

# ELASTICKÉ PARAMETRY MATERIÁLU

## TEORETICKÝ ÚVOD

Účinkem vnějších sil mění pevná tělesa svůj tvar a vykazují určité deformace. Mezi nepřilíš velkou působící silou a vzniklou deformací se experimentálně potvrzuje přímá úměrnost. Jestliže na tyč působí síla v její ose, lze tuto úměrnost zapsat ve tvaru

$$\frac{\Delta l}{l} = \text{konst.} \cdot \sigma = \frac{1}{E} \frac{F}{S} = \frac{\sigma}{E}, \quad (1)$$

kde  $\frac{\Delta l}{l}$  je relativní prodloužení tyče délky  $l$  a průřezu  $S$  z izotropního materiálu působením síly velikosti  $F$ ,  $\sigma$  je normálové napětí,  $[\sigma] = \text{Pa}$ ,  $E$  je materiálová konstanta nazývaná **modul pružnosti v tahu (Youngův modul)**,  $[E] = \text{Pa}$ .

Vztah (1) známý jako Hookův zákon platí, pokud napětí  $\sigma$  nepřekročí **mez úměrnosti**, tj. pouze pro malé deformace (relativní prodloužení).

Hookův zákon platí pro namáhání tahem i tlakem. Některé materiály, jako např. litina a beton, vykazují rozdílné chování při namáhání v tahu a tlaku. Je třeba také brát v úvahu, že modul pružnosti v tahu je teplotně závislý. V tab. 1 jsou uvedeny hodnoty modulu pružnosti  $E$  pro některé materiály.

Tabulka 1

materiál	$E$ [Pa]
ocel	$2,1 \cdot 10^{11}$
hliník	$(6,6-6,8) \cdot 10^{10}$
měď	$(1,2-1,3) \cdot 10^{11}$
mosaz	$(1,0-1,7) \cdot 10^{11}$
dural	$7,2 \cdot 10^{10}$

K určení modulu pružnosti materiálu drátů, vláken a tenkých tyčí lze použít přímou metodu, při níž vyvoláváme definované napětí a zjišťujeme vzniklou deformaci. Nejdříve zjistíme počáteční délku tyče  $l_0$  a její průřez  $S$  a dále sledujeme závislost  $\Delta l$  na velikosti působící síly  $F$ . Malé změny průřezu při protažení tyče zanedbáváme.

Chceme-li měřit v oblasti, kde je deformace úměrná napětí, tj. pro relativní prodloužení maximálně 1–2 %, musíme měřit poměrně malé hodnoty prodloužení. Ke stanovení těchto malých změn délky se používají některé speciální metody a zařízení. Protážení tyče může být např. převedeno pákovým systémem na pootočení zrcátka, to je zrcátkovou metodou převedeno na změnu délky. Změnu délky lze rovněž měřit interferometricky nebo jinými přesnými metodami pro určování délkových změn.

Pro měření modulu pružnosti materiálu silnějších tyčí jsou určeny trhací stroje, které dokáží vyvinout dostatečně velká napětí. Nepřímou metodou určení modulu pružnosti v tahu je určení

$E$  z rychlosti šíření podélných akustických vln materiálem. Pro vzorky malých rozměrů je třeba užít ultrazvukové vlny.

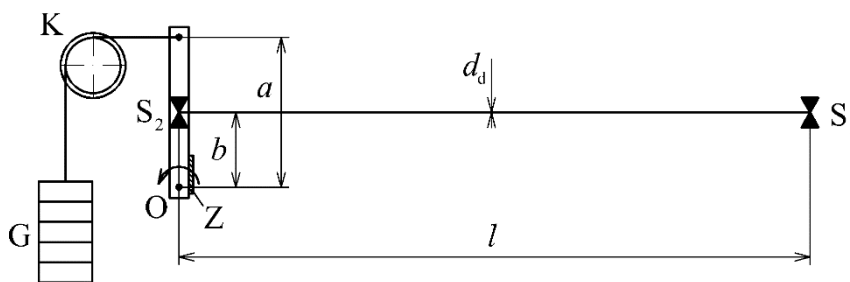
Další v praxi používaná metoda spočívá v určení velikosti průhybu tyče, na kterou působí síla známé velikosti. Jestliže můžeme předpokládat, že při ohybu je tyč namáhána pouze tahem a tlakem, lze ze vztahu mezi silou a velikostí průhybu stanovit modul pružnosti  $E$ . Konkrétní tvar takového vztahu závisí na tvaru průřezu tyče a jejím upevnění. Popsaná metoda se uplatňuje zejména u vzorků většího průřezu.

# STANOVENÍ MODULU PRUŽNOSTI V TAHU

## ÚLOHA č. 10

### Způsob měření:

Schéma měření je na obr. 1. Stanovení modulu pružnosti v tahu vychází z platnosti vztahu (1) pro malá prodloužení. Jeden konec měřeného drátu je svorkou  $S_1$  připevněn k tuhému ocelovému trámci a druhý konec drátu je svorkou  $S_2$  připevněn k otočné páčce  $P$  ve vzdálenosti  $b$  od její osy otáčení  $O$ . Na závěsu  $d$  je zavěšeno závaží  $G$  (tíhy  $G$ ), jehož tíha působí přes kladku  $K$  kolmo na páčku  $P$  ve vzdálenosti  $a$  od její osy otáčení. Při rovnováze na páčce  $P$  bude platit  $Ga = Fb$ , kde  $F$  je velikost síly vyvolané působením tíhy závaží v drátu.



Obr. 1

Síla velikosti  $F$  vyvolá prodloužení drátu  $\Delta l = l - l_0$  a důsledkem je pootočení páčky o úhel  $\Delta\varphi$ , pro který platí s dostatečnou přesností vztah

$$\Delta l = l - l_0 = b\Delta\varphi . \quad (2)$$

Úhel pootočení měříme zrcátkovou metodou. Světelnou stopu značkové lampy po odrazu od zrcátka  $Z$ , které je umístěno v ose  $O$ , zachytíme na stupnici ve vzdálenosti  $R$ . Z principu zrcátkové metody vyplývá, že

$$\Delta l = b \frac{\Delta n}{2R} , \quad (3)$$

kde  $\Delta n = n - n_0$  je posun světelné stopy na stupnici vyvolaný pootočením zrcátka o úhel  $\Delta\varphi$ . Po dosazení do obecného vztahu (1) dostaneme relaci pro určení  $E$

$$E = \frac{2Rl_0a}{Sb^2} \frac{G}{\Delta n} . \quad (4)$$

Měření provádíme tak, že drát nejprve napneme a vyrovnáme pomocí závaží určité tíhy. Odpovídající poloha světelné stopy je  $n_0$ . Potom přidáváme jednotlivá závaží tíhy  $G_i$ , kterým bude odpovídat poloha  $n_i$  světelné stopy na stupnici. Vztah (4) můžeme přepsat do tvaru

$$E = \frac{2Rl_0a}{Sb^2} \frac{1}{K}, \quad (5)$$

kde  $K$  získáme vyhodnocením naměřené závislosti  $n_i = f(G_i)$ . Konstanta  $K$  je směrnici obecné přímky  $n_i = n_0 + KG_i$ .

### **Připomínky k měření a vyhodnocení:**

Nejdříve určete výchozí polohu světelné stopy  $n_0$  na stupnici při vyrovnávajícím závaží, pak postupně přidávejte jednotlivá závaží o tíze  $G_i$  a čtete výchylky  $n_i'$ . Stejný postup zopakujte při odlehčování, čtete výchylky  $n_i''$ . Při výpočtu konstanty  $K$  dosazujte aritmetický průměr odpovídajících hodnot  $n_i'$ ,  $n_i''$ . Konstantu  $K$  z naměřených hodnot stanovte vyrovnáním lineární úměrnosti metodou nejmenších čtverců.

Průměr drátu změřte mikrometrem v několika místech a získané hodnoty zpracujte jako opakované měření průměru drátu.

Nejistotu typu A modulu pružnosti vypočtete podle obecného vztahu pro hromadění nejistot. První člen bude uplatňovat nejistotu průřezu drátu a druhý člen nejistotu konstanty  $K$ .

Relativní nejistotu typu B výsledku stanovte pomocí vztahu pro hromadění nejistot pro případ nepřímo měřené veličiny ve tvaru součinu a podílu přímo měřených veličin, kde nejistoty přímo měřených veličin  $S$ ,  $R$ ,  $l_0$ ,  $a$ ,  $b$  vypočtete z jejich maximálních chyb. Pro relativní standardní nejistotu typu B platí

$$u_{rEB} = \sqrt{u_{rSB}^2 + u_{rRB}^2 + u_{rl_0B}^2 + u_{raB}^2 + 4u_{rbB}^2} \quad (6)$$

Pro výpočet standardní nejistoty modulu  $E$  použijte vztah pro šíření nejistot.

Při výpočtu  $E$  ze vztahu (5) dosaďte za  $a$ ,  $b$  hodnoty uvedené na kartě.