

URČENÍ MOMENTU SETRVAČNOSTI

TEORETICKÝ ÚVOD

Moment setrvačnosti J charakterizuje dynamické vlastnosti tuhého tělesa rotujícího kolem pevné osy. Jeho znalost je potřebná pro sestavení pohybové rovnice rotujícího tělesa. Moment setrvačnosti rovněž určuje kinetickou energii při rotačním pohybu konaném s určitou úhlovou rychlostí. Moment setrvačnosti je proto důležitou veličinou pro výpočet dynamických vlastností strojů.

Moment setrvačnosti J je definován vztahy

$$J = \int_M r^2 dm = \int_V \rho r^2 dV , \quad (1)$$

kde dm je element hmoty tělesa a r je jeho vzdálenost od osy rotace, respektive dV je element objemu tělesa o hustotě ρ . Integraci provádíme přes celou hmotnost M nebo celkový objem V tělesa.

Výpočet momentu setrvačnosti podle vzorce (1) je možný pouze tehdy, jestliže má těleso pravidelný tvar a konstantní hustotu. V případě obecného tělesa není možné vztah (1) použít k analytickému výpočtu a moment setrvačnosti je třeba určit měřením.

URČENÍ MOMENTU SETRVAČNOSTI A MODULU PRUŽNOSTI VE SMYKU DYNAMICKOU METODOU

ÚLOHA č. 7

Způsob měření:

Moment setrvačnosti lze určit výpočtem z definičního vztahu (1) pouze v případě tělesa, které má jednoduchý pravidelný tvar. V obecném případě je možné moment setrvačnosti k ose procházející těžištěm tělesa stanovit např. s pomocí doby kyvu torzních kmitů, které těleso vykonává. V bodě osy, vzhledem k níž moment setrvačnosti určíme, zavěsíme těleso na ocelový drát, tedy osa otáčení splyne s osou drátu. Pro dobu kyvu netlumených torzních kyvů platí

$$\tau = \pi \sqrt{\frac{J}{K}}, \quad (2)$$

kde konstanta K je dána vztahem

$$K = \frac{\pi G r^4}{2l}, \quad (3)$$

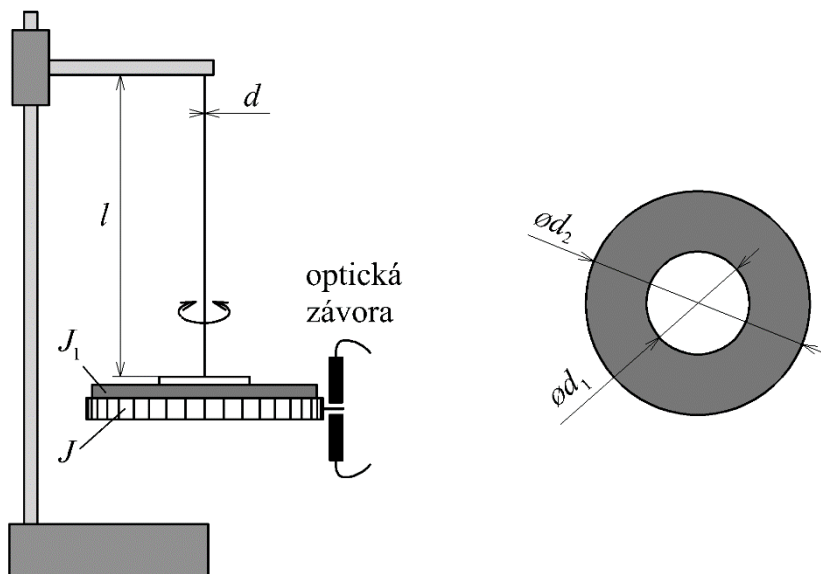
r je poloměr závěsného drátu, l je jeho délka a G je modul pružnosti ve smyku materiálu drátu. Hledaný moment setrvačnosti by bylo možno určit ze vztahu (3), ve kterém se kromě rozměrů drátu vyskytuje také modul ve smyku G . Hodnota G většinou není přesně známa, protože není známé složení materiálu, z kterého je drát vyroben. Proto je výhodnější volit postup, kdy nemusíme počítat s konstantou K .

Známe-li doby kyvu τ, τ' dvou různých soustav, z nichž jedna má neznámý moment setrvačnosti J vzhledem k ose otáčení a druhá $J + J_1$ vzhledem ke stejné ose, pak pro podíl dob kyvů τ, τ' s použitím vztahu (3) platí

$$\frac{\tau}{\tau'} = \sqrt{\frac{J}{J + J_1}}.$$

Tento vztah můžeme přepsat pro J do tvaru

$$J = \frac{J_1}{\left(\frac{\tau'}{\tau}\right)^2 - 1}. \quad (4)$$



Obr. 1

Soustavu s momentem setrvačnosti $J + J_1$ vytvoříme tak, že k tělesu s neznámým momentem setrvačnosti J souměrně s osou drátu připojíme další pomocné těleso, jehož moment setrvačnosti J_1 můžeme určit výpočtem (obr. 1).

Modul ve smyku G materiálu, z něhož je vyroben závěsný drát, určíme na základě znalostí parametrů drátu, momentu setrvačnosti J a doby kyvu τ torzních kmitů pomocí vztahů (2) a (3)

$$G = \frac{2\pi l J}{r^4 \tau^2} . \quad (5)$$

Připomínky k měření a vyhodnocení:

Jako pomocné těleso zvolte kruhový prstenec hmotnosti m_p s vnitřním průměrem d_1 a s vnějším průměrem d_2 . Rozměry pomocného tělesa změřte, hmotnost určete vážením. Moment setrvačnosti vzhledem k ose procházející těžištěm pro těleso tohoto tvaru je dán výrazem

$$J_1 = \frac{1}{8} m_p (d_1^2 + d_2^2) . \quad (6)$$

Doby torzních kmitů měřte jednak ručně metodou opakovaných měření, jednak metodou následných měření pomocí počítače. Pro obě metody vypočtete nejistoty typu A dob kyvů. Nejistotu momentu setrvačnosti J vypočítaného podle vztahu (4) určete podle obecného vztahu pro šíření nejistot, protože opakované měření dob torzních kmitů přispěje k nejistotě typu A, zatímco nepřesné změření rozměrů a hmotnosti přídavného tělesa je zdrojem nejistoty typu B. Pro nejistotu A momentu setrvačnosti dostanete po úpravě výraz

$$u_{JA} = 2J_1 \frac{\tau'}{\tau^2} \frac{1}{\left[\left(\frac{\tau'}{\tau} \right)^2 - 1 \right]^2} \sqrt{\left(\frac{\tau'}{\tau} \right)^2 u_{\tau A}^2 + u_{\tau' A}^2} , \quad (7)$$

kde nejistoty dob kyvů stanovte jako směrodatné odchylky jejich aritmetických průměrů (pro ručně prováděné opakované měření), nebo za ně považujte chybu vyrovnání pomocí MNC (pro měření počítačem).

Do výrazu (7) dosazujte hodnoty τ , τ' naměřené jak metodou následných měření (počítačem) a vyhodnocené metodou nejmenších čtverců, tak metodou opakovaných měření s následným určením směrodatné odchylky.

Na nejistotě typu B momentu setrvačnosti J se jako zdroj nejistoty podílí pouze J_1 , lze psát jednoduše relaci pro relativní nejistoty

$$u_{rJB} = u_{rJ_1B} \cdot \quad (8)$$

Ze zkušenosti můžeme předpokládat, že maximální relativní chyba v určení J_1 je 1,5 %.

Standardní nejistotu modulu pružnosti ve smyku G určete opět podle obecného vztahu pro šíření nejistot, protože je složena z nejistoty typu A (opakované měření doby kyvu, event. průměru drátu) a z nejistoty typu B, kde zdroji nejistot jsou přímo měřené veličiny l , J , r . Aplikací vztahu pro stanovení nejistoty nepřímo měřené veličiny ve tvaru součinu a podílu dostanete pro nejistoty typu A a B výrazy

$$u_{rGA} = \sqrt{16u_{rA}^2 + 4u_{r\tau A}^2 + u_{rJA}^2}$$

$$u_{rGB} = \sqrt{16u_{rB}^2 + u_{rJB}^2 + u_{rJB}^2} \cdot \quad (9)$$

Výslednou nejistotu u_G , eventuálně u_{rG} dostanete potom z nejistot typu A a typu B podle vztahu

$$u_G = \sqrt{u_{GA}^2 + u_{GB}^2}, \text{ event. } u_{rG} = \sqrt{u_{rGA}^2 + u_{rGB}^2} \cdot \quad (10)$$