t) + \frac{1}{2}\sin t. \end{aligned}$$

Využijeme nyní toho, že

$$\begin{aligned} \sin t &= -\sin(-t) \\ \cos t &= \cos(-t) \end{aligned}$$

a dostáváme

$$f(t) = \underbrace{-\frac{1}{2}\mathrm{i}\cos t + \frac{1}{2}\mathrm{i}\cos t}_{0} + \underbrace{\frac{1}{2}\sin t + \frac{1}{2}\sin t}_{\sin t} = \sin t.$$

$\square$

Příklad 3.6 (přechodová odezva)**.** *Mějme přenosovou funkci spojitého systému:*

$$H(p) = \frac{1}{p-2} \tag{22}$$

Nalezněte jeho přechodovou odezvu.

Řešení:

Přechodová odezva je definována jako odezva systému na jednotkový skok. V $p-$*rovině můžeme tuto odezvu zapsat jako*

$$S(p) = H(p)\frac{1}{p}$$

kde $S(p)$ *je Laplaceův obraz přechodové odezvy* $s(t)$ *a* $\frac{1}{p}$ *je Laplaceův obraz jednotkového skoku* $\mathbb{1}(t)$*. Jednoduchou úpravou je možno vyjádřit funkci* $S(p)$ *následovně:*

$$S(p) = \frac{1}{p(p-2)} = \frac{k_1}{p-2} + \frac{k_2}{p}$$

což je již varianta racionální lomené funkce s jednoduchými póly. Zapišme proto rovnou výsledek:

$$s(t) = \frac{1}{2}\left[\mathrm{e}^{2t} - \mathbb{1}(t)\right]$$

$\square$

Příklad 3.7 (řešení diferenciální rovnice)**.** *Mějme diferenciální rovnici:*

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 6\,\frac{d}{dt}y(t) + 5\,y(t) = 25\,t^2 - 2\cdot\mathbb{1}(t) \tag{23}$$

a definované počáteční podmínky

$$y(0) = 4, \frac{d}{dt}y(0) = -8.$$

Nalezněte výstupní funkci $y(t)$*.*

Řešení:

Označme $Y(p) = \mathcal{L}\{y(t)\}$. Pomocí tabulek pro Laplaceovu transformaci převedeme diferenciální rovnici (23) na rovnici algebraickou, z níž je možno vyjádřit $Y(p)$, následovně:

$$p^2 Y(p) - 4\,p + 8 + 6\,[pY(p) - 4] + 5\,Y(p) = 25\frac{2}{p^3} - \frac{2}{p}$$
$$Y(p) = \frac{50 - 2\,p^2}{p^3(p+1)(p+5)} + \frac{4\,p + 16}{(p+1)(p+5)}$$

Rozkladem na parciální zlomky dostaneme

$$Y(p) = \frac{10}{p^3} - \frac{12}{p^2} + \frac{12}{p} + \frac{1}{p+5} - \frac{9}{p+1}$$

a po zpětné Laplaceově transformaci dostaneme získáváme časové řešení diferenciální rovnice ve tvaru

$$y(t) = \left[\,5\,t^2 - 12\,t + 12 + \mathrm{e}^{-5t} - 9\,\mathrm{e}^{-t}\right] \cdot \mathbb{1}(t).$$

□

Příklad 3.8 (věta o posunutí)**.** *Velice často se můžeme setkat se zápisem věty o posunutí ve tvaru*

$$\mathcal{L}\{f(t-\tau)\} = \mathrm{e}^{-p\tau}\,F(p). \tag{24}$$

Tento zápis je zcela korektní za předpokladu, že dodržíme následující podmínku definice jednostranné Laplaceovy transformace: definiční obor transformované funkce $f(t)$ je $t \geq 0$, pro $t < 0$ volíme $f(t) = 0$. *Jednostranná transformace neposunté funkce funguje i bez této podmínky, neboť definiční integrál zahrnuje pouze nezáporné hodnoty t, v případě posunu parametru funkce o výše uvedené τ se ale dostáváme do problémů, způsobených nejednoznačností výše uvedeného zápisu. Demonstrujme si tyto problémy na následujícím příkladu.*

Z přednášek víme, že Laplaceův obraz funkce $f(t) = \frac{1}{2}t^2$ je

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\left\{\frac{1}{2}t^2\right\} = \frac{1}{p^3}.$$

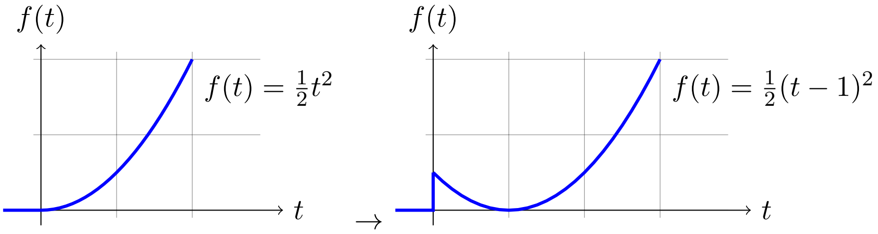
Jak to ale bude v případě, že budeme počítat obraz té samé funkce, posunuté o $\tau = 1$, tedy $f(t-1) = \frac{1}{2}(t-1)^2$?

Řešení:

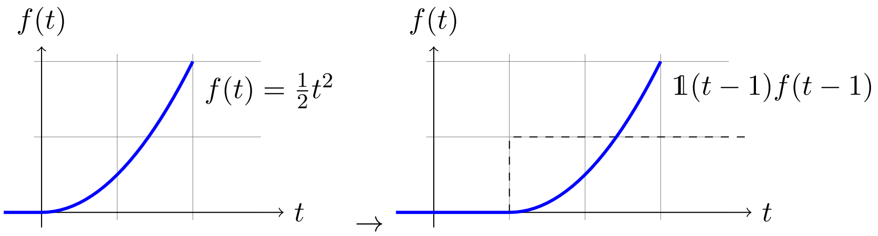
Pokud ignorujeme posunutí a počítáme

$$\mathcal{L}\left\{\frac{1}{2}(t-1)^2\right\} = \mathcal{L}\left\{\frac{1}{2}(t^2 - 2t + 1)\right\} = \frac{1}{p^3} - \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p}$$

odpovídá průběh naší transformované funkce obrázku



a to není to, co potřebujeme: z pravého grafu vidíme, že takto vyjádřená posunutá funkce nabývá nenulových hodnot i pro záporné hodnoty argumentu, konkrétně pro $0 < t < 1$. Korektní způsob naznačuje následující obrázek:



Tomu odpovídá zápis transformace posunuté funkce, obsahující posunutý jednotkový skok

$$\mathcal{L}\left\{\mathbb{1}(t-1)\cdot f(t-1)\right\} = \mathrm{e}^{-p}\cdot\mathcal{L}\left\{f(t)\right\} = \mathrm{e}^{-p}\cdot\mathcal{L}\left\{\frac{1}{2}t^2\right\} = \mathrm{e}^{-p}\cdot\frac{1}{p^3}.$$

Ukazuje se, že je vhodnější a názornější zapisovat větu o posunutí argumentu ve tvaru

$$\mathcal{L}\left\{\mathbb{1}(t-\tau)\cdot f(t-\tau)\right\} = \mathrm{e}^{-p\tau}\,F(p). \tag{25}$$

□

Příklad 3.9 (posunutí)**.** *Nalezněte $f(t)$, máte-li dáno*

$$F(p) = \frac{p\,\mathrm{e}^{-2p}}{p^2+2p+2}.$$

Řešení:
Polynom p^2+2p+2 má imaginární kořeny, je proto lépe jej rozložit na $(p+1)^2+1$ a použít tabulkové vzorce pro $\mathrm{e}^{-\alpha t}\cos\omega t$ respektive $\mathrm{e}^{-\alpha t}\sin\omega t$. Z věty o posunutí, zapsané rovnicí (25) víme, že člen e^{-2p} představuje posun argumentu a můžeme jej tedy aplikovat až po rozkladu na jednotlivé parciální zlomky. Máme tedy

$$\begin{aligned} F(p) &= \mathrm{e}^{-2p}\,\frac{p}{p^2+2p+2} = \mathrm{e}^{-2p}\,G(p),\\ G(p) &= \frac{p+(1-1)}{(p+1)^2+1} = \frac{p+1}{(p+1)^2+1} - \frac{1}{(p+1)^2+1} \end{aligned}$$

a po zpětné transformaci

$$g(t) = \mathrm{e}^{-t}\cos t - \mathrm{e}^{-t}\sin t.$$

Vzhledem k posunutí platí

$$f(t) = \mathbb{1}(t-2)\cdot g(t-2) = \mathrm{e}^{-2p}\,G(p)$$

a hledaná zpětná transformace $F(p)$ je proto

$$f(t) = \mathbb{1}(t-2)\,\mathrm{e}^{-(t-2)}\cos(t-2) - \mathrm{e}^{-(t-2)}\sin(t-2) = \mathbb{1}(t-2)\,\mathrm{e}^{2-t}\left(\cos(t-2)-\sin(t-2)\right).$$

□

Příklad 3.10 (Věta o posunutí z definice)**.** *Zapište Laplaceovu transformaci funkce*

$$x(t) = \begin{cases} t^2-2t+1 & t\geq 1,\\ 0 & \textit{jinak.}\end{cases}$$

Řešení:
Snadno nahlédneme, že nejjednodušší bude použít větu o posunutí, neboť výše uvedená rovnice nepopisuje nic jiného, než signál $x(t) = \mathbb{1}(t-1)\cdot(t-1)^2$ (nakreslete si to!). Mnozí studenti

ale počítají příklad chybně a argumentují použitím definičního vzorce Laplaceovy transformace. Podívejme se, že i zdlouhavým postupem přes definiční integrál dospějeme ke stejnému řešení.

Pro $\mathcal{L}\{x(t)\}$ platí

$$\begin{aligned} X(p) = \int_1^\infty \left(t^2 - 2t + 1\right) \mathrm{e}^{-pt}\, \mathrm{d}t &= \int_1^\infty t^2\, \mathrm{e}^{-pt}\, \mathrm{d}t - 2\int_1^\infty t\, \mathrm{e}^{-pt}\, \mathrm{d}t + \int_1^\infty \mathrm{e}^{-pt}\, \mathrm{d}t = \\ &= A(p) - 2B(p) + C(p). \end{aligned}$$

Máme

$$\begin{aligned} A(p) = \int_1^\infty t^2\, \mathrm{e}^{-pt}\, \mathrm{d}t = \int_1^\infty \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}p^2}\, \mathrm{e}^{-pt}\, \mathrm{d}t &= \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}p^2} \int_1^\infty \mathrm{e}^{-pt}\, \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}p^2}\left[-\frac{1}{p}\, \mathrm{e}^{-pt}\right]_1^\infty = \\ &= \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}p^2}\left[0 - \left(-\frac{1}{p}\, \mathrm{e}^{-p}\right)\right] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\left(\frac{1}{p}\, \mathrm{e}^{-p}\right)\right] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\left[-\frac{1}{p}\, \mathrm{e}^{-p} - \frac{1}{p^2}\, \mathrm{e}^{-p}\right] = \\ &= \frac{\mathrm{e}^{-p}}{p} + \frac{2\, \mathrm{e}^{-p}}{p^2} + \frac{2\, \mathrm{e}^{-p}}{p^3} \end{aligned}$$

a obdobně

$$\begin{aligned} B(p) = \int_1^\infty t\, \mathrm{e}^{-pt}\, \mathrm{d}t = \int_1^\infty \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\, \mathrm{e}^{-pt}\, \mathrm{d}t &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p} \int_1^\infty \mathrm{e}^{-pt}\, \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\left(\frac{1}{p}\, \mathrm{e}^{-p}\right) = \\ &= \frac{\mathrm{e}^{-p}}{p} + \frac{\mathrm{e}^{-p}}{p^2} \\ C(p) = \int_1^\infty \mathrm{e}^{-pt}\, \mathrm{d}t = \int_1^\infty \mathrm{e}^{-pt}\, \mathrm{d}t &= \frac{\mathrm{e}^{-p}}{p}. \end{aligned}$$

Celkově tedy

$$X(p) = \frac{\mathrm{e}^{-p}}{p} + \frac{2\, \mathrm{e}^{-p}}{p^2} + \frac{2\, \mathrm{e}^{-p}}{p^3} - 2\left(\frac{\mathrm{e}^{-p}}{p} + \frac{\mathrm{e}^{-p}}{p^2}\right) + \frac{\mathrm{e}^{-p}}{p} = \frac{2\, \mathrm{e}^{-p}}{p^3}.$$

□

Příklad 3.11 (konvoluce)**.** *Nalezněte řešení integrální rovnice*

$$y(t) = 4t - \int_0^t y(t-\tau)\tau d\tau. \tag{26}$$

Řešení:
Podle věty o konvoluci je

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau\right\} = F(p) \cdot G(p)$$

a v případě konvoluce, jež se vyskytuje v rovnici (26)*, vidíme, že*

$$\begin{aligned} f(t) &= y(t), \\ g(t) &= t \end{aligned}$$

a po transformaci rovnice získáme

$$\begin{aligned} Y(p) &= \frac{4}{p^2} - Y(p) \cdot \frac{1}{p^2}, \\ p^2 Y(p) + Y(p) &= 4, \\ Y(p) &= \frac{4}{p^2+1} = 4\frac{1}{p^2+1}. \end{aligned}$$

Po zpětné transformaci dostaneme

$$y(t) = 4 \sin t.$$

□

Příklad 3.12 (polynom)**.** *Nalezněte Laplaceův obraz funkce, zadané předpisem*

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \wedge \quad t < 4, \\ t^2 - 5t + 6 & \wedge \quad t \geq 4. \end{cases} \tag{27}$$

Řešení:

Funkci $f(t)$ v rovnici (27) *můžeme analogicky vyjádřit jako*

$$f(t) = \mathbb{1}(t-4)\left(t^2 - 5t + 6\right), \tag{28}$$

neboť jednotkový skok z 0 do 1 pro $t = 4$ je ekvivalentem podmínky uvedené v rovnici (27)*.*

Nyní si musíme uvědomit, že věta o posunutí argumentu v Laplaceově transformaci platí ve tvaru

$$\mathcal{L}\left\{\mathbb{1}(t-\tau)g(t-\tau)\right\} = \mathrm{e}^{-p\tau}\,\mathcal{L}\left\{g(t)\right\} = \mathrm{e}^{-p\tau}\,G(p)$$

a že tedy například

$$\mathcal{L}\left\{\mathbb{1}(t-\tau)\right\} = \mathrm{e}^{-p\tau}\,\frac{1}{p}, \tag{29}$$

$$\mathcal{L}\left\{\mathbb{1}(t-\tau)(t-\tau)\right\} = \mathrm{e}^{-p\tau}\,\frac{1}{p^2}, \tag{30}$$

$$\mathcal{L}\left\{\mathbb{1}(t-\tau)(t-\tau)^2\right\} = \mathrm{e}^{-p\tau}\,\frac{2}{p^3}. \tag{31}$$

V rovnici (28) *se vyskytuje jednotkový skok $\mathbb{1}(t-4)$ a tedy $\tau = 4$. Budeme proto pomocí ekvivalentních úprav hledat takový rozklad polynomu $t^2 - 5t + 6$, jenž je tvořen členy $(t-4)^2$, $(t-4)$ a konstantou. Máme*

$$\begin{aligned} t^2 - 5t + 6 &= t^2 - 8t + 16 + 3t - 10 = (t-4)^2 + 3t - 10 \\ &= (t-4)^2 + 3t - 12 + 2 = (t-4)^2 + 3\cdot(t-4) + 2 \end{aligned}$$

a rovnici (28) *přepíšeme na*

$$\begin{aligned} f(t) = \mathbb{1}(t-4)\left(t^2 - 5t + 6\right) &= \mathbb{1}(t-4)\left((t-4)^2 + 3\cdot(t-4) + 2\right) \\ &= \mathbb{1}(t-4)(t-4)^2 + 3\cdot\mathbb{1}(t-4)(t-4) + 2\cdot\mathbb{1}(t-4) \end{aligned}$$

Vzhledem k linearitě Laplaceovy transformace můžeme transformovat jednotlivé sčítance zvlášť pomocí posunutí zapsaných v rovnicích (29), (30), (31)*. Hledaný Laplaceův obraz je tedy*

$$F(p) = \mathrm{e}^{-4p}\left(\frac{2}{p^3} + \frac{3}{p^2} + \frac{2}{p}\right).$$

□

3.1 Neřešené příklady

1. S použitím Laplaceovy transformace řešte homogenní diferenciální rovnici

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}y(t) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t) - 2\,y(t) = 0$$

   při počátečních podmínkách $y(0) = 0$, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(0) = 3$.

řešení: $\left[\, y(t) = \mathrm{e}^{t} - \mathrm{e}^{-2t} \,\right]$

2. S použitím Laplaceovy transformace řešte diferenciální rovnici

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} y(t) + y(t) = \sin 2t$$

při počátečních podmínkách $y(0) = 0$, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} y(0) = 0$.

řešení: $\left[\, y(t) = \frac{2}{3} \sin t - \frac{1}{3} \sin 2t \,\right]$

3. S použitím Laplaceovy transformace řešte homogenní diferenciální rovnici

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} y(t) + 2\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} y + 2\,y(t) = 0$$

při počátečních podmínkách $y(0) = 1$, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} y(0) = 0$.

řešení: $\left[\, y(t) = \mathrm{e}^{-t} (\cos(t) + \sin t) \,\right]$

4. S použitím Laplaceovy transformace řešte diferenciální rovnici

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} y(t) - 5\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} y(t) + 4\,y(t) = 4\,t^2 \cdot \mathrm{e}^{2t}$$

při počátečních podmínkách $y(0) = -1$, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} y(0) = 1$.

řešení (neověřeno): $\left[\, y(t) = 5\ \mathrm{e}^{t} + 3\ \mathrm{e}^{4t} - (4\,t^2 - 2t + 3)\,\mathrm{e}^{2t} \,\right]$

5. Nalezněte $f(t)$, pokud

$$F(p) = \frac{p\,\mathrm{e}^{-5p}}{p^2 + 4}.$$

řešení: $[\, f(t) = \mathbb{1}(t-5) \cos(2t - 10) \,]$

6. Nalezněte $f(t)$, pokud

$$F(p) = \frac{\mathrm{e}^{-p}}{p^2 + p}.$$

řešení: $\left[\, f(t) = \mathbb{1}(t-1) \cdot \left(1 - \mathrm{e}^{1-t}\right) \,\right]$

7. Vyřešte integrální rovnici

$$y(t) = -1 + \int_0^t y(t-\tau)\,\mathrm{e}^{-3\tau}\,d\tau.$$

223 řešení: $\left[\, y(t) = -\dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-2t} \,\right]$

8. Vyřešte integrální rovnici

$$y(t) = \mathrm{e}^{-t} + \int_0^t y(t-\tau)d\tau.$$

224 řešení: $\left[\, y(t) = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{t} + \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-t} = \cosh t \,\right]$

9. Vyřešte integrální rovnici

$$y(t) = \cos t + \int_0^t y(t-\tau)\,\mathrm{e}^{-2\tau}\,d\tau.$$

225 řešení: $\left[\, y(t) = -\dfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-t} + \dfrac{3}{2}\cos t + \dfrac{1}{2}\sin t \,\right]$

10. Nalezněte Laplaceův obraz funkce, zadané předpisem

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \wedge \quad t < 2, \\ t^3 - 5t + 6 & \wedge \quad t \geq 2. \end{cases}$$

226 řešení: $\left[\, F(p) = \mathrm{e}^{-2p}\left(\frac{6}{p^4} + \frac{12}{p^3} + \frac{7}{p^2} + \frac{4}{p}\right) \,\right]$