

ZPRACOVÁNÍ VÝSLEDKŮ MĚŘENÍ

1. CHYBY MĚŘENÍ

Nedokonalost metod měření, přístrojů i lidských smyslů a nemožnost registrace a kontroly všech podmínek, které určují stav měřeného objektu způsobují, že měřením nemůžeme zjistit skutečnou (pravou) hodnotu měřené veličiny. Záleží však na přesnosti měřicích přístrojů a metod i konkrétním způsobu provedení měření, jak se této skutečné hodnotě veličiny měřením přiblížíme. V každém případě výsledkem měření bude hodnota, která se od skutečné hodnoty veličiny liší, a rozdíl těchto dvou hodnot se nazývá

chyba měření a označuje se κ_x ,

kde x je symbol pro měřenou veličinu. Tuto chybu nelze přesně stanovit, lze ji však alespoň odhadnout. Na základě odhadu chyby lze určit nejistotu měření, která charakterizuje rozsah hodnot okolo výsledku měření, který lze zdůvodněně přiřadit k hodnotě měřené veličiny. Nejistota se udává nejen pro výsledky měření, ale i pro měřidla, pro použité konstanty, korekce apod.

O nejistotách měření bude pojednáno podrobněji v odstavcích 4 – 7.

Chyba κ_x charakterizuje odchylku naměřené hodnoty od skutečné (pravé) hodnoty x veličiny, a proto ji vyjadřujeme v jednotkách měřené veličiny. Takto definovanou chybu nazýváme **absolutní chyba**.

Někdy se názorněji přesnost naměřené hodnoty veličiny charakterizuje relativní chybou, která vztahuje velikost absolutní chyby k naměřené hodnotě.

Relativní chyba určité hodnoty veličiny je definována vztahem

$$\kappa_{rx} = \frac{\kappa_x}{x} . \quad (1)$$

Příklad:

Posuvným měřítkem byla naměřena vzdálenost dvou bodů $d = 15,3$ mm. Absolutní chyba naměřené délky je $\kappa_d = 0,1$ mm. Podle definice je relativní chyba $\kappa_{rd} = \frac{0,1}{15,3} = 0,065$,

což je 6,5 % z hodnoty výsledku.

Podle původu dělíme chyby na **systematické** (soustavné) a **náhodné**, a proto také chyba naměřené hodnoty se skládá z chyby systematické a náhodné.

2. SYSTEMATICKÉ CHYBY

Systematické chyby souvisejí obvykle s použitou metodou či měřicími přístroji nebo se samotným pozorovatelem. Říkáme, že jsou způsobeny **kontrolovatelnými vlivy**.

Příklad:

V případě vážení na rovnoramenných vahách může systematickou chybu způsobovat odchylka od rovnoramennosti vah, odchylka v hmotnosti závaží, nezapočítaná oprava na rozdíl vztaku závaží a předmětu ve vzduchu apod.

Vzniklé systematické chyby zkreslují výsledek při opakovaném měření konaném za stejných podmínek vždy stejným způsobem, tj. buď výsledek stále zvětšují nebo stále zmenšují. Teoreticky lze kontrolovatelné vlivy zjistit a ohodnotit pomocí přesnějších přístrojů, eventuálně korekční metody, a proto by v principu bylo možné systematické chyby vyloučit. V praxi je tento požadavek těžko uskutečnitelný a velikost chyb se snažíme alespoň přibližně odhadnout.

Systematickou chybu hodnoty x označujeme m_x . Tato absolutní chyba má často charakter maximální chyby. Její význam je takový, že chyba, které se při měření hodnoty x skutečně dopustíme, je vždy menší nebo nejvýš rovna chybě m_x . V některých případech je výhodnější pracovat s relativní systematickou chybou m_{rx} měřené hodnoty.

Zdrojem systematických chyb je:

1. Omezená přesnost přístrojů.

Její příčinu je třeba hledat v nedokonalém a ne zcela přesném provedení měřících přístrojů. Typickým příkladem může být nedokonalost a nepřesnost stupnic. Tyto chyby by bylo možno odstranit nebo alespoň podstatně zmenšit použitím dokonalejších zařízení, ale v technické praxi by používání velmi přesných přístrojů bylo často nákladné a těžko realizovatelné. Proto se snažíme v některých případech dosáhnout větší přesnosti, a tím zmenšení systematické chyby, kalibrací přístroje před měřením. Kalibrace spočívá v porovnání údajů přístroje s údaji podstatně přesnějšího měřidla a výsledkem je stanovení hodnoty korekčního faktoru či korekční křivky, pomocí kterých naměřené hodnoty opravujeme.

Příklad:

Mohrovými vázkami byla při teplotě 20 °C naměřena hustota vody $s' = 997 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. Tabulková hodnota hustoty vody při této teplotě, což je hodnota naměřená přesnějším měřením, je $s = 998,205 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. Opravný koeficient k , kterým musíme násobit každou hodnotu hustoty naměřenou těmito vázkami, je dán vztahem $k = \frac{s}{s'}$. V našem případě $k = 1,0012$.

Pro některé sériově vyráběné přístroje výrobce udává jejich **maximální (největší přípustnou) chybu** m_x . Tak zaručuje, že hodnota veličiny x naměřená přístrojem bude v celém jeho rozsahu mít chybu zpravidla menší, ale nanejvýš rovnou maximální chybě. **Maximální chyba je pro elektrické ukazovací (ručkové) měřicí přístroje** výrobcem udávána pomocí **třídy přesnosti** T_p . Údaj o třídě přesnosti je obvykle uveden v pravém dolním rohu pod stupnicí přístroje, a to nad značkou udávající, je-li přístroj určen pro střídavý nebo stejnosměrný proud. Podle platné normy je třída přesnosti číslo z řady 0,1; 0,2; 0,5; 1; 1,5; 2,5; 5. Maximální chybu naměřené hodnoty lze pak stanovit ze vztahu

$$m_x = \frac{1}{100} T_p x_{\max} , \quad (2)$$

kde x_{\max} je největší hodnota měřené veličiny v uvažovaném rozsahu. Maximální chyba je stejná, ať měříme v kterékoliv části rozsahu, zatímco relativní chyba je tím větší, čím menší je měřená hodnota vzhledem k maximální hodnotě v rozsahu. Proto se s elektrickými měřicími přístroji snažíme měřit tak, aby výchylka byla pokud možno ve třetí třetině rozsahu. Měříme-li hodnotu právě rovnou maximální hodnotě rozsahu, je relativní chyba měřené hodnoty nejmenší, a je právě rovna třídě přesnosti vyjádřené v procentech.

Příklad:

Měříme s voltmetrem třídy přesnosti $T_p = 0,5$ na rozsahu 0 – 30 V. Naměřené hodnoty napětí jsou $U_1 = 15$ V , $U_2 = 30$ V .

Maximální chyby vyplývající z třídy přesnosti jsou pro obě naměřené hodnoty stejné, protože byly měřeny na jednom rozsahu a jejich velikosti vypočteme ze vztahu (2)

$$m_{U_1} = m_{U_2} = 0,01 \cdot 0,5 \cdot 30 = 0,15 \text{ V} .$$

Relativní chyby

$$m_{rU_1} = \frac{0,15}{15} = 0,01$$

$$m_{rU_2} = \frac{0,15}{30} = 0,005 .$$

Hodnotu napětí 15 V měříme s relativní chybou 1 %, hodnotu 30 V, která je maximální hodnotou rozsahu 0 – 30 V, měříme s relativní chybou 0,5 %, která je číselně rovna třídě přesnosti.

U číslicových elektrických měřicích přístrojů má chyba dvě složky: základní chyba je chyba při referenčních podmínkách stanovených výrobcem přístroje a přídavná chyba je chyba vznikající při nedodržení referenčních podmínek.

Základní chyba číslicových voltmetrů a číslicových multimetrů se skládá ze dvou složek.

Chybou m_{rx} v procentech měřené hodnoty x a počtem kvantizačních kroků N , což je počet jedniček (digitů) nejnižšího místa číslicového zobrazovače na zvoleném rozsahu. Předem je třeba zjistit z rozsahu a počtu míst jeho zobrazovače, jaká hodnota měřené veličiny odpovídá 1

digitu. Tento tvar vyjádření přesnosti se používá zejména v zahraniční literatuře, kde údaj přesnosti má např. tvar $\pm 0,02\% \text{rdg.} \pm 2 \text{ digits}$, kde zkratka rdg. (reading) znamená čtení.

Příklad:

Číslicový voltmetr s maximálním údajem 9999 je použit na rozsahu 0 – 10 V a měřený údaj je 5,000 V. Jeho chyba je specifikována následovně: 0,01 % údaje plus 2 kvantovací kroky (0,01%rdg. + 2 digits).

Pro voltmetr je maximální chyba měřené hodnoty

$$m_U = 1 \cdot 10^{-4} \cdot 5 \text{ V} + 2 \cdot 10^{-3} \text{ V} = 2,5 \text{ mV} .$$

Jestliže výrobce neudává informace o přesnosti měřidla, musíme sami chybu měřidla odhadnout. Obvykle chybu m_x odhadujeme tak, že ji položíme rovnu části nejmenšího dílku na stupnici přístroje, kterou jsme schopni ještě rozlišit. Zpravidla to bývá 1/2 nejmenšího dílku nebo celý dílek. Tento způsob určení chyby m_x souvisí s tím, že optimální hodnota nejmenšího dílku stupnice by měla být výrobcem stanovena tak, abychom mohli na stupnici odečítat hodnoty naměřené veličiny v souladu s citlivostí a přesností daného přístroje nebo měřidla. Takto odhadnutou chybu čtení považujeme za největší přípustnou chybu m_x a opět ji používáme k vyjádření systematické chyby a neurčitosti. Hodnoty maximálních chyb pro nejčastěji užívaná měřidla jsou v tab. 1.

Tabulka 1

měřidlo	m_x
váhy praktikantské	(0,01 – 0,1) g
měřítka pásové	(0,5 – 1) mm
měřítka posuvné	0,1 mm
mikrometr	0,01 mm
teploměry	(0,5 – 1) nejmenší dílek

2. Použitá metoda.

Systematická chyba vzniká nepřesností, nedokonalostí nebo nevhodností použitého způsobu měření. Například při vážení na vzduchu vzniká systematická chyba určené hmotnosti jako důsledek nezapočtení různého vztlaku působícího na závaží a vážený předmět, jestliže mají rozdílné objemy. Tyto chyby lze odstranit nebo potlačit buď změnou metody nebo vyloučením chyby výpočtem (oprava na vztlak).

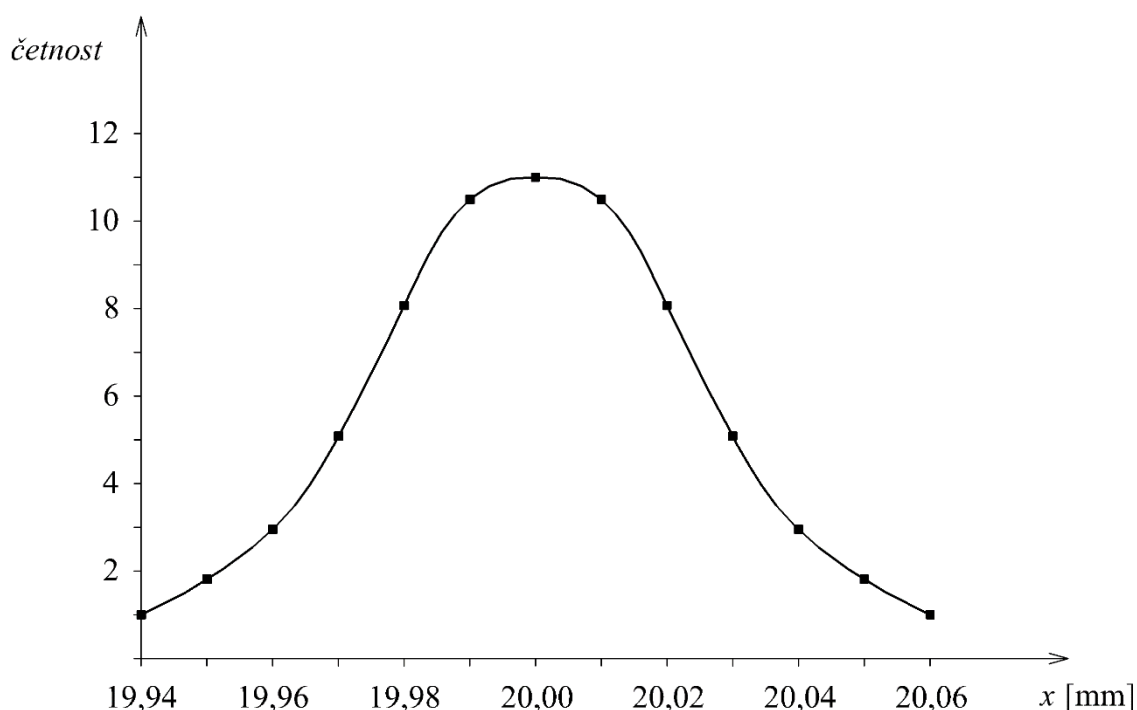
3. Osobní chyby.

Jednotliví pozorovatelé se obvykle dopouštějí chyb, které souvisejí s různou smyslovou koordinací a jsou pro ně charakteristické. Uplatňují se např. při měření časových intervalů, odečtu při zrcátkové metodě apod. Lze je vyloučit tím, že subjektivní měření nahradíme objektivním, např. časový interval měříme místo stopek pomocí čidla spojeného s počítačem. V mnoha případech, zvláště při složitějších měřeních, nelze dostatečně určit a ohodnotit zdroje systematických chyb, které se podílejí na nepřesnosti výsledku, a nelze proto provést přesné ocenění systematických chyb. Vždy se však snažíme alespoň o řádový odhad chyby.

3. NÁHODNÉ CHYBY

Rozhodneme-li se pro opakované měření veličiny X (jednotlivé naměřené hodnoty veličiny X označujeme x_i), např. délky předmětu, a provádíme-li je za stejných podmínek, tj. stejným měřidlem za stejné teploty a tlaku, zjistíme, že výsledky jednotlivých měření se poněkud liší, aniž dovedeme určit přesnou příčinu těchto odchylek. Může to být okamžitá malá změna tlaku nebo teploty, proměnné magnetické pole v místě měření apod. Chyba, která se při měření realizuje, vzniká složením chyb od velkého množství jednotlivých vlivů uplatňujících se během měření. Tyto vlivy nejsou pod naší kontrolou, a proto říkáme, že náhodné chyby jsou způsobeny nekontrolovatelnými vlivy. Chyby opakovaných měření vytvářejí soubor náhodných chyb vykazující určité statistické zákonitosti, které dovolují stanovit vliv náhodných chyb na přesnost měření.

Budeme-li například opakovat měření délky x tyčky stejným mikrometrem v laboratoři, kde během měření kolísala teplota maximálně v rozmezí $2\text{ }^\circ\text{C}$ a provedeme celkem 100 měření, můžeme naměřené hodnoty rozdělit podle velikosti do skupin. Interval mezi hodnotami v jednotlivých skupinách je $0,01\text{ mm}$, což je právě přesnost čtení na mikrometru. Z takto roztríděných hodnot lze sestavit závislost absolutní četnosti naměřených délek v jednotlivých skupinách na naměřené délce a graficky znázornit. Toto rozdělení naměřených hodnot, uvedené na obr. 1, je symetrické a vystihuje jej nejčastěji normální Gaussovo rozdělení veličiny.



Obr. 1

Základní otázkou je, kterou ze souboru naměřených hodnot můžeme považovat za nejsprávnější nebo jakým způsobem nejsprávnější hodnotu veličiny z tohoto souboru hodnot určit. Logicky se nabízí možnost považovat za nejsprávnější tu hodnotu, která se v souboru nejčastěji opakuje. Nazýváme ji nejpravděpodobnější hodnotou a odpovídá jí maximum v normálním Gaussově rozdělení. Z matematického vyjádření tohoto rozdělení lze dokázat, že touto hodnotou je aritmetický průměr ze všech naměřených hodnot x_i . Platí

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}, \quad (3)$$

kde x_i jsou jednotlivé naměřené hodnoty veličiny X a n je počet měření. Protože v uvedeném případě je počet měření $n = 1000$ a ne nekonečně veliký, je získaný soubor naměřených hodnot pouze výběrovým souborem a aritmetický průměr vypočtený podle vztahu (3) je výběrový aritmetický průměr. Čím větší je počet měření, tím více se hodnota aritmetického průměru přiblíží ke skutečné hodnotě veličiny. Další otázkou je, jak jsou jednotlivé naměřené hodnoty x_i rozloženy okolo hodnoty aritmetického průměru \bar{x} . Je zřejmé, že čím přesnějším měřidlem budeme popisované měření délky provádět, tím méně budou naměřené hodnoty rozptýleny kolem hodnoty aritmetického průměru a křivka rozdělení bude štíhlejší.

Míru rozptylu naměřených hodnot x_i kolem aritmetického průměru \bar{x} kvantitativně charakterizuje **směrodatná odchylka s_x jednoho měření** veličiny x , daná vztahem

$$s_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\bar{x} - x_i)^2}{n-1}}. \quad (4)$$

Častěji budeme používat **směrodatnou odchylku aritmetického průměru \bar{x}** , protože opakovaná měření budeme vyhodnocovat pomocí aritmetického průměru. Platí

$$s_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\bar{x} - x_i)^2}{n(n-1)}}. \quad (5)$$

Obě tyto odchylky bychom měli přesněji nazývat **výběrové směrodatné odchylky**, protože soubor měření byl náhodně vybrán ze základního souboru, který představuje nekonečný počet naměřených hodnot. Chceme-li početně stanovit směrodatnou odchylku podle vztahů (4) nebo (5) můžeme s výhodou použít kalkulátory, které umožňují vypočítat ze zadaného souboru hodnot jak aritmetický průměr, tak směrodatnou odchylku s_x , eventuálně $s_{\bar{x}}$.

4. NEJISTOTY MĚŘENÍ

Zatímco chyba charakterizovala rozdíl naměřené hodnoty od skutečné (pravé) hodnoty, **nejistota měření** charakterizuje rozsah (interval) hodnot měřené veličiny kolem výsledku měření, který podle očekávání obsahuje skutečnou hodnotu měřené veličiny. Nejistota se stanoví nejen pro výsledek měření, ale také pro měřidla, použité konstanty, pro korekce apod.

Základem určování nejistot je statistický přístup. Předpokládá se určité rozdělení pravděpodobnosti, které popisuje, jak se mohou naměřené hodnoty veličiny X odchylovat od skutečné hodnoty. Základní charakteristikou nejistoty je **standardní nejistota** označovaná písmenem u (z angl. uncertainty), a její mírou je **směrodatná odchylka udávané hodnoty veličiny**. Standardní nejistota udává rozsah hodnot okolo naměřené (stanovené) hodnoty, ve kterém se s da-

nou pravděpodobností nachází skutečná hodnota. Standardní nejistoty se podle zdrojů, z kterých vznikají (obdobně jako chyby) dělí na standardní nejistoty typu **A** veličiny X a standardní nejistoty typu **B** veličiny X .

Standardní nejistoty typu A veličiny X jsou způsobovány náhodnými vlivy. Stanoví se z opakovaných měření určité hodnoty za stále stejných podmínek na základě statistického přístupu a označují se u_{xA} . Nejistoty typu A se zmenšují se zvětšujícím se počtem opakovaných měření.

Standardní nejistoty typu B jsou způsobovány známými a odhadnutelnými příčinami vzniku. Standardní nejistoty typu B veličiny X se označují u_{xB} . Jejich určení vychází z odhadu systematických chyb naměřených hodnot. Mohou pocházet z různých zdrojů a při určitém měření je výsledná standardní nejistota typu B dána odmocninou ze součtu kvadrátů nejistot od jednotlivých zdrojů s respektováním korelací (vzájemných závislostí) mezi jednotlivými zdroji nejistot. Protože se stanovení nejistot typu A i B provádí na základě stejného přístupu, je možné skládat nejistoty typu A a B. Sumací kvadrátů standardní nejistoty typu A a standardní nejistoty typu B se dostane kvadrát **kombinované standardní nejistoty**. Hodnotí-li se výsledek měření standardní nejistotou, pak se neuvádějí odděleně nejistoty typu A a typu B.

Kombinovaná standardní nejistota u udává interval či rozsah hodnot, ve kterém se s poměrně velkou pravděpodobností může vyskytovat skutečná hodnota veličiny X . V praxi se však často objevuje požadavek na zvýšení pravděpodobnosti (snížení rizika) a toho se dosáhne zvětšením intervalu, který pokrývá nejistota. Proto se zavádí **rozšířená standardní nejistota** U_x , která je dána vztahem

$$U_x = k_U u_x, \quad (6)$$

kde k_U je **koeficient rozšíření** nebo pokrytí. Rozšířená nejistota má být vždy doplněna údajem o velikosti k_U . Velikost k_U se volí 2 až 3. V poslední době se doporučuje volit $k_U = 2$, tj. $U_x = 2u_x$, což odpovídá pravděpodobnosti 95 % pro normální rozdělení.

Standardní nejistotu můžeme vyjadřovat v jednotkách měřené veličiny, pak **hovoříme o absolutní standardní nejistotě**, nebo poměrem absolutní nejistoty a hodnoty příslušné veličiny, který nazýváme **relativní standardní nejistota**. Znaménko \pm se dává před číselnou hodnotu nejistoty v případě, že se připojuje k hodnotě výsledku měření.

5. STANOVENÍ STANDARDNÍCH NEJISTOT PŘI PŘÍMÉM MĚŘENÍ

Podle způsobu určení hodnoty měřené veličiny se dělí měření na

- přímé měření veličiny,
- nepřímé měření veličiny.

Postup při stanovení standardních a rozšířených nejistot se liší podle toho, zda se jedná o přímé nebo nepřímé měření určité veličiny či veličin.

Při přímém měření se neznámá hodnota zjišťuje přímým porovnáním s mírami (jednotkami) měřené veličiny, např. měření délky metrem, měření teploty teploměrem, měření napětí voltmetrem, stanovení hmotnosti pomocí vážení apod.

Měření se provádí buď jednou (při většině technických měření) nebo opakovaně. Při opakovaném měření se vychází se ze série měření provedených při stále stejných podmínkách a získá se n naměřených hodnot. Při jediném měření by měla být zaručena dostatečně malá náhodná chyba, provádí-li se opakované měření, měl by být počet měření nejméně 5.

Stanovení standardní nejistoty při přímém měření. Jestliže opakovaným měřením veličiny X získáme n údajů x_1, \dots, x_n a výsledek měření bude (výběrový) aritmetický průměr daný vztahem (3), je **standardní nejistota typu A** veličiny X rovna výběrové směrodatné odchylce aritmetického průměru

$$u_{xA} = s_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}, \quad (7)$$

kde \bar{x} je výběrový aritmetický průměr.

Pokud je počet opakovaných měření menší než 10 a není možné určit kvalifikovaný odhad na základě zkušenosti, lze standardní nejistotu typu A stanovit přibližně na základě vztahu

$$u_{xA} = k_x s_{\bar{x}}, \quad (8)$$

kde k_x je koeficient, jehož velikost závisí na počtu měření tak, že pro počet $n < 5$ jeho hodnota značně vzrůstá (pro $n = 4$ je jeho hodnota 1,7 a pro $n = 3$ je to již 2,5). Doporučuje se proto volit počet měření větší než 10, v krajním případě větší než 5.

Standardní nejistoty typu B jsou někdy označovány jako systematické nejistoty a v mnoha případech se tak projevují. Jejich určování je založeno jako v případě nejistot typu A na statistickém přístupu. Dříve, než se přistoupí k měření, je třeba najít možné zdroje systematických chyb (nejistot typu B).

Zdroje nejistot typu B při měření (podobně jako systematické chyby) vznikají v důsledku:

- nedokonalosti měřicích přístrojů a měřicí techniky,
- použitých měřicích metod,
- podmínek při měření,
- odečtu naměřené hodnoty (ukazatel naměřené hodnoty se nachází mezi označenými dílky stupnice a jeho polohu určí experimentátor odhadem),
- a dalších vlivů.

Odhad standardních nejistot typu B od jednotlivých zdrojů nejistot Z_i se provádí následujícím způsobem:

- Odhadne se pro každý zdroj nejistoty **maximální rozsah změn** $\pm \Delta z_{\max}$, velikost Δz_{\max} se volí taková, aby její překročení bylo málo pravděpodobné (maximálně přípustná chyba nebo nejmenší dílek stupnice).
- Uváží se, které **rozdělení pravděpodobnosti** nejlépe vystihuje výskyt hodnot v intervalu $\pm \Delta z_{\max}$, aby bylo možné z mezní odchylky Δz_{\max} stanovit směrodatnou odchylku příslušející tomuto typu rozdělení. Je třeba se rozhodnout, jak bude rozdělena pravděpodobnost, se kterou může ovlivňující veličina nabývat jednotlivých hodnot mezi svými krajními mezemi danými $\pm \Delta z_{\max}$. Nejčastěji se předpokládá rovnoměrné rozdě-

lení, pro které je stejná pravděpodobnost výskytu libovolné hodnoty ležící mezi krajními mezemi. V tomto případě je koeficient χ , sloužící k přepočtu mezní hodnoty ovlivňující veličiny na směrodatnou odchylku $\chi = \sqrt{3}$. Normální (Gaussovo) rozdělení se volí tehdy, je-li pravděpodobnost malých odchylek značná a velkých odchylek zanedbatelná a koeficient $\chi = 3$.

- Určí se **nejistoty typu B od jednotlivých zdrojů** Z_i ze vztahu

$$u_{zB} = \frac{\Delta z_{\max}}{\chi}, \quad (9)$$

kde χ udává poměr mezní odchylky ke směrodatné odchylce pro vybraný typ rozdělení. Hodnota χ nabývá obvykle hodnoty $\sqrt{3}$, event. 3.

- Určí se výsledná standardní nejistota typu B podle vztahu

$$u_{xB} = \sqrt{\sum_{j=1}^n A_{x,z_j}^2 u_{z_j}^2}, \quad (10)$$

kde se provádí sčítání přes všechny zdroje nejistot typu B. Odhadnuté nejistoty od jednotlivých zdrojů se ve vztahu (10) násobí koeficienty vypočtenými pomocí funkční závislosti $X = f(Z_1, Z_2, \dots, Z_n)$. Koeficienty A_{x,z_j} (citlivostní koeficienty) se vypočtou z relací

$$A_{x,z_j} = \frac{\partial X}{\partial Z_j}. \quad (11)$$

Pomocí koeficientů A_{x,z_j} (citlivostí) lze převést jednotlivé složky nejistoty typu B na jednotky měřené veličiny.

Vztah (10) platí pouze za určitého předpokladu, tj. tehdy, jestliže není mezi jednotlivými složkami nejistoty vazba (korelace). Naštěstí tento předpoklad je ve většině měření splněn a není proto nutné použít obecnější vzorec pro výpočet výsledné standardní nejistoty typu B, který zahrnuje korelační koeficienty, popisující míru vzájemné vazby jednotlivých vlivů způsobujících nejistoty typu B.

Kombinovaná standardní nejistota u_x se při přímém měření určuje ze vztahu

$$u_x = \sqrt{u_{xA}^2 + u_{xB}^2}. \quad (12)$$

Při dosazování do vztahu (12) je vhodné posoudit, jestli některá složka nejistoty nemá rozhodující význam, a druhou je pak možno zanedbat.

Příklad:

Měření délky l předmětu bylo prováděno mikrometrem 20–krát. Z naměřených hodnot délky byla určena směrodatná odchylka aritmetického průměru $s_{\bar{y}} = 0,01$ mm. Směrodatná odchylka aritmetického průměru je podle vztahu (7) rovna standardní odchylce u_{IA} typu A. Zdrojem nejistoty typu B je pouze omezená přesnost mikrometru, a proto se pro tento případ měření určí z maximální chyby mikrometru, která je 0,01 mm. Předpokládáme symetrické rozložení hodnot měřených mikrometrem v intervalu $\pm 0,01$ mm, a proto podle vztahu (9) je $u_{IB} = \frac{0,01}{\sqrt{3}}$ mm.

Kombinovaná standardní nejistota je podle vztahu (12) $u_l = \sqrt{0,01^2 + \left(\frac{0,01}{\sqrt{3}}\right)^2} = 0,012$ mm.

Obě složky nejistot jsou v tomto případě řádově stejně velké, a proto nemůžeme ani jednu z nich zanedbat.

6. STANOVENÍ STANDARDNÍCH NEJISTOT PŘI NEPŘÍMÉM MĚŘENÍ

Dosud uvedený postup předpokládal provádění přímého měření jedné veličiny s několika ovlivňujícími veličinami jako zdroji nejistot typu B. Předpokládejme nyní, že určujeme hodnotu veličiny na základě vztahu, v kterém vystupuje jedna nebo více přímo měřených veličin a konstanty.

Nechť veličina Y je dána funkční závislostí na jedné nebo několika přímo měřených veličinách X_j a konstantách V_h , které nemají přesné hodnoty. Platí

$$Y = f(X_1, X_2, \dots, X_j, \dots, X_m, V_1, V_2, \dots, V_h, \dots, V_p) .$$

Předpokládejme obecný případ, kdy měření se opakuje n –krát a pro i –té měření se získají hodnoty x_1, \dots, x_m přímo měřených veličin X_1, \dots, X_m . Výslednou hodnotu \bar{y} stanovíme tak, že dosadíme výběrové aritmetické průměry přímo měřených veličin do funkční závislosti. Standardní nejistotu při nepřímém měření lze stanovit stejným obecným postupem, jako v případě přímo měřené veličiny.

Stanovení standardní nejistoty při nepřímém měření veličiny lze shrnout do následujících kroků:

- Stanovíme výběrový aritmetický průměr \bar{y} podle vztahu

$$\bar{y} = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_j, \dots, \bar{x}_m, V_1, V_2, \dots, V_h, \dots, V_p) , \quad (13)$$

kde \bar{x}_j je aritmetický (výběrový) průměr j –té přímo měřené veličiny daný vztahem (3).

- Stanovíme směrodatné odchylky $s_{\bar{x}_j}$ pro jednotlivé opakovaně měřené veličiny X_j podle vztahu (7), které jsou totožné s nejistotami typu A, tj. u_{xA} .
- Výslednou standardní nejistotu u_{yA} typu A určíme na základě nejistot od jednotlivých zdrojů podle vztahu

$$u_{yA} = s_{\bar{y}} = \sqrt{\sum_{j=1}^m A_{y_j}^2 s_{\bar{x}_j}^2} , \quad (14)$$

kde $A_{y_j} = \frac{\partial f(X_1, \dots, X_j, \dots, X_m, V_1, \dots, V_h, \dots, V_p)}{\partial X_j}$ jsou převodní koeficienty, jejichž hod-

noty se vypočítají dosazením hodnot \bar{x}_j a V_h do parciálních derivací, a které převádějí jednotlivé nejistoty do jednotek měřené veličiny. Pro zjednodušení zde předpokládáme, že hodnoty konstant V_h nejsou ovlivněny nejistotami.

- Jestliže neprovádíme opakované měření, první tři body odpadají a hodnotu veličiny Y dostaneme dosazením jednou měřených hodnot veličin X_1, \dots, X_m a nejistotu typu A nepočítáme.
- Určíme všechny zdroje složek nejistoty typu B.
- Pro každý zdroj nejistoty typu B určíme krajní meze, mezi kterými by se měla nacházet jeho skutečná hodnota.
- Pro každý zdroj nejistoty zjistíme předpokládané rozdělení pravděpodobností výskytu jednotlivých hodnot mezi krajními mezemi a podle typu rozdělení jim přiřadíme hodnoty koeficientu ($\chi = 3$ pro normální rozdělení, $\chi = \sqrt{3}$ pro rovnoměrné rozdělení).
- Podle vztahu (9) vypočteme nejistoty typu B od jednotlivých zdrojů.
- Vypočteme výslednou standardní nejistotu u_{yB} typu B podle vztahu

$$u_{yB} = \sqrt{\sum_{j=1}^m A_{x_j}^2 u_{x_jB}^2 + \sum_{h=1}^l A_{V_h}^2 u_{V_hB}^2} , \quad (15)$$

kde $A_{x_j} = \frac{\partial Y}{\partial X_j}$, $A_{V_h} = \frac{\partial Y}{\partial V_h}$ jsou převodní koeficienty určené pomocí parciálních deri-

vací, převádějící nejistoty od jednotlivých zdrojů do jednotek určované veličiny.

- S použitím Gaussova kvadratického zákona šíření nejistot určíme kombinovanou standardní nejistotu u_y

$$u_y = \sqrt{u_{yA}^2 + u_{yB}^2} . \quad (16)$$

- Je-li požadavek na zvýšení pravděpodobnosti (snížení rizika) výskytu skutečné hodnoty v intervalu $\langle (y - U_y), (y + U_y) \rangle$ stanovíme rozšířenou standardní nejistotu U_y , která se zavádí vztahem

$$U_y = k_U u_y , \quad (17)$$

kde k_U je koeficient rozšíření nebo pokrytí. Hodnoty koeficientu se obvykle volí od 2 do 3, většinou se doporučuje volit $k_U = 2$, aby pro normální rozdělení odpovídal pravděpodobnosti pokrytí cca 95 %.

Určování nejistot při nepřímém měření je často zatíženo mnoha dílčími nejistotami různých velikostí. Výpočet je možno zjednodušit zanedbáním řádově menších výrazů (kvadrátů nejistot). Připustíme-li zmenšení pravé strany rovnice (16) o 5 % zanedbáním menší z nejistot, což neovlivní prakticky velikost výsledné nejistoty, bude uvedený požadavek na změnu výsledné nejistoty splněn tehdy, jestliže složka nejistoty, kterou chceme zanedbat, bude menší než 1/3 větší. Při konkrétním výpočtu můžeme tedy zanedbat všechny složky nejistot, pro něž bude platit

$$\sqrt{u_l^2 + u_k^2 + \dots} < \frac{1}{3} u_{i_{\max}} \quad (18)$$

Výpočet nejistot pro jednoduché případy nepřímo měřených veličin.

Předpokládejme, že hodnotu veličiny Y přímo neměříme, ale určujeme ji pomocí jednou měřených hodnot x_1, x_2 dvou nepřímo měřených veličin X_1, X_2 . Známe-li tvar funkční závislosti $Y = f(X_1, X_2)$ a standardní nejistoty přímo měřených veličin u_{x_1B}, u_{x_2B} , lze určit standardní nejistotu u_{yB} pomocí vztahu (10). Nejistota u_{yB} je zároveň kombinovanou nejistotou u_y , vztah (16), protože hodnoty přímo měřených veličin jsou měřeny pouze jednou. Pro kombinovanou nejistotu u_y dostaneme

$$u_y = \sqrt{\left(\frac{\partial Y}{\partial X_1}\right)^2 u_{x_1B}^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial X_2}\right)^2 u_{x_2B}^2} \quad (19)$$

Obecný vzorec (19) pro šíření nejistot lze ve speciálních případech funkčních závislostí nahradit jednoduššími výrazy pro výpočet nejistoty nepřímo měřené veličiny.

Nepřímo měřená veličina je lineární kombinace přímo měřených veličin:

$$Y = f(X_1, X_2) = aX_1 \pm bX_2, \quad (20)$$

kde a, b jsou reálná čísla. Z kvadratického zákona šíření nejistot, vztah (19) vyplývá, že kombinovaná standardní nejistota veličiny Y je

$$u_y = \sqrt{a^2 u_{x_1B}^2 + b^2 u_{x_2B}^2} \quad (21)$$

Pro prostý součet a rozdíl dvou veličin:

$$Y = f(X_1, X_2) = X_1 \pm X_2 \quad (22)$$

se (21) redukuje na následující vztah

$$u_y = \sqrt{u_{x_1B}^2 + u_{x_2B}^2} . \quad (23)$$

V případě, kdy určujeme nejistotu veličiny, která je rovna součtu nebo rozdílu dvou veličin, je její výsledná nejistota rovna odmocnině součtu kvadrátů nejistot přímo měřených veličin. Pro zpřesnění výsledku má smysl zpřesňovat měření té veličiny, jejíž absolutní nejistota je největší.

Příklad:

Určujeme tloušťku stěny dutého válce. Vnější průměr válečku $d_1 = 12,1$ mm , vnitřní průměr $d_2 = 8,1$ mm , rozměry byly změřeny posuvným měřítkem. Chyba údaje posuvného měřítka je pro rozměry stejná, $m_1 = m_2 = 0,1$ mm . Předpokládáme-li, že hodnoty jsou v rozmezí $\pm 0,1$ mm rozloženy rovnoměrně, pak podle vztahu (9)

$$u_{d_1B} = u_{d_2B} = \frac{0,1}{\sqrt{3}} \text{ mm} ,$$

neboť pro rovnoměrné rozdělení hodnot platí, že $\chi = \sqrt{3}$.

Označíme-li tloušťku stěny x , pak pro ni platí $x = \frac{1}{2}(d_1 - d_2)$.

Nejistota určení x je podle vztahu (23) rovna

$$u_x = \sqrt{\frac{1}{4}u_{d_1B}^2 + \frac{1}{4}u_{d_2B}^2} = \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{0,1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{0,1}{\sqrt{3}}\right)^2} = 0,041 \text{ mm} .$$

Tloušťka stěny x je určena s nejistotou 0,041 mm. Kdybychom chtěli zpřesnit měření, je třeba zpřesnit měření obou rozměrů d_1 i d_2 , protože se podílejí na výsledné nejistotě rovným dílem.

Nepřímě měřená veličina je mocnina přímo měřených veličin:

$$y = f(X_1, X_2) = ax_1^m x_2^n , \quad (24)$$

kde a, m, n jsou reálné konstanty. Z obecného vztahu (10) vyplývá, že relativní (poměrná) standardní nejistota typu B veličiny Y je

$$u_{ry} = \sqrt{m^2 u_{rx_1}^2 + n^2 u_{rx_2}^2} . \quad (25)$$

Pro prostý součin nebo podíl dvou veličin X_1, X_2 se výraz (25) redukuje na vztah

$$u_{ry} = \sqrt{u_{rx_1}^2 + u_{rx_2}^2} . \quad (26)$$

V případě, kdy určujeme nejistotu veličiny, která je rovna součinu nebo podílu dvou veličin, je její relativní nejistota rovna odmocnině ze součtu kvadrátů relativních nejistot přímo měřených veličin.

Pro zpřesnění výsledku má smysl zpřesňovat měření té veličiny, jejíž relativní nejistota je největší nebo se ve vztahu (25) vyskytuje ve vyšší mocnině.

Příklad:

Určujeme nejistotu elektrického odporu R spotřebiče pro proud $I = 100$ mA měřeného s maximální chybou $m_I = 0,5$ mA, napětí na spotřebiči $U = 200$ V s maximální chybou $m_U = 5$ V. Předpokládáme, že pro hodnoty napětí a proudu v rozmezí chyb platí normální rozdělení, a proto podle vztahu (9)

$$u_{IB} = \frac{0,5}{3} \text{ mA} = 0,17 \text{ mA}, \quad u_{UB} = \frac{5}{3} \text{ V} = 1,7 \text{ V}$$

a relativní nejistoty jsou

$$u_{rI} = \frac{0,17}{100} = 1,7 \cdot 10^{-3}, \quad u_{rU} = \frac{1,7}{200} = 8,5 \cdot 10^{-3}.$$

Protože elektrický odpor souvisí s proudem I a napětím U vztahem $R = \frac{U}{I}$, platí pro relativní standardní nejistotu typu B elektrického odporu R určeného z jednoho měření proudu a napětí vztah (26).

Při výpočtu jsme využili definiční vztah pro relativní nejistotu. Velikost relativní nejistoty elektrického odporu činí 0,87 %. Z výpočtu vyplývá, že hodnota napětí má pětikrát větší relativní nejistotu než hodnota proudu. Zlepšení přesnosti výsledku by bylo možno dosáhnout např. použitím voltmetru s lepší třídou přesnosti.

7. VÝSLEDEK MĚŘENÍ

Z předchozích odstavců vyplývá, že výsledkem měření je nejen hodnota veličiny, ale současně i její nejistota. Při zpracování měření je třeba dodržet určitý postup, který shrneme do několika bodů.

V případě přímo měřené veličiny:

- K přímo měřené veličině X stanovte nebo alespoň odhadněte zdroje všech systematických chyb a uvažte, jakým rozdělením se budou hodnoty v rámci chyby řídit.
- Vypočtěte standardní nejistotu typu B veličiny X podle vztahu (10).
- Je-li veličina měřena opakovaně, stanovte její aritmetický průměr \bar{x} a směrodatnou odchylku $s_{\bar{x}}$, která je rovna standardní nejistotě u_{xA} .
- Stanovte kombinovanou standardní nejistotu podle vztahu (12).

V případě nepřímo měřené veličiny:

- V případě, že některé veličiny měříte opakovaně, stanovte výběrový aritmetický průměr \bar{y} dosazením aritmetických průměrů jednotlivých přímo měřených veličin X_j podle vztahu (13).
- Stanovte směrodatné odchylky $s_{\bar{x}_j}$ pro jednotlivé opakovaně měřené veličiny X_j podle vztahu (7), které jsou totožné s nejistotami typu A, tj. u_{x_jA} .
- Výslednou standardní nejistotu u_{yA} typu A určete na základě nejistot od jednotlivých zdrojů podle vztahu (14).

Jestliže neprovádíte opakované měření, první tři body odpadají.

- Určete všechny zdroje složek nejistoty typu B přímo měřených veličin a nepřesnosti konstant.
- Pro každý zdroj nejistoty typu B určete krajní meze, mezi kterými by se měla nacházet skutečná hodnota a zjistěte předpokládané rozdělení pravděpodobnosti výskytu jednotlivých hodnot mezi krajními mezemi a podle typu rozdělení jim přiřaďte hodnoty koeficientu χ ($\chi = 3$ pro normální rozdělení, $\chi = \sqrt{3}$ pro rovnoměrné rozdělení). Jestliže si nejste jisti výběrem rozdělení, použijte hodnotu $\chi = \sqrt{3}$.
- Podle vztahu (9) vypočítejte nejistoty typu B od jednotlivých zdrojů.
- Stanovte výslednou standardní nejistotu u_{yB} typu B podle vztahu (15).
- S použitím Gaussova kvadratického zákona šíření nejistot, vztah (16) určete kombinovanou standardní nejistotu u_y .
- Je-li požadavek na zvýšení pravděpodobnosti (snížení rizika) výskytu skutečné hodnoty v intervalu $\langle (y - U_y), (y + U_y) \rangle$ stanovte rozšířenou standardní nejistotu U_y podle vztahu (17).

Zápis výsledku

Obvykle se výsledek měření uvádí ve tvaru

$$y \pm \Delta y, \quad (27)$$

kde y je výsledek měření a Δy je nejistota. Při každém údaji nejistoty musí být jasně uvedeno, o jakou nejistotu se jedná.

Pro standardní nejistoty typu A se uvádí: počet opakovaných měření a výběrové směrodatné odchylky.

Pro standardní nejistoty typu B se uvádí: uvažované zdroje nejistot, výchozí hodnoty a hodnoty vypočítaných nejistot pro jednotlivé zdroje.

Všechny potřebné údaje je vhodné přehledně sestavit do následující tabulky:

veličina	hodnota	maximální rozmezí	pravděpod. rozdělení	citlivostní koeficient	příspěvek k nejistotě

Nejistota ve výsledku se zaokrouhuje nejvýš na dvě cifry, vždy nahoru, a hodnota veličiny se zaokrouhlí tak, aby se řád poslední cifry hodnoty veličiny i nejistoty shodoval.

Příklad:

Měřením byla stanovena vlnová délka světla helium–neonového laseru $\lambda = 632,84 \text{ nm}$ s nejistotou $u_\lambda = 1,29 \text{ nm}$. Nejistotu zaokrouhlíme na dvě platné cifry a tomu přizpůsobíme i poslední cifru hodnoty vlnové délky.

Zápis výsledku měření vlnové délky je $\lambda = (632,8 \pm 1,3) \text{ nm}$.

8. VYROVNÁNÍ FUNKČNÍ ZÁVISLOSTI

Při mnoha technických měřeních vyšetřujeme závislost jedné veličiny na druhé. Měříme proto hodnoty jedné veličiny pro určité hodnoty veličiny druhé. Předpokládejme pro jednoduchost, že veličina y je funkcí pouze jedné veličiny x . Závislost vyjadřujeme zápisem $y = f(x)$ a pro různé hodnoty argumentu x měříme hodnoty y . Provedeme-li taková měření, je výsledkem soubor hodnot x a y , přičemž hodnoty x_1, \dots, x_n nezávisle proměnné veličiny volíme a jim odpovídající hodnoty y_1, \dots, y_n dostaneme jako výsledek měření. Úkolem obvykle bývá určit nebo potvrdit typ závislosti $y = f(x)$, eventuálně určit parametry této závislosti. Chyby naměřených hodnot způsobují, že soubor naměřených hodnot y_1, \dots, y_n nesplňuje funkční závislost zcela přesně, a proto se musíme zabývat problémem, jak co nejlépe proložit naměřené hodnoty očekávanou funkční závislostí. Počet naměřených hodnot přitom nesmí být příliš malý.

Problémem optimálního vyrovnání naměřených hodnot funkční závislosti se zabývá **regresní analýza**. Dále probereme jednu z metod často používaných v regresní analýze, **metodu nejmenších čtverců**.

Metoda nejmenších čtverců (MNČ)

Nejnámější metodou, kterou vyrovnáváme soubor naměřených hodnot y_1, \dots, y_n explicitně vyjádřenou funkční závislostí $y = f(x)$, je MNČ. Tato metoda je početně sice dost náročná, ale bývá součástí softwarového vybavení počítačů i vědeckých kalkulátorů a je k dispozici i ve cvičné laboratoři.

Princip MNČ vyložíme na nejjednodušším případě, kdy naměřené hodnoty y_i odpovídající hodnotám x_i mají ležet na přímce procházející počátkem. Naším úkolem je tedy naměřené hodnoty co nejlépe vyrovnat lineární závislostí $y = ax$ a určit optimální hodnotu parametru a a dále jeho chybu a nejistotu.

MNČ je založena na splnění požadavku, aby součet čtverců odchylek naměřených hodnot y_i pro jednotlivá x_i od vyrovnaných hodnot ax_i , byl minimální. Parametr a přitom určujeme.

Musí tedy platit

$$\sum_{i=1}^n \Delta y_i^2 = \min, \quad (28)$$

kde $\Delta y_i = y_i - ax_i$ a n je počet měření. Pro jednotlivé dvojice hodnot x_i , y_i můžeme tedy Δy_i vyjádřit z rozdílů

$$\begin{aligned}\Delta y_1 &= y_1 - ax_1 \\ \Delta y_2 &= y_2 - ax_2 \\ &\vdots \\ \Delta y_n &= y_n - ax_n\end{aligned}$$

Požadavek minima z rovnice (28) je splněn tehdy, je-li derivace výrazu na levé straně rovnice podle parametru a rovna nule.

$$\frac{\partial \left(\sum_{i=1}^n \Delta y_i^2 \right)}{\partial a} = 0 \quad (29)$$

Dosazením za Δy_i^2 do rovnice (28) dostaneme

$$\begin{aligned}& y_1^2 - 2ax_1y_1 + a^2x_1^2 + \dots + \\ & + y_2^2 - 2ax_2y_2 + a^2x_2^2 + \dots + \\ & + \dots + \\ & + y_n^2 - 2ax_ny_n + a^2x_n^2 + \dots = \min\end{aligned} \quad (30)$$

Provedením derivace levé strany rovnice (29) podle a získáme výraz

$$\begin{aligned}& -2x_1y_1 + 2ax_1^2 - \\ & -2x_2y_2 + 2ax_2^2 - \\ & \vdots \\ & -2x_ny_n + 2ax_n^2\end{aligned}$$

a jeho úpravou dále dostaneme

$$\left(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \right) a - \left(x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n \right) .$$

Tento výraz se podle (29) rovná nule a pro a tedy platí

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2} . \quad (31)$$

V případě obecné přímky typu $y = ax + b$ bychom dostali mnohem komplikovanější výraz pro stanovení minima a hledali bychom dva parametry a , b této funkční závislosti z podmínek pro nulové derivace.

Postupem výpočtu chyb a tedy nejistot a, b typu A se v tomto skriptu nebudeme zabývat, protože jeho numerický výpočet je dosti komplikovaný a bývá součástí softwarového vybavení pro MNČ. Pro výpočet nejistot u_a, u_b parametrů a, b budeme chyby parametrů vyplývající z výpočtu považovat za jejich směrodatné odchylky.

Příklad:

Vyrovnaní přímé úměrnosti metodou nejmenších čtverců. Doba kyvu kyvadla byla měřena stopkami s mezičaselem tak, že měření započalo v čase $t = 0$, dále byl zaznamenáván okamžik průchodu kyvadla rovnovážnou polohou po každém kyvu. Bylo naměřeno celkem 5 hodnot času.

i (pořadové číslo měření)	1	2	3	4	5
t_i (naměřené časy v s)	4,1	7,8	12,0	16,2	19,9

Dále předpokládáme, že doba kyvu se s časem nemění, tj. naměřené hodnoty t_i by měly ležet na přímce $t_i = ai$, kde i odpovídají hodnotám nezávisle proměnné x a t_i hodnotám závisle proměnné y v obecné funkční závislosti $y = ax$.

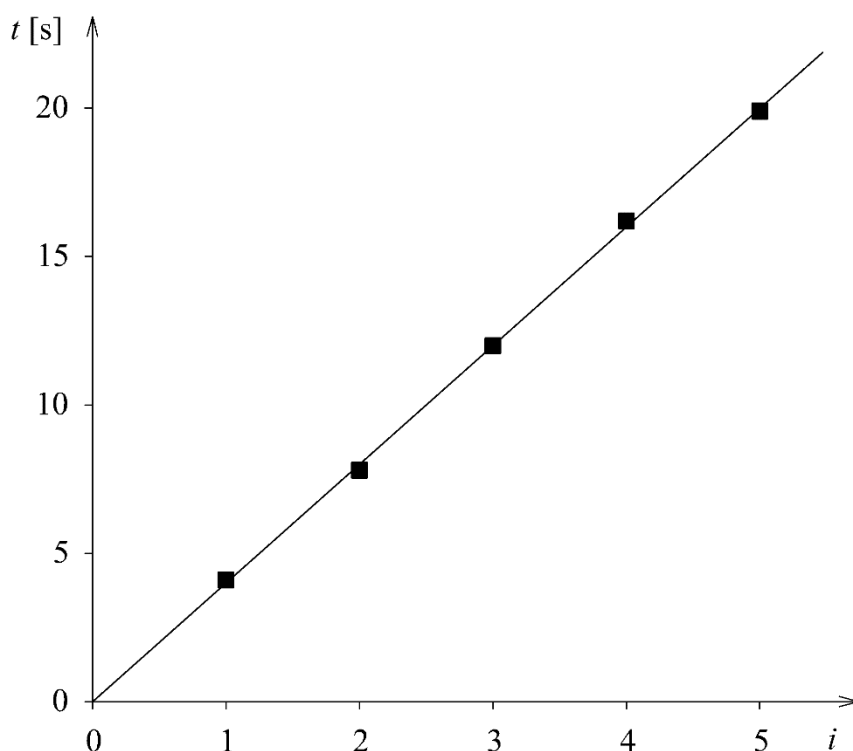
Naměřené hodnoty chceme co nejlépe vyrovnat přímkou jdoucí počátkem. Závislost naměřených a vyrovnaných hodnot času na pořadovém čísle měření je na obr. 2.

Parametr a vypočteme podle vztahu (31)

$$a = \frac{\sum_{i=1}^5 it_i}{\sum_{i=1}^5 i^2} = \frac{60}{15} = 4$$

Na základě vypočteného a , což je zároveň určená doba kyvu $\tau = a = 4$ s, můžeme stanovit vyrovnané hodnoty t_i .

t_i (naměřené časy v s))	4,1	7,8	12,0	16,2	19,9
ai (vyrovnané hodnoty v s)	4	8	12	16	20



Obr. 2

Skupinová metoda

Pro naměřené hodnoty y_i , o kterých předpokládáme, že splňují funkční závislost $y = ax$, je možné provést vyrovnání také skupinovou metodou. Tato metoda je založena na grafické metodě hledání těžiště bodů reprezentující naměřené hodnoty. Předpokládáme, že platí

$$\sum_{i=1}^n (y_i - ax_i) = 0, \text{ tedy } \sum_{i=1}^n y_i = a \sum_{i=1}^n x_i, \text{ kde } n \text{ je počet měření.}$$

Pro a dostaneme vztah

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{\sum_{i=1}^n x_i}. \quad (32)$$

Přitom musíme předpokládat, že všechny body jsou změřeny stejně přesně a přisuzujeme jim stejnou váhu.

Vyrovnání lineární závislosti je samozřejmě jednodušší než vyrovnání obecnějších závislostí. Proto se vždy, pokud je to možné, snažíme převést měřenou funkční závislost na lineární, např. vhodnou matematickou úpravou.

Příklad:

Měříme hodnoty veličiny N vyhovující funkční závislosti typu $N = N_0 \exp(-\mu x)$, a úkolem je z naměřených dvojic x_i, N_i určit hodnotu μ . Závislost převedeme na lineární úpravou do tvaru

$$\ln \frac{N_0}{N} = \mu x,$$

což je již rovnice přímky procházející počátkem, protože pro $x = 0$, je $N = N_0$ a úloha se redukuje na funkční závislost typu $y = ax$, kde $y = \ln \frac{N_0}{N}$ a určovaný parametr $a = \mu$.
