Opravy ve skriptech Sbírka příkladů z fyziky
autoři : Malá, Vítů 2009

3.39 správně:
Stanovte teoretické hmotnostní výtokové množství Q [kg·s^{-1}] ideální kapaliny o hustotě ρ, vytékající otvorem ve dně válcové nádrže. Průměr nádrže je d_1, průměr otvoru ve dně je d_2. Výška hladiny h je konstantní.

Návod k řešení:
Bernoulliho rovnice $\frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h = \frac{1}{2}\rho v_2^2$.
Rovnice kontinuity $S_1 v_1 = S_2 v_2$.
Hmotnostní výtokové množství $Q = \frac{m}{t}$, množství kapaliny hmotnosti m vyteklé za čas t.

$$\left[Q = \frac{\pi d_2^2}{4}\rho \sqrt{\frac{2gh}{1-\left(\frac{d_2}{d_1}\right)^4}} \right]$$

4.5
Mosazné kyvadlo má při teplotě $t_1 = 10\ °\mathrm{C}$ dobu kyvu $\tau_1 = 1\,\mathrm{s}$. Spočítejte, jakou hodnotu τ_2 bude mít doba kyvu při teplotě $t_2 = 25\ °\mathrm{C}$ následkem teplotní roztažnosti. Součinitel délkové teplotní roztažnosti mosazi $\alpha = 1{,}85 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{K}^{-1}$.

$$\left[\tau_2 = 1{,}00014\ \mathrm{s}\right]$$

4.21
V uzavřené nádobě o stálém objemu V je plynný kyslík O_2 hmotnosti m. V určitém okamžiku nastane mezi elektrodami uvnitř plynu jiskrový výboj, při němž se veškerý kyslík přemění v ozon O_3 a termodynamická teplota T se zvětší na dvojnásobnou hodnotu. Stanovte, jak se změní tlak plynu v nádobě. (Kyslík i ozon považujte za ideální plyny.)

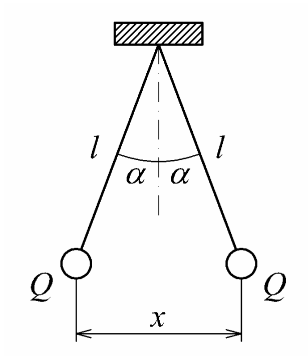
Řešení:

Stavové veličiny p, V, T příslušející kyslíku spojuje stavová rovnice $pV = n_{\mathrm{O}_2} R_m T$. Přitom $n_{\mathrm{O}_2} = \frac{m}{M_{\mathrm{O}_2}}$ je počet molů kyslíku a M_{O_2} jeho molární hmotnost.

Při vzniku ozonu se změní tlak plynu z hodnoty p na hodnotu p' a teplota na $T' = 2T$ a opět platí stavová rovnice $p'V = n_{\mathrm{O}_3} R_m T'$. Přitom $n_{\mathrm{O}_3} = m/M_{\mathrm{O}_3}$ je počet molů ozonu a M_{O_3} jeho molární hmotnost. Z podílu stavových rovnic pro kyslík a ozon dostaneme hledaný vztah pro tlak

$$p' = \frac{n_{\mathrm{O}_3} T'}{n_{\mathrm{O}_2} T} p = \frac{M_{\mathrm{O}_2}}{\mathrm{M}_{\mathrm{O}_3}} \frac{2T}{T} p = \frac{4}{3} p,$$

neboť poměr molárních hmotností je pro plyny, jejichž molekuly jsou složené ze stejných atomů dán poměrem počtu atomů v molekule, tj. $\dfrac{M_{O_2}}{M_{O_3}} = \dfrac{2}{3}$.



Obr. 5.2

5.9

Dvě malé vodivé kuličky o stejné hmotnosti m a stejném náboji Q jsou zavěšené na nevodivých závěsech o stejných délkách l v jednom bodě (obr. 5.2). Předpokládejme, že úhel α je tak malý, že platí $\mathrm{tg}\alpha \doteq \sin\alpha$. Ukažte, že v rovnováze je vzdálenost mezi kuličkami $x = \left(\dfrac{Q^2 l}{2\pi\varepsilon_0 mg} \right)^{\frac{1}{3}}$. Jaká je hodnota náboje Q, je-li $l = 1{,}2\ \mathrm{m}$, $m = 10\ \mathrm{g}$, $x = 50\ \mathrm{mm}$?

Řešení:

$$mg\sin\alpha = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{x^2}\cos\alpha \;\Rightarrow\; \mathrm{tg}\alpha = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{x^2}\frac{1}{mg}$$

$$\mathrm{tg}\alpha \doteq \sin\alpha = \frac{x}{2l},$$

$$\frac{x}{2l} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{x^2}\frac{1}{mg} \;\Rightarrow\; x^3 = \left(\frac{Q^2 l}{2\pi\varepsilon_0 mg} \right)$$

Po číselném dosazení dostaneme $Q = 2{,}4 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{C}$.

5.63

Hustota proudu ve válcovém vodiči o poloměru R se mění podle vztahu $i = i_0\left(1 - \dfrac{r}{R}\right)$, kde r je vzdálenost od osy válce. Hustota proudu tedy dosahuje maximální hodnoty i_0 v ose vodiče a lineárně klesá k nule na povrchu vodiče. Vypočtěte proud I_1 ve vodiči a vyjádřete ho pomocí proudové hustoty i_0 a plochy průřezu vodiče $S = \pi R^2$. Uvažujte jinou situaci: hustota proudu má největší hodnotu i_0 na povrchu válcového vodiče a lineárně klesá k nule v ose vodiče podle vztahu $i = i_0 \dfrac{r}{R}$. Opět vypočtěte proud (I_2).

$$\left[I_1 = \frac{1}{3} i_0 S,\ I_2 = \frac{2}{3} i_0 S \right]$$

5.65

Drát má průměr 2,0 mm, délku 2,0 m a odpor $50\ \mathrm{m\Omega}$. Jaká je rezistivita ρ materiálu?

$$\left[\rho = 7{,}9 \cdot 10^{-8}\ \Omega \cdot \mathrm{m}^{-1} \right]$$

5.145
Silný svazek světla pulzního laseru přenáší ve vakuu výkon o intenzitě vlnění 10^{18} W·m^{-2}. Světelnou vlnu považujeme za rovinnou harmonickou a lineárně polarizovanou. Určete amplitudu E_0 intenzity elektrického pole vlny.

Řešení:

Pro intenzitu vlnění I platí $I = \left|\vec{S}\right|$, kde $\vec{S}$ je Poyntingův vektor $\vec{S} = \dfrac{1}{\mu_0}\vec{E} \times \vec{B}$.

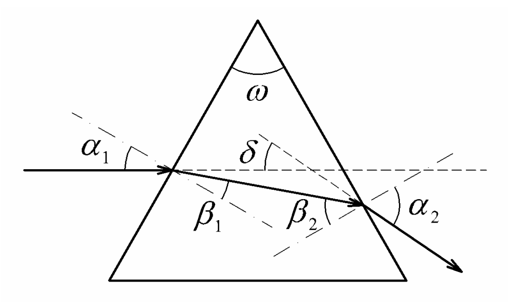
V elektromagnetické vlně platí $\vec{E} \perp \vec{B}$, $E = cB$ a $c^2 = \dfrac{1}{\varepsilon_0 \mu_0}$, neboť $\varepsilon_r \doteq 1$, $\mu_r \doteq 1$.

Po algebraických úpravách dostaneme $\overline{E} = \sqrt{\dfrac{I}{\varepsilon_0 c}}$.

Vztah mezi střední hodnotou intenzity elektrického pole $\overline{E}$ a amplitudou E_0 intenzity elektrického pole $E_0 = \overline{E} \cdot \sqrt{2}$ vede k výslednému výrazu $E_0 = \sqrt{\dfrac{2I}{\varepsilon_0 c}}$.

Po číselném dosazení dostáváme $E_0 = 2,74 \cdot 10^{10}\ \mathrm{V \cdot m^{-1}}$.

6.5
Paprsek monochromatického světla dopadá na skleněný hranol o lámavém úhlu $\omega = 60°$ pod úhlem dopadu $\alpha_1 = 30°$ (obr. 6.3). Stanovte odchylku δ paprsku (deviační úhel je definicán jako celkový úhel, o který se paprsek při průchodu hranolem odchýlí), jestliže index lomu světla pro sklo je $n = 1{,}5$.



Obr. 6.3

Řešení:

Úhly měříme od příslušných paprsků ke kolmici jen do 90° a počítáme je kladně ve smyslu pohybu hodinových ručiček. Pak

$\delta = (\alpha_1 - \beta_1) + (\alpha_2 - \beta_2) = \alpha_1 + \alpha_2 - \omega$

Úhly $\beta_1, \beta_2, \alpha_2$ určíme postupně užitím zákona lomu:

$\sin\beta_1 = \dfrac{\sin\alpha_1}{n} = 0{,}3 \Rightarrow \beta_1 = 19{,}471°$,

$\beta_2 = -(\omega - \beta_1) = -40,529°$

$\sin\alpha_2 = n\sin\beta_2 = -0,97474 \Rightarrow \alpha_2 = -77,095°$. Dosazením do rovnice pro δ dostáváme $\delta = 47,096° \cong 47°6'$.

6.21

Krátký předmět délky *L* leží na centrální ose kulového zrcadla, jehož ohnisková vzdálenost je *f*, ve vzdálenosti *x* od vrcholu zrcadla.

Ukažte, že jeho obraz v zrcadle má délku $L' = \dfrac{f^2 L}{(x+L-f)(x-f)}$.

7.5

Vlnová délka λ^* příslušející maximální hodnotě vyzařování povrchu Slunce při dané teplotě se nachází v blízkosti hodnoty 500 nm. Předpokládejte, že Slunce vyzařuje jako černé těleso a vypočítejte a) teplotu na povrchu Slunce T_S b) vyzařování M_e z povrchu Slunce, c) energii slunečního záření dopadající za jeden den na Zemi W_z a výkon P dopadající na jednotku plochy Země.

Řešení:

a) Ze vztahu $\lambda^* T_S = b$ vychází $T_S = 5\,800$ K.

b) Vyzařování pro černé těleso závisí na teplotě vztahem $M_e = \sigma T^4$,
takže pro teplotu $T_S = 5\,800$ K dostaneme $M_e = 6,42 \cdot 10^7 \ \mathrm{W \cdot m^{-2}}$.

c) Výkon přenášený zářením z povrchu Slunce je $P_S = M_e 4\pi r_S^2$.
Pro poloměr Slunce $r_s = 6,96 \cdot 10^5$ km nabývá P_S hodnoty $3,91 \cdot 10^{26}$ W. Pouze část ΔP_S výkonu přenášeného zářením z povrchu Slunce dopadá na povrch Země

$$\Delta P_S = \frac{\pi r_z^2}{4\pi R_{SZ}^2} P_S = 1,79 \cdot 10^{17} \ \mathrm{W},$$

kde $r_z = 6,37 \cdot 10^6$ m je poloměr země a $R_{SZ} = 1,49 \cdot 10^{11}$ m je vzdálenost Slunce – Země.

Energie slunečního záření dopadající za jeden den na Zemi je
$W_z = 1,79 \cdot 10^{17} \cdot 86\,400 = 1,55 \cdot 10^{22}$ J.
Výkon dopadající na jednotku plochy Země je

$$P = \frac{\Delta P_S}{\pi r_z^2} = 1\,400 \ \mathrm{W \cdot m^{-2}}.$$

(Slunce je největší zdroj energie dopadající na Zemi).

7.7

Grafitová tyč délky *l* = 0,5 m, průměru *d* = 0,01 m a emisivitě povrchu $\varepsilon = 0,9$ je uložena ve vakuu a okolní prostředí je udržované na konstantní teplotě $t_0 = 10$ °C. V okamžiku kdy tyč začne chladnout má teplotu $T = 1\,800\ \mathrm{K}$. Za jaký čas τ poklesne na teplotu $T_1 = 800\ \mathrm{K}$. Hustota tyče je $\rho = 2\,230\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$ a měrná tepelná kapacita je $c = 1\,675\ \mathrm{J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}}$.

Řešení:

Vyzařování je definováno vztahem $M_e = \dfrac{d\Phi_e}{dS} = \dfrac{d}{dS}\dfrac{dW}{d\tau} = \dfrac{d^2W}{dSd\tau}$.

Elementární ploška dS povrchu zářiče za čas $d\tau$ vyzařuje energii dW_1 a zároveň absorbuje z okolního prostředí energii dW_0. Rozdíl těchto energií je celkový úbytek energie za čas $d\tau$ ploškou dS. Platí tedy

$$d^2W = d^2W_1 - d^2W_0 = M_e(T)\,dSd\tau - M_e(T_0)\,dSd\tau = \left(\varepsilon\sigma T^4 - \alpha\sigma T_0^4\right)dSd\tau\ .$$

Protože absorbtivita $\alpha = \varepsilon$, dostaneme integrací přes celou plochu zářiče

$$dW = \varepsilon\sigma\left(T^4 - T_0^4\right)l\pi d\, d\tau\ .$$

V důsledku úbytku energie za čas $d\tau$ poklesne teplota o dT (stoupne o $(-dT)$) tak, že platí

$$dW = -mc\,dT\ .$$

Ze vztahů pro přírůstky energie dostaneme

$$-mcdT = \varepsilon\sigma\left(T^4 - T_0^4\right)l\pi d\, d\tau\ .$$

Separací proměnných a integrací máme

$$\int_T^{T_1} \frac{dT}{T_0^4 - T^4} = \frac{\varepsilon\sigma l\pi d}{mc}\int_0^\tau d\tau\ ,$$

$$\tau = \frac{\rho c d}{16\varepsilon\sigma T_0^3}\left[\ln\frac{(T_1+T_0)(T-T_0)}{(T_1-T_0)(T+T_0)} + 2\left(\operatorname{arctg}\frac{T_1}{T_0} - \operatorname{arctg}\frac{\mathrm{T}}{\mathrm{T}_0}\right)\right] \cong 109{,}5\ \mathrm{s}\ ,$$

kde jsme dosadili $m = \rho V = \rho\pi l\left(\dfrac{d}{2}\right)^2$.

7.14

Na wolframovou katodu fotodiody dopadá elektromagnetické záření o vlnové délce $\lambda = 200\ \mathrm{nm}$, dopadající zářivý tok Φ_e je 3 mW. Předpokládejte, že 0,08 % dopadajících fotonů vyvolá emisi elektronů a že všechny uvolněné elektrony dorazí k anodě (nasycený proud). Výstupní práce wolframu $\Phi = 4{,}5\ \mathrm{eV}$. Určete a) fotoelektrický proud I tekoucí diodou, b) při jakém brzdném napětí U_{br} na diodě fotoelektrický proud zanikne.

Řešení:

a) Proud tekoucí fotodiodou je dán celkovým nábojem prošlým diodou za čas t tj. $I = \frac{ne}{t}$.

Protože $\frac{n}{t} = \frac{\Phi_e}{hf}$ a pouze 0,08 % dopadajících fotonů vyvolá emisi elektronů, je

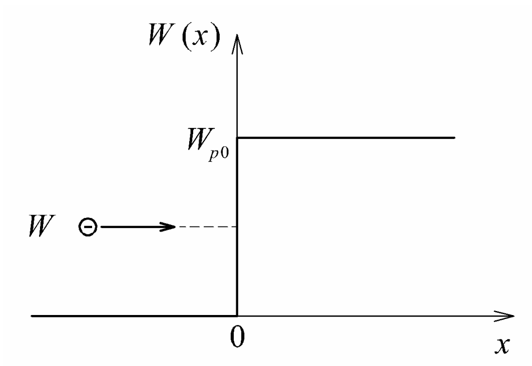
$$I = 8 \cdot 10^{-4} \frac{\Phi_e \lambda e}{hc} \cong 4 \cdot 10^{-7}\ \text{A}.$$

b) Energie fotoelektronu $W = hf - \Phi$, kde Φ je výstupní práce wolframu. Při brzdném napětí U_{br} bude energie fotoelektronu nabývat hodnoty eU_{br} a tedy

$$U_{br} = \frac{hf - \Phi}{e} = \frac{hc}{e\lambda} - \frac{\Phi}{e} \cong 1{,}72\ \text{eV}$$

7.42

Elektron o kinetické energii W = 5 eV dopadá ve směru osy x zleva na potenciálovou barieru výšky $W_{p0} = 10\ \text{eV}$ v místě o souřadnici x = 0, obr. 7.2. Určete hloubku průniku elektronu Δx potenciálovou barierou pro kterou platí, že pravděpodobnost průniku elektronu do této hloubky přes potenciálovou barieru je $\frac{1}{e}$ (e je základ přirozeného logaritmu).



Obr. 7.2

Řešení:

Řešením Schrödingerovy rovnice

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} + W_p\psi = W\psi$$

pro $x < 0$ ($V = 0$) a pro $x > 0$ ($V = V_0$) dostaneme dvě vlnové funkce popisující chování částice v oblasti před barierou a za barierou

$$\psi_I = Ae^{i\kappa_0 x} + Be^{-i\kappa_0 x}, \qquad \kappa_0 = \frac{\sqrt{2mW}}{\hbar} \qquad \text{pro} \quad x < 0,$$

$$\psi_{II} = Ce^{i\kappa_1 x} + De^{-i\kappa_1 x}, \qquad \kappa_1 = i\kappa, \quad \kappa = \frac{\sqrt{2m\left(W_{p0} - W\right)}}{\hbar} \qquad \text{pro} \quad x > 0.$$

Protože vlnová funkce ψ_{II} klesá k nule když $x \to \infty$, musí být koeficient D = 0, takže vlnová funkce $\psi_{II} = Ce^{-\kappa x}$. Pravděpodobnost nalezení částice v oblasti $x > 0$ je $\left|\psi_{II}\right|^2$. Pravděpodobnost nalezení částice v místě vzdáleném o Δx za barierou je podle požadavku $\frac{1}{e}$ pravděpodobnosti nalezení v místě $x = 0$, tedy

$$e^{-1} = \frac{\psi_{II}^2\left(x = \Delta x\right)}{\psi_{II}^2\left(x = 0\right)} = e^{-2\kappa\Delta x}.$$

Z této rovnice vyplývá, že $1 = 2\kappa\Delta x$ a odpovídající hloubka průniku

$$\Delta x = \frac{1}{2\kappa} = \frac{\hbar}{2\sqrt{2m\left(W_{p0} - W\right)}} = 0{,}044\ \mathrm{nm}.$$

Z pohledu klasické fyziky je oblast za potenciálovou barierou pro elektron, jehož energie je menší než je výška potenciálové bariery, zakázaná. Takový elektron barierou neprojde. Z pohledu kvantové fyziky pronikne elektron s energií menší než je výška potenciálové bariéry s pravděpodobností $\frac{1}{e}$ do vzdálenosti 0,044 nm za potenciálovou bariéru. Tento jev se nazývá **tunelový jev.**

9.19

Izotop ^{239}Pu vzniká jako vedlejší produkt v jaderném reaktoru a hromadí se jako zátěž životního prostředí. Izotop je radioaktivní, prodělává α –rozpad s poločasem přeměny $2{,}41 \cdot 10^4$ let. Jaké množství N jader obsahuje smrtelné množství plutonia, tj. 2 mg? Jaká je aktivita A tohoto množství?

$\left[N = 5 \cdot 10^{18},\ A = 4{,}56 \cdot 10^6\ \mathrm{Bq}\right]$