

PŘEDMLUVA

Skriptum Fyzika I je určeno jako studijní pomůcka pro základní kurz fyziky v prvním ročníku Fakulty dopravní ČVUT v Praze. Obsah skripta je přizpůsoben časovému rozsahu předmětu, a proto nemůže být uceleným textem, který by souvislým způsobem řešil problematiku všech kapitol. Autoři se záměrně vyhýbají náročnějšímu matematickému aparátu. Matematická odvození některých vztahů jsou často jen naznačena.

Text skripta je rozdělen do devíti kapitol, které se dále dělí na odstavce. V kapitole 6 je odstavec věnovaný obtékání těles. Tato problematika je do skripta zařazena hlavně s ohledem na výuku studentů leteckých oborů na Fakultě dopravní, ale věříme, že může být přínosem i pro studenty ostatních oborů.

Praha, říjen 2008

Autoři

OBSAH

ÚVOD	5
1. KINEMATIKA	6
1.1 Předmět a rozdělení mechaniky	6
1.2 Poloha hmotného bodu, polohový vektor	6
1.3 Dráha, rychlost, zrychlení	8
1.4 Druhy pohybů	10
1.5 Galileovo pojetí pohybu	16
1.6 Příklady ke kapitole 1	18
2. DYNAMIKA HMOTNÉHO BODU	22
2.1 Newtonovy zákony	22
2.2 Zákon setrvačnosti	22
2.3 Zákon síly	22
2.4 Princip akce a reakce	23
2.5 Aplikace Newtonových zákonů	24
2.6 Pohyb v neinerciální soustavě	28
2.7 Práce a energie	30
2.8 Gravitační pole	31
2.9 Kinetická a potenciální energie v tíhovém poli	33
2.10 Zákon zachování energie	35
2.11 Konzervativní a nekonzervativní síly	37
2.12 Výkon	38
2.13 Příklady ke kapitole 2	38
3. DYNAMIKA SOUSTAVY HMOTNÝCH BODŮ	41
3.1 Střed hmotnosti soustavy hmotných bodů, zákon zachování hybnosti	41
3.2 Srážka dvou částic (hmotných bodů)	43
3.3 Těžišťová soustava	45
3.4 Soustavy s proměnnou hmotností – princip pohybu rakety	46
3.5 Tuhé těleso	48
3.6 Statická rovnováha tuhého tělesa	49
3.7 Těžiště a střed hmotnosti	52
3.8 Dynamika tuhého tělesa. I. věta impulzová	53
3.9 Rotace tuhého tělesa kolem pevné osy. II. věta impulzová	54
3.10 Moment setrvačnosti tuhého tělesa	57
3.11 Kinetická energie tělesa rotujícího kolem pevné osy	59
3.12 Příklady ke kapitole 3	61
4. MECHANIKA KONTINUA	64
4.1 Předmět mechaniky kontinua	64
4.2 Kinematika kontinua	67
4.3 Dynamika kontinua	71
4.4 Objemové síly	76
4.5 Příklady ke kapitole 4	77

5.	VLNĚNÍ	78
5.1	Elastické vlny, vlnová rovnice	78
5.2	Zdroje a vznik vlnění	82
5.3	Vlastnosti vlnění	82
5.4	Dopplerův jev	83
5.5	Interference a princip superpozice	85
5.6	Energie a intenzita harmonických vln	89
5.7	Příklady ke kapitole 5	91
6.	MECHANIKA TEKUTIN	93
6.1	Předmět mechaniky tekutin	93
6.2	Bilance hmotnosti	96
6.3	Bilance hybnosti a energie	99
6.4	Obtékání těles	105
6.5	Povrchové jevy v kapalinách	109
6.6	Teplotní roztažnost kapalin	112
6.7	Viskozita	113
6.8	Příklady ke kapitole 6	114
7.	TERMODYNAMIKA	116
7.1	Stav systému, stavové veličiny	116
7.2	Teplota	117
7.3	Ideální plyn	118
7.4	Stavová rovnice, látkové množství	119
7.5	Kinetická teorie plynů	120
7.6	Rozdělení rychlostí molekul	123
7.7	Van der Waalsova rovnice	125
7.8	Tepelné procesy, přenos tepla	126
7.9	Teplo, práce, tepelná kapacita. První zákon termodynamiky	128
7.10	Tepelné kapacity ideálního plynu	131
7.11	Kvazistatické procesy v ideálních plynech	132
7.12	Druhý zákon termodynamiky. Entropie	136
7.13	Idea chladničky a tepelného čerpadla	141
7.14	Fázové přeměny	142
7.15	Příklady ke kapitole 7	143
8.	ELEKTRICKÉ POLE	146
8.1	Elektrický náboj	146
8.2	Coulombův zákon	146
8.3	Elektrostatické pole	147
8.4	Pohyb bodového náboje v elektrostatickém poli	150
8.5	Elektrický dipól v elektrostatickém poli	151
8.6	Elektrické vodiče	152
8.7	Gaussova elektrostatická věta	154
8.8	Potenciál elektrostatického pole	159
8.9	Poissonova a Laplaceova rovnice	164
8.10	Kapacita	164
8.11	Dielektrika	166
8.12	Energie elektrostatického pole	169
8.13	Příklady ke kapitole 8	171

9.	USTÁLENÝ ELEKTRICKÝ PROUD	174
9.1	Vznik a definice proudu	174
9.2	Ohmův zákon	175
9.3	Elektromotorické napětí	177
9.4	Kirchhoffovy zákony	179
9.5	Práce a výkon v elektrickém obvodu, Jouleův zákon	180
9.6	Kontaktní napětí a termoelektrické jevy v kovech	181
9.7	Vedení elektřiny v kapalinách	184
9.8	Vedení elektřiny v plynech	186
9.9	Příklady ke kapitole 9	186

Úvod

Fyzika jako vědní disciplína slouží k pochopení přírodních jevů, které se vyskytují jak v našem okolí, tak v celém vesmíru. Je založena především na experimentálním pozorování a kvantitativním měření. Ukazuje se, že chování fyzikálních systémů lze vysvětlit konečným počtem fyzikálních zákonů, k jejichž formulování se používá vhodný matematický aparát. Jestliže stávající (dosud platná) fyzikální teorie není schopna vysvětlit určitý fyzikální jev či chování fyzikálního objektu, nebo se ukáže, že její platnost je omezena na určité podmínky, je třeba vytvořit obecnější fyzikální teorii, která lépe vyjadřuje realitu. Tak tomu bylo v případě klasické mechaniky, kde platnost Newtonových pohybových zákonů je omezena na rychlosti objektů malé ve srovnání s rychlostí světla. V tomto ohledu doplnila a zobecnila klasickou mechaniku Einsteinova speciální teorie relativity.

Klasická fyzika se rozvíjela především do začátku 20. století a zahrnuje tři hlavní disciplíny: klasickou mechaniku, termodynamiku a elektromagnetismus. O rozvoj klasické mechaniky se zasloužil Galileo Galilei (1564 – 1622) svou prací o volném pádu těles, kdy poprvé vyslovil zákon pohybu a stanovil, že volný pád různých těles na zemském povrchu probíhá se stejným zrychlením. Přibližně ve stejné době se pohybem nebeských těles zabýval Johannes Kepler (1571 – 1630).

Klasickou mechaniku zformuloval prostřednictvím tří principů ve svém díle nazvaném v českém překladu "Matematické principy přírodní filosofie" publikovaném v roce 1687 Isaack Newton (1642 – 1727).

Nové období ve fyzice, které začalo s nástupem 20. století, se nazývá obvykle moderní fyzika. Vznikala především proto, že klasická fyzika nebyla schopna vysvětlit některé fyzikální jevy. Kvalitativní změny mezi klasickou a moderní fyzikou představuje zejména Einsteinova speciální teorie relativity a kvantová mechanika. Einsteinova speciální teorie relativity přinesla nové pojetí prostoru, času a energie. Kvantová mechanika stanovila limitující možnosti klasické mechaniky vzhledem k mikroobjektům na atomární úrovni a nabídla způsob, jak popsat chování mikroobjektů jinými prostředky než používá klasická mechanika.

1 Kinematika

1.1 Předmět a rozdělení mechaniky

Mechaniku dělíme na kinematiku a dynamiku. Kinematika se zabývá pouze časovým a prostorovým popisem průběhu pohybu, dynamika zkoumá především příčiny pohybu. Podle toho, jakými objekty se mechanika zabývá, dělíme ji na mechaniku:

- **hmotného bodu,**
- **soustavy hmotných bodů,**
- **tuhého tělesa,**
- **kontinua.**

V mechanice hmotného bodu, která je nejjednodušší, se pracuje s takovými objekty, jejichž poloha může být popsána polohou jediného bodu. Nemusí to být vždy jen velmi malý objekt (se zanedbatelnými rozměry), záleží spíše na tom, jaký (z hlediska silového působení a rozměru prostoru, v kterém se objekt pohybuje) problém řešíme. Například pohyb Země po téměř kruhové dráze kolem Slunce je možné popsat jako pohyb hmotného bodu, kterým je těžiště zeměkoule, a zanedbat zcela tvar Země a její rotační pohyb. Při řešení některých astronomických problémů je dokonce možné sluneční systém nebo celou galaxii považovat za hmotný bod.

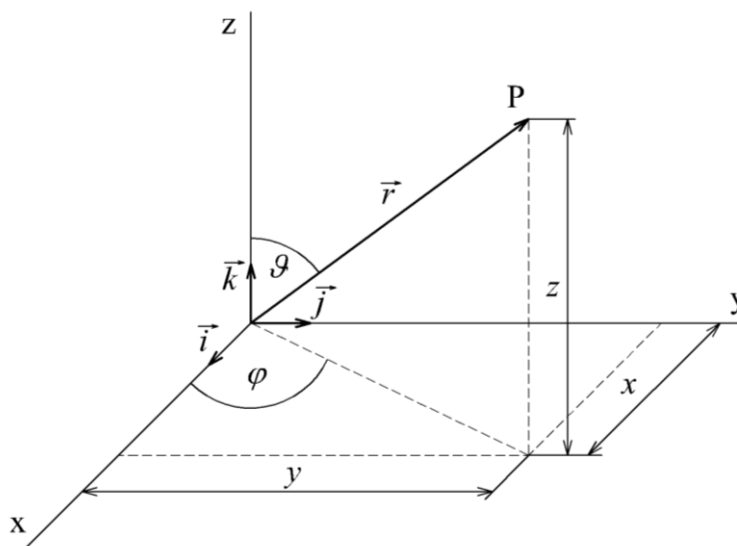
Jestliže se zabýváme vnitřním pohybem nebo vnitřní strukturou vyšetřovaného objektu, nemůžeme již vystačit s pojmem hmotného bodu. Představu hmotného bodu však často využijeme tak, že objekt nahradíme a zkoumáme jako **soustavu hmotných bodů**. Atomové jádro, i když je to útvar se zdánlivě zanedbatelnými rozměry (poloměr jádra je řádově 10^{-15} m), můžeme při studiu jeho struktury považovat za soustavu hmotných bodů (nukleonů). Jakékoliv **tuhé těleso** můžeme popisovat jako **soustavu spojitě rozložených hmotných elementů** ovšem s jistým zjednodušením, či spíše idealizací. Zanedbáváme vliv silového působení na vazby mezi jednotlivými hmotnými elementy, tj. předpokládáme, že se těleso nedeformuje. Na soustavu hmotných elementů můžeme aplikovat poznatky získané pro soustavu hmotných bodů.

Studiem pohybu těles, které se působením sil deformují, se zabývá **mechanika kontinua** (spojitého prostředí). Mechanika kontinua řeší i problémy kapalin a plynů.

1.2 Poloha hmotného bodu, polohový vektor

Polohu hmotného bodu určujeme vždy vzhledem k určitému souřadnicovému (referenčnímu) systému. Za tento systém obvykle volíme pravotočivý pravoúhlý systém určený třemi jednotkovými vektory \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} (obr. 1.1) ve směru os x , y , z . V některých případech (sférická symetrie) je výhodnější pracovat se sférickými souřadnicemi a popisovat polohu hmotného bodu pomocí r , ϑ , φ , obr. 1.1. Praktický význam volby referenčního systému je takový, že polohu hmotného bodu a její změny sledujeme vůči určitému referenčnímu tělesu, a o tomto tělesu budeme pro jednoduchost předpokládat, že se nachází ve stavu klidu. Například pohyb automobilu budeme popisovat vzhledem k určitému místu na zemském povrchu a Zemi přitom

budeme považovat za nehybnou. Podobně bychom mohli řešit pohyb Země vůči Slunci a Slunce považovat za nehybné. Z uvedených příkladů vyplývá, že každý mechanický pohyb je **pohyb relativní**, jedná se vždy o pohyb jednoho tělesa vzhledem k druhému. O žádném hmotném bodu ani tělese nemůžeme říci, že se nachází ve stavu absolutního klidu nebo absolutního pohybu.



Obr. 1.1

Uvažujme nyní, že se **hmotný bod P** o souřadnicích x, y, z (obr. 1.1) **pohybuje**, tzn. mění se jeho poloha v prostoru. Poloha hmotného bodu je pak v dané soustavě souřadnic určena **polohovým vektorem** \vec{r} . V pravoúhlé soustavě souřadnic vyjádříme polohový vektor ve tvaru

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \quad (1.1)$$

kde pro velikost vektoru \vec{r} platí $r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Kartézské souřadnice x, y, z jsou svázány se sférickými souřadnicemi r, ϑ, φ relacemi

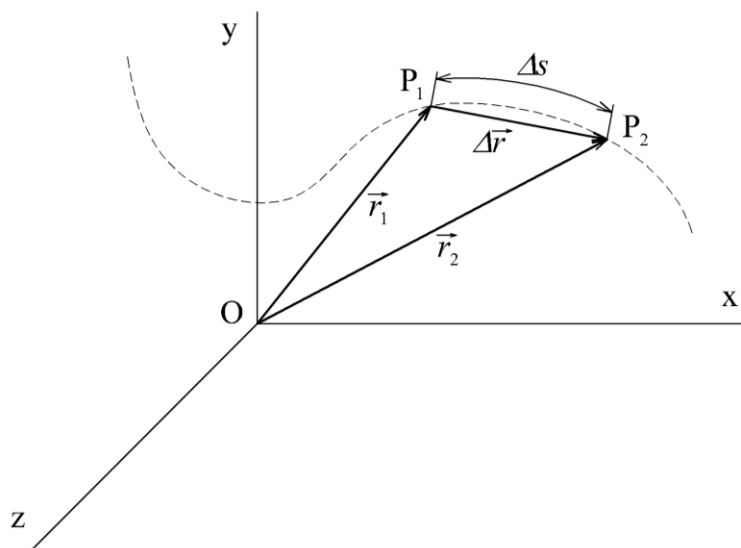
$$x = r \sin \vartheta \cos \varphi$$

$$y = r \sin \vartheta \sin \varphi$$

$$z = r \cos \vartheta$$

$$r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} ; \quad \operatorname{tg} \vartheta = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} ; \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x} .$$

Předpokládejme, že hmotný bod koná pohyb a změni svoji polohu z bodu P_1 do bodu P_2 (obr. 1.2), kde P_1 je poloha hmotného bodu v čase t_1 a P_2 poloha v čase t_2 .



Obr. 1.2

Polohový vektor se změní z \vec{r}_1 na \vec{r}_2 . Pohyb hmotného bodu lze tedy popisovat jako změnu polohového vektoru v čase

$$\vec{r} = \vec{r}(t) . \quad (1.2)$$

Jedinou vektorovou rovnicí (1.2) můžeme psát jako tři skalární rovnice pro souřadnice x , y , z

$$\begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \\ z &= z(t) . \end{aligned} \quad (1.3)$$

Je-li znám průběh závislosti (1.2) polohového vektoru na čase nebo průběh závislosti (1.3), je pohyb hmotného bodu vzhledem k referenčnímu systému zcela určen. Pro určení polohy volného hmotného bodu obecně v prostoru je třeba znát tři údaje (souřadnice), a proto říkáme, že hmotný bod má tři **stupně volnosti**. Avšak pohyb hmotného bodu může být omezen. Omezení pohybu se nazývá **vazba**. **Vazba** je jistá podmínka, která zužuje možnost pohybu hmotného bodu jen na určitou plochu nebo křivku. Matematicky se vazba vyjadřuje právě rovnicí této plochy nebo křivky. Je-li tedy pohyb hmotného bodu nějak omezen, například je silově vázán k dalšímu bodu, počet stupňů volnosti se zmenšuje. Pohybuje-li se hmotný bod v rovině, má 2 stupně volnosti, pohybuje-li se po křivce, má 1 stupeň volnosti.

1.3 Dráha, rychlost, zrychlení

Hmotný bod při svém pohybu spojitě mění svoji polohu. Tento jeho pohyb jsme charakterizovali polohovým vektorem \vec{r} , určeným rovnicemi (1.3), nebo popsáním jedinou vektorovou rovnicí (1.2), kde parametrem je čas. Koncový bod vektoru \vec{r} opisuje křivku, kterou nazýváme **trajektorie** pohybu. Délku trajektorie nazýváme **dráha** pohybu hmotného bodu. Při změ-

ně polohy hmotného bodu z P_1 do P_2 se změní polohový vektor o $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$, obr. 1.2. Skutečná délka trajektorie Δs , kterou hmotný bod mezi P_1 a P_2 urazí, není však totožná s $|\Delta\vec{r}|$. Platí

$$\Delta s \geq |\Delta\vec{r}|. \quad (1.4)$$

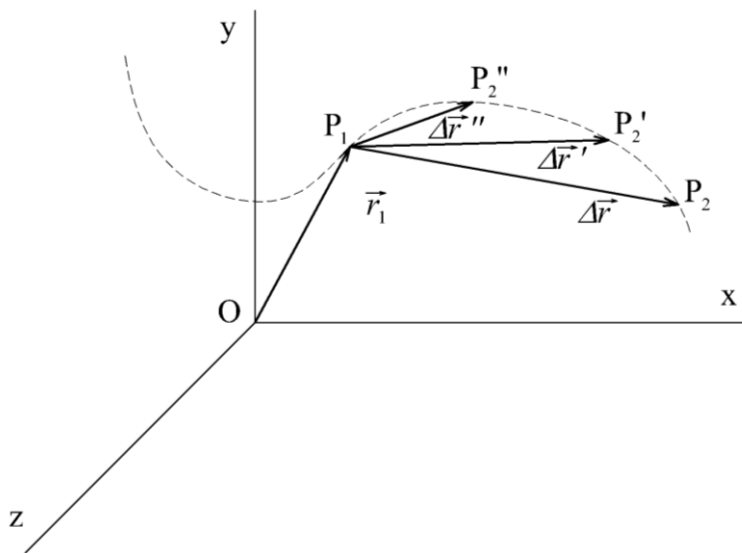
Definujeme-li střední rychlost pomocí změny polohového vektoru vztahem

$$\vec{v} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}, \quad (1.5)$$

je zřejmé, že stanovená hodnota střední rychlosti nevystihuje skutečnost (s výjimkou přímočarého pohybu, pro který platí $s = |\Delta\vec{r}|$). Budeme-li však zmenšovat časový interval Δt (obr. 1.3), bude se $\Delta\vec{r}$ svou velikostí čím dál víc blížit ke skutečnému přírůstku délky dráhy a v limitním přiblížení bude směr $\Delta\vec{r}$ totožný s tečnou v daném bodě. Rychlost \vec{v} definovaná vztahem

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad (1.6)$$

se nazývá **okamžitá rychlost** a je obecně funkcí času, $\vec{v} = \vec{v}(t)$. Její velikost je rovna derivaci dráhy podle času a její směr je totožný se směrem tečny k trajektorii v daném bodě. Fyzikální rozměr rychlosti je $[v] = \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$.



Obr. 1.3

Podobně jako polohový vektor \vec{r} , vztah (1.1), můžeme i vektor okamžité rychlosti \vec{v} rozepsat do složek

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}. \quad (1.7)$$

S použitím vztahu (1.1) a (1.6) lze jednotlivé složky rychlosti vyjádřit jako

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}. \quad (1.8)$$

Velikost vektoru \vec{v} můžeme určit z velikosti jeho složek s použitím vztahu pro stanovení velikosti vektoru: $|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$.

Střední (průměrné) zrychlení je podobně jako střední rychlost definované jako změna vektoru okamžité rychlosti $\Delta\vec{v}$ za časový interval Δt . Platí vztah

$$\vec{a} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{\Delta t}. \quad (1.9)$$

Okamžité zrychlení \vec{a} je definováno vztahem

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (1.10)$$

a pro jeho složky platí

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}; \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}; \quad a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}. \quad (1.11)$$

Velikost vektoru okamžitého zrychlení \vec{a} lze opět stanovit pomocí jeho složek s použitím vztahu pro velikost vektoru $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$. Fyzikální rozměr $[a] = \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$.

Vektor \vec{a} i jeho složky mohou být funkcí času. Je třeba poznamenat, že rychlost může měnit svou velikost nebo směr, anebo obojí. Ve všech vyjmenovaných případech bude hmotný bod konat pohyb s nenulovým zrychlením. Příklad, kdy okamžitá rychlost nebude měnit svoji velikost, ale pouze směr, odpovídá křivočarému pohybu s konstantní velikostí rychlosti, například rovnoměrnému kruhovému pohybu. Ukážeme, že takovému pohybu přísluší nenulové, tzv. **dostředivé zrychlení**.

1.4 Druhy pohybů

V předchozích vztazích jsme naznačili, jak ze známého průběhu dráhy hmotného bodu v závislosti na čase je možné určit jeho rychlost, případně zrychlení. Známe-li naopak zrychlení hmotného bodu, můžeme určit rychlost, tvar a velikost trajektorie v kterémkoliv okamžiku pomocí integrace a s použitím **počátečních podmínek**, tj. údajů o pohybovém stavu tělesa v čase t_0 .

Přímočarý pohyb hmotného bodu

Při přímočarém pohybu je trajektorii pohybu přímka, směr rychlosti i zrychlení nezávisí na čase. Můžeme vždy zvolit souřadnicová soustavu tak, aby jedna osa (např. osa x) splývala s trajektorií pohybu. Potom v této soustavě můžeme vyjádřit vektory $\vec{r} = (x, 0, 0)$, $\vec{v} = (v_x, 0, 0)$, $\vec{a} = (a_x, 0, 0)$. S použitím vztahů (1.8) a (1.11) lze zapsat změnu rychlosti a polohy hmotného bodu pomocí relací

$$\begin{aligned} dv_x &= a_x dt \\ dx &= v_x dt \end{aligned} \quad (1.12)$$

Provedením integrace těchto rovnic dostaneme vztahy pro v_x a x . Přímočarý pohyb hmotného bodu můžeme dělit na

- pohyb **rovnoměrný** přímočarý,

$$a_x = 0, \quad v_x = v_0 = \text{konst.}, \quad x = \int v_x dt + C_1 = v_x t + x_0, \quad (1.13)$$

kde x_0 je dráha hmotného bodu v čase t_0 ,

- pohyb přímočarý **rovnoměrně zrychlený**

$$a_x = \text{konst.}, \quad v_x = \int a_x dt + C_1 = a_x t + v_0, \quad x = \int v_x dt + C_2 = \frac{1}{2} a_x t^2 + v_0 t + x_0, \quad (1.14)$$

kde x_0 je dráha a v_0 je velikost rychlosti hmotného bodu v čase t_0 . (Podrobnější návod k určení integračních konstant z obecných počátečních podmínek lze nalézt v příkladech na konci kapitoly.)

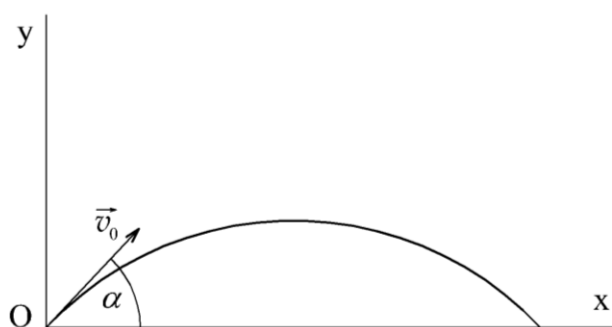
Pohyb přímočarý rovnoměrně zrychlený je například **svislý vrh**. Pohyb se koná ve směru osy y s počáteční rychlostí \vec{v}_0 , která má směr svisle nahoru. Za zrychlení dosadíme tíhové zrychlení $\vec{a} = -\vec{g}$. Znaménko $(-)$ vyjadřuje, že \vec{g} míří proti směru osy y , číselná hodnota \vec{g} je na povrchu Země přibližně rovna $9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$.

- pohyb přímočarý **nerovnoměrný** $a = |\vec{a}| \neq \text{konst.}$

Příkladem nerovnoměrného přímočarého pohybu je pohyb harmonický, při kterém $a = a(t)$, tj. a je funkcí času.

Šikmý vrh

Stejný způsob řešení je možné použít i pro obecný případ, kdy objekt, například projektil, je vystřelen do prostoru šikmo vzhůru v rovině xy (obr. 1.4.) s počáteční rychlostí \vec{v}_0 .



Obr. 1.4

Rychlost v tomto případě rozložíme do směru osy x a y a namísto jedné rovnice (1.12) řešíme rovnice dvě. Okamžitá rychlost ve směru osy x bude rychlost rovnoměrného pohybu a rychlost ve směru osy y bude jako v případě svislého vrhu rychlost rovnoměrně zrychleného pohybu se zrychlením $(-g)$. Z obr. 1.4 vyplývají vztahy pro složky rychlosti

$$v_x = v_0 \cos \alpha, \quad v_y = v_0 \sin \alpha - gt$$

$$x = \int_0^t v_x dt = v_0 t \cos \alpha, \quad y = \int_0^t v_y dt = v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2 .$$

Kinematicky šikmý vrh představuje superpozici (složení) dvou jednoduchých pohybů: pohybu rovnoměrného přímočarého ve směru osy x a svislého vrhu ve směru osy y . Jeho trajektorii ve vakuu je část paraboly. **Tento závěr o superpozici pohybů je možné zobecnit pro jakýkoliv složitější pohyb, protože vyplývá z vektorové povahy kinematických veličin.**

Rovnice (1.12) až rovnice (1.14) jsou použitelné i pro případy, kdy se jedná o obecný přímočarý pohyb v prostoru. V tomto případě řešíme vždy tři rovnice (pro jednotlivé složky vektorů) pro rychlost a dráhu.

Křivočarý pohyb hmotného bodu

Při křivočarém pohybu je trajektorii obecná křivka, směr rychlosti i zrychlení se mění v závislosti na čase. Příkladem křivočarého pohybu je pohyb **kruhový**.

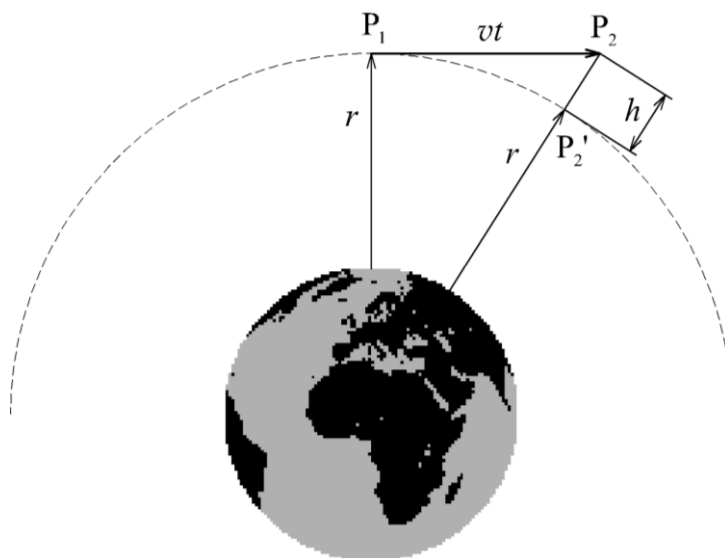
Kruhový pohyb

Hmotný bod pohybující se po kruhové nebo téměř kruhové dráze se jako kinematický problém vyskytuje poměrně často. Můžeme se s ním setkat například při popisu pohybu družice kolem Země nebo i pohybu Země kolem Slunce. Z fyzikálního hlediska přináší zajímavé poznatky o kinematických veličinách.

Předpokládejme, že hmotný bod se pohybuje po kružnici s rychlostí konstantní velikosti. Jedná se tedy o pohyb rovnoměrný kruhový. Vektor zrychlení pohybu však nebude nulový, protože zrychlení, jak plyne z (1.10), je definováno jako časová derivace **vektoru** rychlosti.

Vektor rychlosti mění svůj směr podél kruhové dráhy a této změně směru odpovídá určité zrychlení. Dokážeme, že míří stále do středu kružnice a má konstantní velikost.

Na obr. 1.5 je znázorněna družice obíhající po kruhové dráze kolem Země. Po kinematické stránce (nepátráme po důvodech pohybu) družice koná pohyb, složený z pohybu ve směru tečny k trajektorii s rychlostí \vec{v} a zrychleného pohybu směrem do středu Země se zrychlením \vec{a} , které se pokusíme stanovit. Na obr. 1.5 je znázorněna jak délka trajektorie rovnoměrného pohybu družice z bodu P_1 do bodu P_2 ve směru tečny, tak dráha "pádu" za čas t (označena písmenem h). Jestliže čas t je dostatečně malý, pak h je mnohem menší než poloměr trajektorie družice r a body P_2 a P'_2 leží téměř na přímce.



Obr. 1.5

Hodnotu h můžeme vypočítat z pravoúhlého trojúhelníku na obr. 1.5

$$(r+h)^2 = (vt)^2 + r^2 \Rightarrow r^2 + 2hr + h^2 = v^2t^2 + r^2$$

$$h(2r+h) = v^2t^2$$

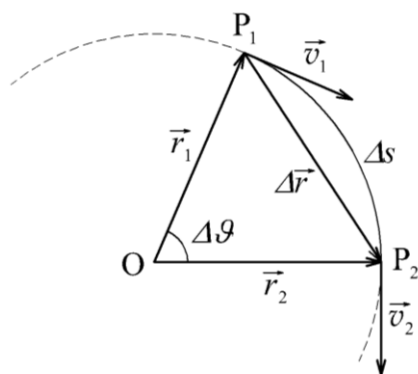
a po zanedbání členu h oproti $2r$ dostaneme výsledný vztah pro h

$$h = \frac{v^2t^2}{2r} . \quad (1.15)$$

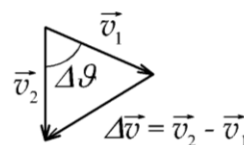
Formálně se tento vztah shoduje se vztahem pro dráhu rovnoměrně zrychleného pohybu ($s = \frac{1}{2}at^2$), jestliže položíme velikost zrychlení rovnu výrazu

$$a = \frac{v^2}{r} . \quad (1.16)$$

Ukážeme, že zrychlení míří do středu dráhy. Tento druh zrychlení, **dostředivé zrychlení**, vzniká při každém kruhovém pohybu s konstantní rychlostí i proměnnou rychlostí. Na obr. 1.6 je znázorněn vektor rychlosti \vec{v} hmotného bodu v bodě P_1 , který je kolmý k průvodiči \vec{r}_1 hmotného bodu. Za krátký časový okamžik Δt změní hmotný bod svoji polohu do bodu P_2 s polohovým vektorem \vec{r}_2 a vektorem rychlosti \vec{v}_2 . Jestliže časový interval bude velmi krátký, bude $|\Delta\vec{r}|$ téměř rovno délce oblouku Δs . Pro $\Delta t \rightarrow 0$ se přiblíží směr vektoru změny rychlosti $\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$ směru kolmému k vektoru rychlosti, což je zároveň směr do středu kružnice.



Obr. 1.6 a



Obr. 1.6 b

Z podobnosti trojúhelníků na obr. 1.6 a a 1.6 b můžeme psát pro přírůstek úhlu vztah

$$\Delta\varphi = \frac{\Delta s}{r} = \frac{|\Delta\vec{v}|}{v}.$$

Za vzdálenost Δs můžeme dosadit $\Delta s = v\Delta t$ a dostáváme

$$\frac{v\Delta t}{r} = \frac{|\Delta\vec{v}|}{v},$$

$$\frac{|\Delta\vec{v}|}{\Delta t} = \frac{v^2}{r}, \quad (1.17)$$

kde $\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$ v limitním přechodu pro $\Delta t \rightarrow 0$ má význam velikosti vektoru **dostředivého** (normálového) zrychlení.

Obecný kruhový pohyb

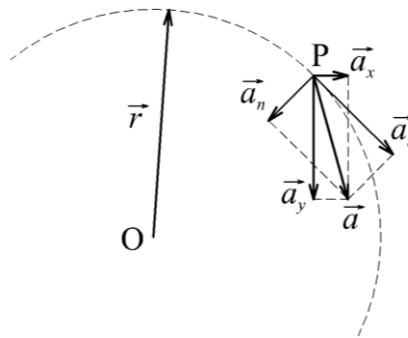
Jestliže se hmotný bod P pohybuje po kruhové dráze a velikost jeho rychlosti v se s časem mění (například se zrychluje), objeví se spolu s dostředivým zrychlením i **tečné zrychlení** \vec{a}_t

o velikosti $\frac{dv}{dt}$. Okamžité zrychlení lze, jak vyplývá i z obr. 1.7, vyjádřit jako součet vektorů tečného a normálového zrychlení

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}_t + \vec{a}_n . \quad (1.18)$$

Pro velikosti zrychlení platí

$$a_t = |\vec{a}_t| = \frac{dv}{dt}; \quad a_n = |\vec{a}_n| = \frac{v^2}{r}; \quad a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} . \quad (1.19)$$



Obr. 1.7

Často je účelné popisovat kruhový pohyb kromě vektoru okamžité rychlosti \vec{v} ještě **úhlovou rychlostí** $\vec{\omega}$, jejíž velikost je definovaná vztahem

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} , \quad (1.20)$$

kde $d\varphi$ udává úhlovou změnu polohy průvodiče hmotného bodu za čas dt .

Rozměr $[\omega] = s^{-1}$. Za úhel φ můžeme do vztahu (1.20) dosadit pomocí délky s oblouku a poloměru r kruhové dráhy.

$$\omega = \frac{d}{dt} \left(\frac{s}{r} \right) = \frac{1}{r} \frac{ds}{dt} = \frac{v}{r} . \quad (1.21)$$

Vedle okamžitého zrychlení můžeme pomocí **úhlové rychlosti** definovat úhlové zrychlení, jehož velikost stanovíme z úhlové rychlosti vztahem

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} . \quad (1.22)$$

Rozměr $[\varepsilon] = s^{-2}$.

Veličinám úhlová rychlost a úhlové zrychlení musíme stejně jako rychlosti \vec{v} a zrychlení \vec{a} přiřadit směr. Jsou to vektorové veličiny. Vzájemný vztah mezi \vec{v} , $\vec{\omega}$, \vec{r} je dán rovnicí

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} . \quad (1.23)$$

Vektor úhlové rychlosti $\vec{\omega}$ je kolmý na rovinu vektorů \vec{r} , \vec{v} .

Pro rovnoměrný kruhový pohyb definujeme obvykle ještě veličiny

- **doba oběhu** T

$$\omega = \frac{2\pi}{T}, \quad [T] = \text{s}, \quad (1.24)$$

- **frekvence** f

$$f = \frac{1}{T}, \quad [f] = \text{s}^{-1}. \quad (1.25)$$

Pokud zobecníme rovnice odvozené pro kruhový pohyb na obecný křivočarý pohyb, můžeme ho pak rozdělit na

- **pohyb rovnoměrný křivočarý**

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \vec{a}_n, \quad \vec{a}_t = \vec{0} \\ a &= |\vec{a}_n| = \frac{v^2}{\rho} \\ v &= |\vec{v}| = v_0 = \text{konst.}, \quad \vec{v} \neq \overline{\text{konst.}} \end{aligned}$$

kde ρ je poloměr křivosti křivky vyjadřující trajektorii pohybu. Pro přímku je $\rho \rightarrow \infty$, a tedy $a_n = 0$. Pro přímočaré pohyby se proto může měnit jen velikost rychlosti, ne její směr.

- **pohyb rovnoměrně zrychlený křivočarý**

$$\begin{aligned} a &= |\vec{a}| = \sqrt{|\vec{a}_n|^2 + |\vec{a}_t|^2} = \text{konst.}, \quad \vec{a} \neq \overline{\text{konst.}} \\ v &= |\vec{v}| \neq \text{konst.}, \quad \vec{v} \neq \overline{\text{konst.}} \end{aligned}$$

Jestliže je i $a = a(t)$ funkcí času, jedná se o pohyb křivočarý **nerovnoměrně zrychlený**.

1.5 Galileiovo pojetí pohybu

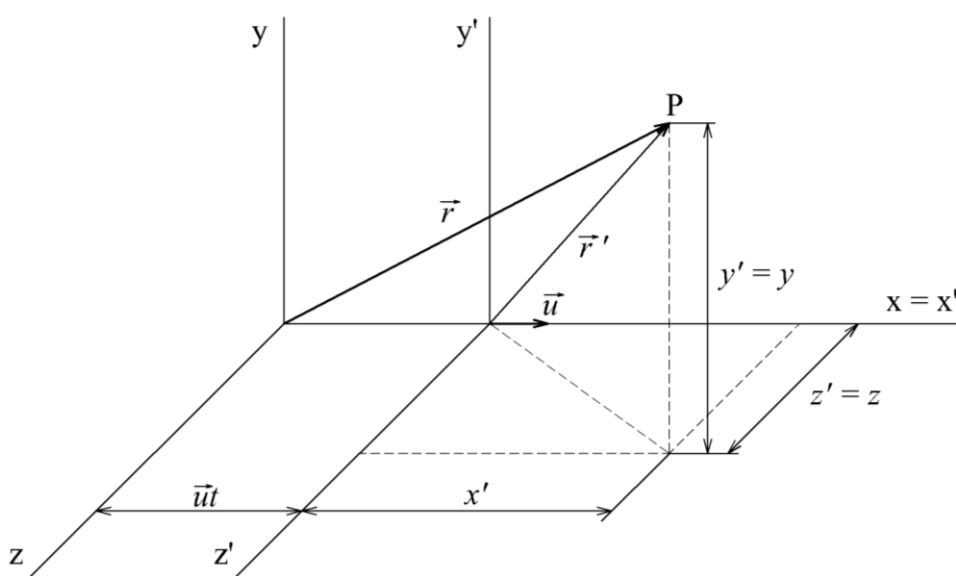
Jak jsme ukázali, pohyb hmotného bodu je vždy vztažen k určité referenční soustavě. Jestliže se hmotný bod současně pohybuje vůči dvěma objektům s různou velikostí a směrem rychlosti (např. družice vzhledem k Zemi a Slunci), vzniká otázka, který referenční systém je lepší či správnější.

Předpokládejme pro jednoduchost souřadnicový systém označený jako S pevně spojený se Zemí (nečárkovaný) a druhý S' (čárkovaný) pevně spojený s hmotným bodem, který se pohybuje konstantní rychlostí \vec{u} v kladném směru osy x (obr. 1.8) vzhledem k původnímu systému. Jestliže v okamžiku $t = 0$ byly počátky obou soustav totožné, pak v kterémkoliv dalším okamžiku platí pro polohu hmotného bodu P určenou v systému S polohovým vektorem \vec{r}

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{u}t \quad (1.26)$$

a pro jednotlivé složky

$$\begin{aligned} x &= x' + |\vec{u}|t \\ y &= y' \\ z &= z' \end{aligned} \quad (1.27)$$



Obr. 1.8

Derivací vztahu (1.26) můžeme dospět ke vztahu mezi rychlostmi hmotného bodu v systému S a S'. Platí, že

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{u} \quad (1.28)$$

Hmotný bod se může pohybovat zrychleně. Změnu rychlosti za určitý časový interval Δt můžeme obecně vyjádřit relací

$$\vec{v} + \Delta\vec{v} = \vec{v}' + \Delta\vec{v}' + \vec{u} \quad (1.29)$$

S použitím vztahu pro skládání rychlostí (1.28) a s použitím definičního vztahu pro okamžité zrychlení dostaneme rovnost

$$\vec{a} = \vec{a}' \quad (1.30)$$

kteřá platí též pro všechny složky zrychlení.

Je důležité si uvědomit, že vztah pro zrychlení platí za předpokladu, že $t = t'$. Tento předpoklad je jedním ze základních axiomů Newtonovy klasické mechaniky. Transformační vztahy (1.26), (1.27) a (1.28) jsou známé jako **Galileiova transformace** souřadnic a **Galileiův vztah pro skládání rychlostí**. Kromě těchto transformací, které jsou pevně spjaty s klasickou mechanikou, existuje ještě **Lorentzova transformace** souřadnic a z nich vyplývající zcela jiný vztah pro skládání rychlostí. Lorentzova transformace a z ní vyplývající důsledky se uplatňují, jestliže se jeden systém vzhledem k druhému pohybuje rychlostí blízkou se k rychlosti světla ($3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$).

Podle Galileiova kinematického principu relativity platí, jestliže měření času není ovlivňováno pohybem (tj. čas je absolutní), že zrychlení hmotného bodu vzhledem ke všem referenčním systémům pohybujícím se vzhledem k sobě rovnoměrně přímočaře je co do velikosti i směru stejné. Takové soustavy nazýváme **setrvačné (inerciální)** a tyto soustavy mají zásadní význam v Newtonově klasické mechanice.

1.6 Příklady ke kap. 1

Příklad 1.1

Kulečnicková koule, kterou považujeme za hmotný bod, se pohybuje v rovině xy . Složky její rychlosti jsou popsány následujícími výrazy: $v_x(t) = 1t^2 - 4t - 5$, $v_y(t) = 6t + 1$ a jsou v jednotkách SI soustavy.

Vypočítejte:

- rychlost koule v čase $t = 10 \text{ s}$,
- zrychlení koule v čase $t = 10 \text{ s}$,
- závislost polohy koule na čase,
- polohu koule v čase $t = 1 \text{ s}$.

Řešení:

a) Po dosazení času do vztahů pro $v_x(t)$ a $v_y(t)$ dostaneme

$$v_x = 100 - 40 - 5 = 55 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}, \quad v_y = 60 + 1 = 61 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

a pro celkovou velikost rychlosti ze vztahu $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{55^2 + 61^2} = 82,13 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

b) Pro velikosti složek zrychlení platí vztahy $a_x(t) = \frac{dv_x}{dt} = 2t - 4$, $a_y(t) = \frac{dv_y}{dt} = 6$. Po dosazení času $t = 10 \text{ s}$, je $a_x = 16 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, $a_y = 6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ a velikost celkového zrychlení v čase 10 s je $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{16^2 + 6^2} = 17,1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

c) Souřadnice polohy koule lze vypočítat ze vztahů $x(t) = \int v_x dt = \frac{t^3}{3} - 2t^2 - 5t + C_1$, $y(t) = \int v_y dt = 3t^2 + t + C_2$, kde konstanty C_1 , C_2 určíme z počátečních podmínek. Jestliže nejsou přímo zadány, předpokládáme, že se koule nacházela v čase

$t = 0$ s v počátku souřadnic, volíme tedy $x(0) = 0$ m, $y(0) = 0$ m. Po dosazení získáme hodnoty $C_1 = C_2 = 0$.

- d) V čase $t = 1$ s je $x = \frac{1}{3} - 2 - 5 = -\frac{20}{3}$ m, $y = 3 + 1 = 4$ m, vzdálenost od počátku souřadnic $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\left(\frac{-20}{3}\right)^2 + 4^2} = 7,77$ m.

Příklad 1.2

Kolo o poloměru $R = 15$ cm se roztáčí z klidu rovnoměrně zrychleně se zrychlením $\varepsilon = \pi$ s⁻².

Vypočítejte:

- úhlovou rychlost ω pohybu kola,
- dostředivé zrychlení v čase $t = 4$ s,
- tečné zrychlení $t = 4$ s,
- celkové zrychlení $t = 4$ s.

Řešení:

- Z definice úhlového zrychlení $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$ můžeme stanovit úhlovou rychlost pomocí vztahu $\omega = \int \varepsilon dt = \varepsilon t + \omega_0$, kde $\omega_0 = 0$ s⁻¹, protože počáteční úhlová rychlost byla nulová. V čase $t = 4$ s je $\omega = \pi \cdot 4 = 12,56$ s⁻¹.
- Dostředivé zrychlení je $a_n = \frac{v^2}{R} = R\omega^2 = 15 \cdot 10^{-2} \cdot 12,56^2 = 23,66$ m · s⁻².
- Pro tečné zrychlení platí $a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d(R\omega)}{dt} = R\varepsilon = 15 \cdot 10^{-2} \cdot \pi = 0,47$ m · s⁻².
- Celkové zrychlení v čase $t = 4$ s je $a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2} = \sqrt{23,66^2 + 0,47^2} \doteq 23,66$ m · s⁻².

Příklad 1.3

Hmotný bod se pohybuje po kružnici s poloměrem $R = 0,2$ m s konstantním tečným zrychlením. Na počátku byl hmotný bod v klidu, na konci druhé otáčky má jeho obvodová rychlost velikost $v = 0,15$ m · s⁻¹.

Vypočítejte:

- čas potřebný pro dosažení této rychlosti,
- velikost tečného a normálového zrychlení v tomto okamžiku,
- velikost celkového zrychlení.

Řešení:

- Pohyb hmotného bodu po kružnici je pohybem rovnoměrně zrychleným s nulovou počáteční rychlostí. Pro tento pohyb platí vztahy

$s = \frac{1}{2} a_t t^2$, $v = a_t t$. Úpravou rovnic dostaneme vztah pro čas, $t = \frac{2s}{v}$. Dosazením hodnot po 2 otáčkách $t = \frac{2 \cdot 4\pi R}{v} = \frac{2 \cdot 4\pi \cdot 0,2}{0,15} = 33,51 \text{ s}$.

b) Tečné zrychlení pro případ rovnoměrně zrychleného kruhového pohybu vypočteme ze vztahu $a_t = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{0,15}{33,51} \doteq 4,48 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

Pro normálové zrychlení platí $a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{0,15^2}{0,2} \doteq 0,113 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, hodnota je vypočtena pro čas 33,51 s.

c) Celkové zrychlení $a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2} = \sqrt{0,113^2 + 0,00448^2} \doteq 0,113 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

Příklad 1.4

Z rozhledny o výšce 85 m byl svisle dolů hozen kámen hmotnosti 2 kg tak, že jeho rychlost po 2 sekundách byla $30 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Vypočítejte:

- rychlost kamene v čase $t = 3 \text{ s}$,
- počáteční rychlost kamene,
- vzdálenost kamene od země v čase $t = 3 \text{ s}$.

Řešení:

a) Pohyb kamene můžeme považovat za rovnoměrně zrychlený pohyb hmotného bodu, který se děje pouze v jednom směru s velikostí zrychlení $a = g$, kde $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ je velikost tíhového zrychlení. Referenční souřadnicový systém zvolíme tak, že orientace osy y souhlasí se směrem pohybu kamene a počátek je v místě, kde byl kámen hozen. Souřadnicový systém by bylo možné volit například i tak, že počátek by byl umístěn na povrchu Země, na místě dopadu kamene a kladný směr osy y by směřoval vzhůru. V námi zvoleném souřadnicovém systému platí $a_y \equiv a = g$. K určení rychlosti použijeme vztah $a_y = \frac{dv_y}{dt}$ a po následné integraci dostaneme vztah $v_y = \int a_y dt = gt + C_1$,

kde C_1 určíme z počáteční podmínky, tj. známé rychlosti v jakémkoliv okamžiku. Dosazením zadané rychlosti v $t = 2 \text{ s}$, času $t = 2 \text{ s}$ a hodnoty zrychlení $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ obdržíme relaci $30 = 2 \cdot 9,81 + C_1$, $C_1 = 10,38 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. Pro okamžitou rychlost pohybu lze pak psát obecný vztah $v_y = gt + C_1$. Rychlost v čase $t = 3 \text{ s}$ určíme dosazením do obecného vztahu $v_y(3) = 3 \cdot 9,81 + 10,38 = 39,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

b) Počáteční rychlost kamene získáme dosazením času $t = 0 \text{ s}$ do obecného vztahu pro rychlost $v_y(0) = 0 \cdot 9,81 + 10,38 = 10,38 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Podle obvyklého značení lze psát $v_0 \equiv v_y(0) = C_1$.

- c) Pro určení vzdálenosti kamene od země vypočteme dráhu v čase $t = 3$ s. Platí $v_y = \frac{dy}{dt}$ a integrací $y = \int v_y dt = \int (gt + v_0) dt = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t + C_2$, kde integrační konstantu opět určíme z počáteční podmínky. V tomto případě je známa poloha hmotného bodu v okamžiku $t = 0$ s a je totožná s počátkem souřadnic, $y(0) = 0$ m. Dosazením počáteční podmínky dostaneme vztah pro konstantu C_2 . Platí $y(0) = 0 = \frac{1}{2} \cdot 9,81 \cdot 0^2 + 10,38 \cdot 0 + C_2$, $C_2 = 0$. Pro čas $t = 3$ s obdržíme relaci $y(3) = \frac{1}{2} \cdot 9,81 \cdot 3^2 + 10,38 \cdot 3 \doteq 75,29$ m. Vzdálenost kamene od povrchu Země v čase $t = 3$ s označíme h a platí pro ni $h = 85 - 75,29 = 9,71$ m.

Pokud zvolíme referenční souřadnicový systém spojený s povrchem Země, změní se vztahy následujícím způsobem:

- a) $a_y \equiv a = -g$ (zrychlení má směr proti orientaci osy y)
 $v_y = \int (-g) dt = -gt + C_1$
 $-30 = -2 \cdot 9,81 + C_1$, $C_1 = -10,38 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$
 $v_y(3) = -3 \cdot 9,81 - 10,38 = -39,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
- b) $v_y(0) = -0 \cdot 9,81 - 10,38 = -10,38 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ (počáteční rychlost má směr proti orientaci osy y)
- c) $y = \int v_y dt = \int (-gt + v_0) dt = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + C_2$
 $y(0) = 85$ m
 $y(0) = 85 = -\frac{1}{2} \cdot 9,81 \cdot 0^2 - 10,38 \cdot 0 + C_2$, $C_2 = 85$ m
 $h = y(3) = -\frac{1}{2} \cdot 9,81 \cdot 3^2 - 10,38 \cdot 3 + 85 \doteq 9,71$ m.

2. Dynamika hmotného bodu

2.1 Newtonovy zákony

V předchozí kapitole věnované kinematice hmotného bodu se naše úvahy zaměřily na popis pohybu hmotného bodu pomocí kinematických veličin: dráha, rychlost, zrychlení. Na rozdíl od kinematiky, základním pojmem Newtonovy dynamiky je **síla**.

Newton formuloval tři základní zákony mechaniky.

1. **Těleso setrvává v klidu nebo v pohybu rovnoměrném přímočarém, dokud není přinuceno tento stav změnit působením jiného tělesa.**
2. **Zrychlení pohybu tělesa (hmotného bodu) je přímo úměrné působící síle a nepřímo úměrné jeho hmotnosti.**
3. **Každé akci přísluší stejně velká a opačná reakce.**

2.2 Zákon setrvačnosti

První Newtonův zákon, nazývaný často **zákon setrvačnosti**, definuje příčinu změny pohybového stavu hmotného bodu. Za zdroj silového působení je podle Newtona považováno jiné těleso. Zákon setrvačnosti platí pouze pro izolované těleso. To znamená, že pouze těleso, na které okolí silově nepůsobí, bude setrvávat v rovnoměrném přímočarém pohybu, jestliže již do něj bylo uvedeno.

Referenční systém, v kterém platí princip setrvačnosti, se nazývá **setrvačný, inerciální** (odst. 1.5). Soustava pevně spojená se Zemí není přesně inerciální soustava. Je to důsledek jak její rotace kolem vlastní osy, tak pohybu kolem Slunce. Většinu problémů pohybu těles na zemském povrchu však můžeme přesto řešit v referenčním systému pevně spojeném se Zemí jako v systému inerciálním a nedopustíme se podstatné chyby.

Schopnost těles bránit se změně pohybového stavu označujeme jako setrvačnost tělesa. Jako míru setrvačnosti (abychom mohli tuto vlastnost těles kvantitativně srovnávat) Newton navrhl hmotnost tělesa. Svými experimenty dokázal, že míra setrvačnosti určitého tělesa je úměrná jeho tíze. Hmotnosti dvou látkově odlišných těles můžeme porovnávat vážením. Jednotkou hmotnosti je 1kg.

2.3 Zákon síly

Druhý Newtonův zákon lze zapsat vektorovou rovnicí

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad , \quad (2.1)$$

kteřou lze rozepsat jako tři rovnice pro jednotlivé složky síly a zrychlení. **Síla je vektorová veličina**, je určena velikostí a směrem. Rozměř síly je $[F] = \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$. Jednotkou síly je 1 N (newton).

Hmotnost, jak jsme uvedli v odst. 2.2, je mírou setrvačnosti hmotného bodu a v rámci klasické mechaniky pro $v \ll c$, kde c je rychlost světla ve vakuu, nezávisí na rychlosti. Zavedeme-li další veličinu charakterizující pohybový stav tělesa, **hybnost**, vztahem

$$\vec{p} = m\vec{v} , \quad (2.2)$$

potom lze druhý Newtonův zákon přepsat do tvaru

$$\vec{F} = m\vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \frac{d\vec{p}}{dt} . \quad (2.3)$$

Tento vztah můžeme formulovat slovy: **Časová změna hybnosti hmotného bodu je rovna síle, která na něj působí.**

Časové účinky síly charakterizuje veličina nazvaná **impulz síly**

$$\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt , \quad (2.4)$$

kde při integraci předpokládáme působení síly v intervalu $\Delta t = t_2 - t_1$.

Veličina impulz se uplatňuje zejména tehdy, chceme-li vystihnout účinek síly působící krátký časový okamžik. Často je tato síla $\vec{F} = \vec{F}(t)$ v čase proměnná. Dosadíme-li do vztahu (2.4) za sílu \vec{F} ze vztahu (2.3), dostaneme

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1 = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 . \quad (2.5)$$

Časové působení síly se projeví změnou hybnosti hmotného bodu.

2.4 Princip akce a reakce

Třetí Newtonův zákon řeší problém interakce mezi tělesy. Vystihuje skutečnost, že síly se vyskytují v pářech. Říká, že: působí-li těleso 1 o hmotnosti m_1 na těleso 2 o hmotnosti m_2 silou \vec{F}_{12} , pak těleso 2 působí na těleso 1 silou \vec{F}_{21} a platí vztah

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} . \quad (2.6)$$

Vyslovený princip nelze vždy jednoduše ověřit, platí v jednoduchém tvaru jen tehdy, jde-li o zcela izolovaná tělesa, která nejsou silově ovlivněna okolím. Pro dva izolované pohybující se hmotné body můžeme dosadit do vztahu (2.6) pomocí (2.3)

$$\begin{aligned}
\vec{F}_{12} &= m_1 \frac{d\vec{v}_1}{dt} \\
\vec{F}_{21} &= m_2 \frac{d\vec{v}_2}{dt} \\
0 &= m_1 \frac{d\vec{v}_1}{dt} + m_2 \frac{d\vec{v}_2}{dt} = \frac{d}{dt} (m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2) \\
&\Rightarrow m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = \text{konst.} \quad . \quad (2.7)
\end{aligned}$$

Součet hybností dvou izolovaných hmotných bodů zůstává v čase konstantní (velikost i směr). To je znění **zákona zachování hybnosti**.

Zákon akce a reakce v Newtonově pojetí předpokládá pouze okamžité působení síly mezi dvěma tělesy. V případě dvou vzdálených těles (např. Země a Slunce) tento předpoklad zřejmě přestává platit. Moderní pohled na vzájemnou interakci takových dvou těles používá představu silového pole, vytvářeného tělesy ve svém okolí.

2.5 Aplikace Newtonových zákonů

Newtonův druhý zákon umožňuje, jak ukážeme v tomto odstavci, ze známé síly a počátečních podmínek stanovit rychlost hmotného bodu a trajektorii v kterémkoliv okamžiku. Pohyb hmotného bodu je tak jednoznačně určen. Říkáme, že newtonovská klasická mechanika je deterministická. Má však jistá omezení platnosti, která se týkají především mikroobjektů, pro něž souřadnice a hybnost přestávají být dobrými parametry. Problematiku této oblasti řeší kvantová mechanika, jejíž popis mikroobjektů je založen na zcela jiném, pravděpodobnostním principu. Další omezení klasické mechaniky představují problémy spojené s pohybem těles rychlostí blízkými se k rychlosti světla ve vakuu. Pro takové případy je třeba použít Einsteinovy teorie relativity a z ní vyplývajících závěrů relativistické mechaniky.

Newtonovy zákony lze aplikovat dvojnásobem:

1. Na základě znalosti všech působících sil na hmotný bod lze stanovit rychlost a posléze dráhu hmotného bodu v závislosti na čase. Známe-li sílu působící na hmotný bod, můžeme sestavit rovnici ve tvaru druhého Newtonova zákona, vztah (2.1)

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad .$$

Tato rovnice s konkrétně vyjádřenou silou představuje **pohybovou rovnici**, která určuje pohyb hmotného bodu. Jestliže vyjádříme \vec{a} pomocí časové změny rychlosti a tu pomocí změny polohového vektoru, dostáváme jednu diferenciální rovnici druhého řádu pro $\vec{r}(t)$ ve tvaru

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \Rightarrow \vec{F} = m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \quad , \quad (2.8)$$

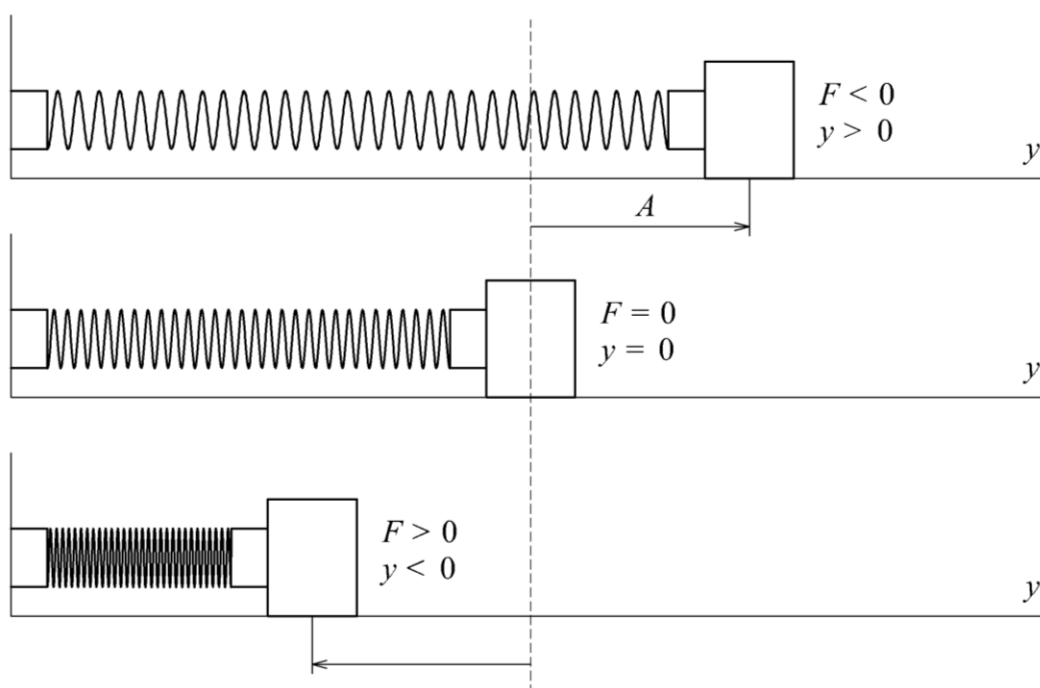
nebo tři rovnice pro složky x, y, z . Při provádění integrace potřebné ke stanovení $\vec{r}(t)$ je třeba určit dvě integrační konstanty pomocí počátečních podmínek, tj. počáteční rychlosti a polohy. Po vyřešení rovnice (2.8) je možné určit polohu hmotného bodu v kterémkoliv okamžiku.

2. Ze známé hmotnosti a polohy jako funkce $\vec{r} = \vec{r}(t)$ hmotného bodu určit vnější sílu, která způsobuje pohyb hmotného bodu.

Pohybová rovnice pro harmonický pohyb

Předpokládejme, že hmotný bod (kostka) hmotnosti m je spojený s pružinou. Na prvním obrázku (obr. 2.1) je pružina napínána tak, že kostku táhneme vpravo. Pružina, podle zákona akce a reakce, se snaží obnovit nenapjatý stav a táhne kostku doleva. Ten je znázorněn na dalším obrázku. Na třetím obrázku je znázorněna opačná situace, pružinu stlačujeme vnější silou doleva, a pružina vratnou silou působí směrem doprava. Výsledkem silového působení je kmitavý pohyb hmotného bodu ve směru osy y .

Na obr. 2.1 je síla \vec{F} vratná síla pružiny, y je okamžitá výchylka hmotného bodu. Za počátek je zvolen střed kostky v nenapjatém stavu pružiny.



Obr. 2.1

Jestliže se omezíme na malé výchylky hmotného bodu a zanedbáme odpor prostředí, působí na hmotný bod pouze vratná síla F pružiny, která souvisí s výchylkou y vztahem

$$F = -ky, \quad (2.9)$$

kde k je kladná konstanta, která je zároveň charakteristickou konstantou pružiny. Nazývá se **tuhost pružiny** a závisí zejména na materiálu, z kterého je pružina vyrobena.

Vztah (2.9) pro sílu vyplývá z platnosti Hookova zákona. Znaménko (–) ve vztahu vyjadřuje, že síla pružiny je v každém okamžiku namířena proti výchylce hmotného bodu.

Dosadíme-li vztah (2.9) do 2. Newtonova zákona, získáme pohybovou rovnici pro vyšetřovaný případ pohybu hmotného bodu. Pro velikost síly ve směru osy y platí vztah

$$ma = m \frac{d^2 y}{dt^2} = -ky \quad , \quad (2.10)$$

kterou můžeme přepsat do tvaru

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{k}{m} y = 0 \quad . \quad (2.11)$$

Jestliže vyřešíme tuto diferenciální rovnici a použijeme počáteční podmínku, že v čase $t = 0$ má hmotný bod výchylku $y = A$ a velikost rychlosti $v = 0$, dostaneme vztah pro okamžitou výchylku y hmotného bodu

$$y = A \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t \quad .$$

Vztah, který jsme obdrželi pro pohyb hmotného bodu, odpovídá **harmonickému kmitavému pohybu**. O správnosti vztahu je možné se přesvědčit dosazením do původní diferenciální rovnice (2.11).

Stejně tak je řešením rovnice (2.11) i funkce sinus, o které platí, že je posunuta oproti funkci cosinus o $\frac{\pi}{2}$. Zvolíme zápis okamžité výchylky hmotného bodu ve tvaru

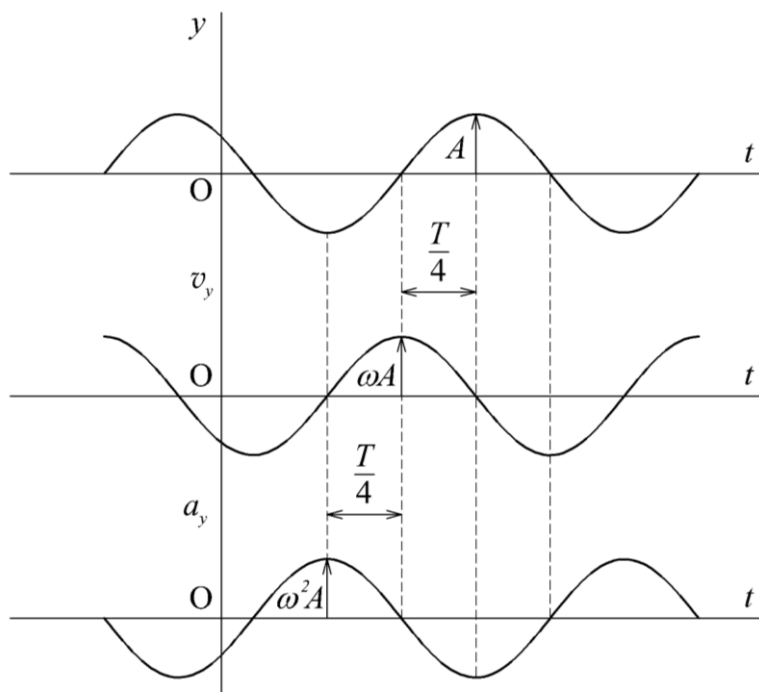
$$y = A \sin \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t + \varphi_0 \right) \quad , \quad (2.12)$$

kde v závorce jsme připojili fázové posunutí φ_0 , které respektuje obecné zadání počátečních podmínek. A je maximální výchylka, nazývaná **amplituda výchylky**. Funkce (2.12) rovněž vyhovuje původní diferenciální rovnici (2.11).

Zavedeme-li **dobu kmitu** T (dobu, která je potřebná k tomu, aby se hmotný bod z výchylky A dostal do výchylky $-A$ a znovu se vrátil do A), **frekvenci kmitů** $f = \frac{1}{T}$ a **úhlovou frekvenci** $\omega = 2\pi f$, můžeme vztah (2.12) přepsat do tvaru

$$y = A \sin(\omega t + \varphi_0) \quad . \quad (2.13)$$

Vztah (2.13) udává okamžitou výchylku hmotného bodu při harmonickém kmitavém pohybu. Porovnáním vztahů (2.12) a (2.13) vidíme, že $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Grafické znázornění průběhu výchylky, rychlosti a zrychlení na čase pro nenulovou hodnotu fázového posunutí je na obr. 2.2.



Obr. 2.2

Objekt vykonávající kmity (hmotný bod, těleso) se často nazývá oscilátor. Je-li výchylka popsána vztahem (2.13), jedná se o **harmonický oscilátor** a ω je vlastní úhlová frekvence oscilátoru. Charakteristickou konstantou pružiny je **tuhost** k .

Tlumené kmitání

Harmonické kmitání popsané pohybovou rovnicí (2.11) by bylo možné realizovat pouze ve vakuu a ještě bychom museli zanedbat vnitřní tření v materiálu pružiny. Při kmitání ve vzduchu nebo jiném prostředí se kmity tlumí. O odporu prostředí můžeme předpokládat, že je úměrný velikosti rychlosti hmotného bodu v_y a míří proti ní. K síle \vec{F} přistupuje tedy síla odporu prostředí a pohybová rovnice (2.11) se změní na tvar

$$ma = m \frac{d^2 y}{dt^2} = -ky - B \frac{dy}{dt}, \quad (2.14)$$

kde druhý člen na pravé straně rovnice je síla odporu prostředí, $B > 0$. Rovnici můžeme upravit do tvaru

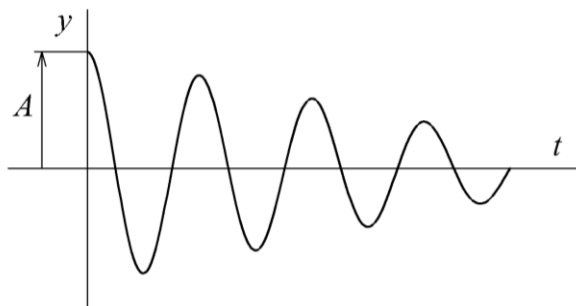
$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 2b \frac{dy}{dt} + \omega^2 y = 0, \quad (2.15)$$

konstanta $b = \frac{B}{2m}$ se nazývá **konstanta útlumu**. Řešení rovnice (2.15) pro malé hodnoty b má tvar

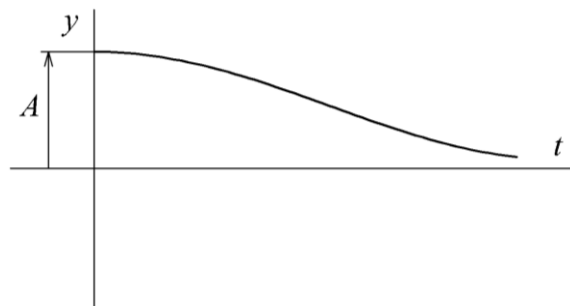
$$y = Ae^{-bt} \sin(\omega_1 t + \varphi_0), \quad (2.16)$$

kde ω_1 je úhlová frekvence tlumených kmitů.

Vztah (2.16) popisuje okamžitou výchylku tlumených kmitů, které jsou charakterizovány zmenšující se amplitudou kmitů. Amplituda výchylky tlumených kmitů se zmenšuje tím rychleji, čím větší je konstanta útlumu. Při velkém tlumení vychýlený oscilátor již periodicky neprochází rovnovážnou polohou. Takovému pohybu říkáme **aperiodický pohyb**. Znázornění tlumeného a aperiodického kmitavého pohybu jsou na obr. 2.3 a, b.



Obr. 2.3 a



Obr. 2.3 b

2.6 Pohyb v neinerciální soustavě

V odstavci 1.5 jsme se zabývali případem, kdy se čárkovaná soustava pohybovala vzhledem k nečárkované rychlostí konstantní co do velikosti i směru. Zrychlení hmotného bodu zůstávalo v obou soustavách stejné. Takové soustavy jsme nazvali inerciální.

Pohybové rovnice Newtonovy mechaniky nemění při přechodu z jedné inerciální soustavy do druhé svůj tvar. Říkáme, že jsou vůči Galileiově transformaci **invariantní**.

Koná-li čárkovaná soustava, obr. 1.8, vůči inerciální soustavě (nečárkované), nerovnoměrný pohyb, zůstávají transformační rovnice (1.26) až (1.28) v platnosti až na to, že rychlost \vec{u} již není konstantní.

Pro okamžité zrychlení v pohybující se soustavě dostaneme vztah

$$\vec{a}' = \vec{a} - \vec{a}_u, \quad (2.17)$$

kde \vec{a}_u je zrychlení odpovídající zrychlenému pohybu čárkované soustavy (pohybující se zrychleným pohybem) vzhledem k pevné, nečárkované. Nazýváme jej **unášivé zrychlení**. Rovnici (2.17) můžeme zapsat také jako tři složkové skalární rovnice. Jestliže vynásobíme rovnici (2.17) hmotností m hmotného bodu, dostaneme pohybovou rovnici pro pohyb hmotného bodu v čárkované soustavě. Má tvar

$$m\vec{a}' = m\vec{a} - m\vec{a}_u$$

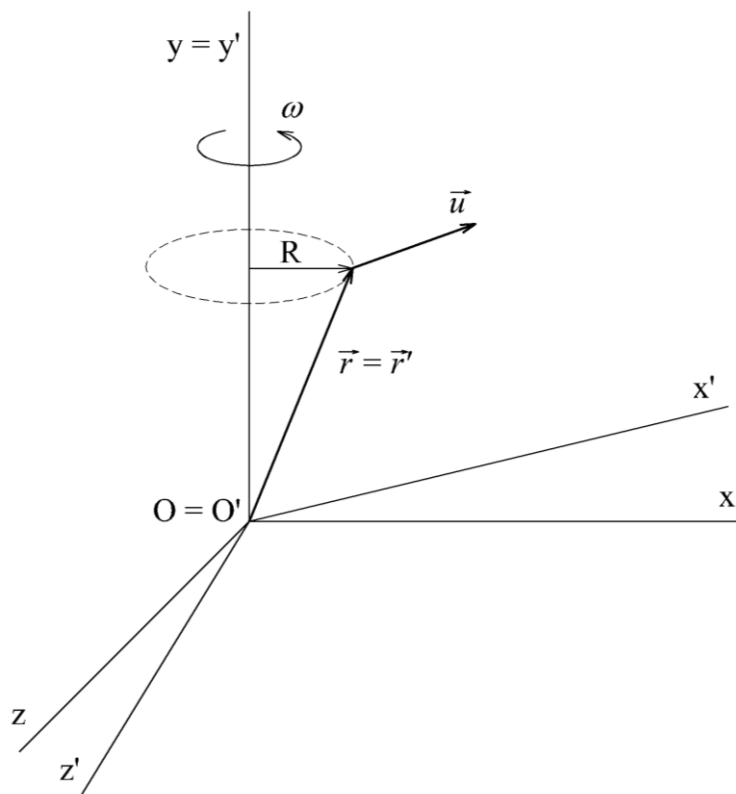
a použijeme-li vyjádření 2. Newtonova zákona pro sílu, můžeme psát rovnici

$$\vec{F}' = \vec{F} + \vec{F}^* . \quad (2.18)$$

Vidíme, že v pohybující se čárkované soustavě se objevila navíc síla \vec{F}^* . Tato síla působí proti směru zrychlení hmotného bodu, protože $\vec{F}^* = -m\vec{a}_u$ je **síla zdánlivá**. Obvykle ji nazýváme **setrvačná síla**. Čárkovaná soustava již není inerciální soustava, protože působící síla \vec{F} se změnila, \vec{F}' není totožná s \vec{F} .

Setrvačnou sílu pozorujeme například při rozjíždění nebo brzdění automobilu. Při brzdění nás setrvačná síla naklání dopředu, při rozjíždění nás tlačí do opěradla. Při svislém pohybu výtahu se tato síla skládá s tíhovou silou působící na těleso.

Pohyb v otáčivé soustavě



Obr. 2.4

V odst. 2.2 jsme upozornili, že souřadnicová soustava pevně spojená se Zemí není přesně inerciální soustava. Předpokládejme, že budeme řešit pohyb hmotného bodu v takové neiner-ciální soustavě, která se vůči jiné soustavě, inerciální, otáčí kolem pevné osy s úhlovou rychlostí $\vec{\omega}$. Inerciální soustavu budeme označovat jako nečárkovanou, rotující jako čárkovanou. Počátky obou soustav O, O' jsou shodné. Shodné jsou i osy $y = y'$ obou soustav a osa y je zároveň osou otáčení čárkované soustavy.

Okamžitou polohu hmotného bodu (obr. 2.4) popíšeme v souřadnicových soustavách pomocí polohových vektorů, které jsou, jak vyplývá z obrázku, shodné. Platí relace

$$\vec{r} = \vec{r}' . \quad (2.19)$$

Jestliže se hmotný bod pohybuje, pak mezi jeho rychlostí v nečárkované a v čárkované souřadnicové soustavě platí vztah

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{u} , \quad (2.20)$$

kde \vec{u} můžeme vyjádřit vztahem:

$$\vec{u} = \vec{\omega} \times \vec{r} . \quad (2.21)$$

Vypočteme-li pomocí (2.18) zrychlení v otáčivé soustavě, zjistíme, že je jiné než zrychlení v nečárkované inerciální soustavě, a pro sílu platí:

$$\vec{F}' = m\vec{a}' = m\vec{a} + \vec{F}^* + \vec{F}_C + \vec{F}_O . \quad (2.22)$$

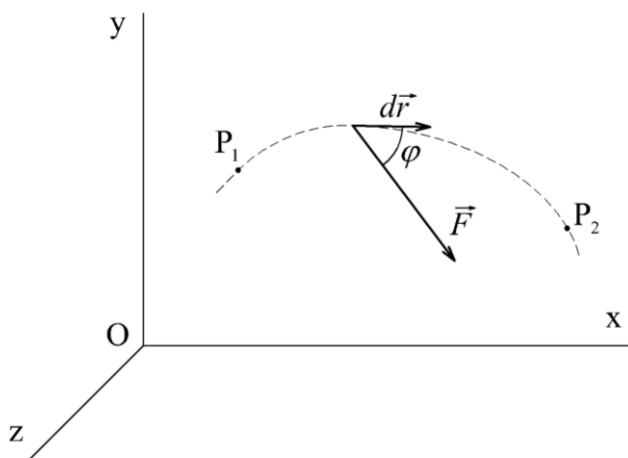
V čárkované soustavě se objevily další tři síly, které nazýváme **zdánlivé síly**. První síla vymizí, jestliže $\vec{\omega} = \text{konst}$, druhá síla je **Coriolisova síla**. Uplatňuje se v případech, kdy rychlost hmotného bodu \vec{v}' má jiný směr než úhlová rychlost otáčení $\vec{\omega}$ ($\vec{F}_C \approx -2\vec{\omega} \times \vec{v}'$). Třetí zdánlivá síla je silou odstředivou. Důsledkem existence těchto tří sil, zejména druhé a třetí, je ovlivnění různých dějů na povrchu Země. Pomocí Coriolisovy síly lze například vysvětlit, proč cyklony na severní polokouli se točí proti směru hodinových ručiček a na jižní polokouli opačně, proč je jeden břeh řeky více podemletý než druhý atd.

Neinerciální vztažnou soustavu můžeme spojit obecně s libovolným tělesem, které koná nerovnoměrný nebo křivočarý pohyb. Zdánlivé síly na nás tedy působí např. v metru, vlaku, který se rozjíždí (resp. brzdí), v automobilu, který právě projíždí zatáčkou, nebo na kolotoči.

2.7 Práce a energie

Působí-li na pohybující se hmotný bod, který vykoná elementární posunutí $d\vec{s}$, síla \vec{F} , je práce dA vykonaná silou \vec{F} podél této elementární trajektorie rovna skalárnímu součinu vektoru síly a změny polohového vektoru $d\vec{r}$ odpovídajícímu posunutí ds .

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r} . \quad (2.23)$$



Obr. 2.5

Práce vykonaná podél dráhy hmotného bodu z bodu P_1 do bodu P_2 , obr. 2.5, je

$$A = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{P_1}^{P_2} F dr \cos \varphi . \quad (2.24)$$

Rozměr práce $[A] = \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$. Práce je skalární veličina, jednotkou práce je 1 J (joule).

Hodnota integrálu (2.24) a tedy vykonaná práce obecně **závisí na trajektorii pohybu**, tj. na cestě, po které se hmotný bod přemísťuje. Práce se nekoná, jestliže vektor síly je kolmý na směr vektoru $d\vec{r}$. Příkladem je dostředivá síla, která má vždy směr normály k trajektorii, a proto práci nekoná.

Zvláštní typ síly je **síla konzervativní**. Pro práci vykonanou po uzavřené křivce l konzervativní silou \vec{F} platí vztah

$$\oint_l \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 . \quad (2.25)$$

Rovnice (2.25) popisuje skutečnost, že práce A konzervativních sil závisí pouze na počáteční a koncové poloze přemísťovaného hmotného bodu, a nikoliv na tvaru trajektorie. Konzervativní silou je např. síla **gravitační**.

Podle 2. Newtonova zákona, působí-li na hmotný bod síla, dochází ke změně pohybového stavu. Proto dalším krokem je najít souvislost mezi vykonanou prací, změnou polohy hmotného bodu a tomu odpovídající změnou rychlosti pohybu.

Hmotný bod se pohybuje z bodu P_1 do bodu P_2 , obr. 2.5, a změní přitom svoji rychlost z \vec{v}_1 na \vec{v}_2 . Práce, která se po této dráze silou \vec{F} vykoná, je

$$A = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = m \int_{P_1}^{P_2} \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{r} = m \int_{\vec{v}_1}^{\vec{v}_2} \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot d\vec{v} = m \int_{\vec{v}_1}^{\vec{v}_2} \vec{v} \cdot d\vec{v} = m \int_{v_1}^{v_2} v dv = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 . \quad (2.26)$$

Vztah $\frac{1}{2} m v^2$ je známý výraz pro kinetickou energii hmotného bodu. Práce A je rovna přírůstku kinetické energie hmotného bodu. Je-li velikost rychlosti \vec{v}_2 větší než \vec{v}_1 , pak vykonaná práce je $A > 0$, kinetická energie se zvětšila.

2.8 Gravitační pole

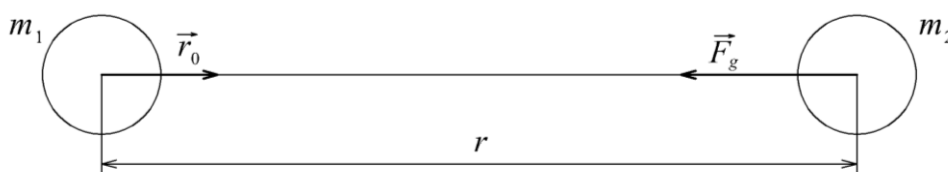
Libovolná dvě tělesa na sebe působí vzájemnou přitažlivou silou. Země k sobě přitahuje předměty, Slunce přitahuje planety apod. Sílu, kterou na sebe působí dvě hmotná tělesa, nazýváme **gravitační síla**. Prostoru, v němž se projevují gravitační silové účinky, říkáme **gravitační pole**. Newton odvodil z Keplerových zákonů, popisujících pohyb planet, obecný zákon pro sílu, kterou se přitahují dva hmotné body. Newtonův gravitační zákon říká:

Každé dva hmotné body se přitahují silou, která je přímo úměrná součinu jejich hmotností a nepřímo úměrná čtverci jejich vzdáleností.

Pro gravitační sílu \vec{F}_g , kterou působí hmotný bod o hmotnosti m_1 na hmotný bod o hmotnosti m_2 ve vzdálenosti r tedy platí vztah

$$\vec{F}_g = -\kappa \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{r}_0, \quad (2.27)$$

kde \vec{r}_0 je jednotkový vektor ve směru spojnice od hmotného bodu hmotnosti m_1 k hmotnému bodu o hmotnosti m_2 . Konstanta κ se nazývá **gravitační konstanta** a její hodnota je $\kappa = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$.



Obr. 2.6

Vztah (2.27) můžeme použít nejen pro dva hmotné body nebo dvě tělesa, která můžeme za dva hmotné body považovat. Lze ho zapsat i pro dvě homogenní koule, jejichž středy jsou vzdáleny o r (obr. 2.6).

Pole gravitační síly \vec{F}_g charakterizujeme další veličinou, **intenzitou gravitačního pole** \vec{K} .

Intenzita gravitačního pole v daném bodě je vektor, jehož velikost je stanovena jako podíl gravitační síly, která v tomto bodě působí na hmotný bod a hmotnosti tohoto bodu m . Platí

$$\vec{K} = \frac{\vec{F}_g}{m}. \quad (2.28)$$

Rozměr intenzity gravitačního pole je $[\text{K}] = \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$. Jednotka intenzity gravitačního pole je $\text{N} \cdot \text{kg}^{-1}$.

Intenzitu gravitačního pole můžeme také definovat jako sílu, kterou působí pole v daném místě na těleso o hmotnosti 1 kg.

Gravitační pole je, jak ukážeme později, pole konzervativní (odst. 2.8). Obecně pro konzervativní sílu \vec{F} můžeme zavést **potenciální energii** W_p . Potenciální energie W_p určitém bodě je práce, kterou vykoná vnější síla \vec{F}' (stejně velká jako síla \vec{F} , ale opačného směru) při přenesení hmotného bodu o hmotnosti m z bodu P_1 (jeho polohu udává polohový vektor \vec{r}_1) do bodu P_2 (jeho polohu udává polohový vektor \vec{r}_2). Protože $\vec{F}' = -\vec{F}$, můžeme psát relaci

$$W_p = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}' \cdot d\vec{r} = - \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}. \quad (2.29)$$

Znaménko (–) ve výrazu pro potenciální energii znamená, že práce vykonaná konzervativní silou pole zmenšuje potenciální energii (zároveň se zvětšuje kinetická energie) a v každém bodě je jejich součet konstantní. Říkáme, že **energie se konzervuje**.

Vztah pro potenciální energii (2.29) určuje pouze změnu potenciální energie při přemístění hmotného bodu. Proto udáváme potenciální energii vztaženou vždy k nějakému bodu, nebo množině bodů se stejnou potenciální energií. Hladinu $W_p = 0$ můžeme volit např. v nekonečnu, nebo na zemském povrchu.

Podobně jako intenzitu pole definujeme skalární funkci $U = U(\vec{r})$ vztahem

$$U = \frac{W_p}{m}, \quad (2.30)$$

kde $U = U(\vec{r})$ se nazývá **potenciál gravitačního pole**. Jednotka potenciálu je $\text{J} \cdot \text{kg}^{-1}$.

Na základě vztahů (2.28) – (2.30) můžeme vyjádřit vektory \vec{K} a \vec{F} relacemi

$$\vec{K} = -\text{grad } U = \left(-\frac{\partial U}{\partial x}; -\frac{\partial U}{\partial y}; -\frac{\partial U}{\partial z} \right)$$

$$\vec{F}_g = -\text{grad } W_p = \left(-\frac{\partial W_p}{\partial x}; -\frac{\partial W_p}{\partial y}; -\frac{\partial W_p}{\partial z} \right).$$

Vlastnosti pole konzervativní síly můžeme zobecnit v následujících výrocích. Toto pole je

- **stacionární** tj. s časem se nemění, $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$ (pro gravitační pole plyne z (2.27)),
- **potenciálové** tj. můžeme zavést skalární veličiny potenciální energie a potenciál.

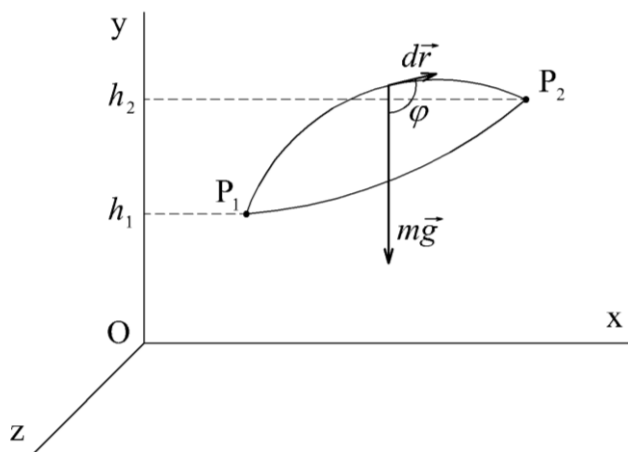
Na povrchu Země představuje gravitační síla podstatnou část **tíhového pole Země**. V tíhové síle je však ještě obsažena odstředivá síla způsobená rotací Země. Velikost odstředivého zrychlení je ale zhruba 300–krát menší než velikost gravitačního zrychlení (na rovníku $a_o = 0,0034 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$), proto ho můžeme ve většině případů zanedbat. Potom můžeme srovnáním (2.28) se zákonem síly zjistit, že platí

$$\vec{K} = \frac{\vec{F}_g}{m} = \vec{g}.$$

Vektor intenzity gravitačního pole Země se tedy přibližně rovná vektoru tíhového zrychlení \vec{g} .

2.9 Kinetická a potenciální energie v tíhovém poli

Ukažme nyní, že tíhové pole je konzervativní, tedy že platí $\oint_l \vec{F}_g \cdot d\vec{r} = 0$. Předpokládejme, že hmotný bod se pohybuje v tíhovém poli Země (v blízkosti Země) křivočarým pohybem (obr. 2.7).



Obr. 2.7

Práce vykonaná tíhovou silou na elementární dráze dr je dA a celková práce A po dráze s z bodu P_1 do bodu P_2 je

$$A = mg \int_{P_1}^{P_2} dr \cos \varphi , \quad (2.31)$$

kde φ je úhel, který svírají vektory $d\vec{r}$ a tíhová síla $m\vec{g}$. Pro tento případ platí, že velikost

$$dr \cos \varphi = -dh , \quad (2.32)$$

kde $-dh$ je změna výšky hmotného bodu. Znaménko minus označuje úbytek výšky.

Podél dráhy hmotného bodu se sice mění úhel φ , ale stále platí vztah (2.32). Celková práce vykonaná tíhovou silou po dráze mezi body P_1 a P_2 je

$$A = mg(h_1 - h_2) , \quad (2.33)$$

kde $h_1 - h_2$ je celková změna výšky částice (změna y -ové souřadnice). Rychlost částice se změní z původní \vec{v}_1 (v bodě P_1) na rychlost \vec{v}_2 (v bodě P_2). Podle (2.26) se celková vykonaná práce projeví změnou kinetické energie hmotného bodu

$$mgh_1 - mgh_2 = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 . \quad (2.34)$$

Jak vyplývá z obr. 2.7, vykonaná práce přitom závisí pouze na rozdílu výšek bodů P_1 a P_2 (y -ové souřadnice), nikoliv na cestě mezi body P_1 a P_2 . Práce po jakékoliv jiné dráze mezi body P_1 a P_2 bude stejná. Jestliže bude tíhová síla působit po dráze z bodu P_1 do bodu P_2 a nazpět do bodu P_1 , tedy po uzavřené křivce, bude vzhledem k platnosti (2.31) celková vykonaná práce $A = 0$ a tedy platí vztah (2.25).

Potenciální energie v tíhovém poli je rovna práci, kterou vykoná síla působící proti tíhové síle, přemístí-li hmotný bod z místa nulové potenciální energie do vzdálenosti r s potenciální energií W_p . Za místo s nulovou potenciální energií zvolíme povrch Země ($r = r_z$), kde r_z je poloměr Země. Potenciální energii hmotného bodu v poli ve výšce $h = r - r_z$ nad povrchem Země určíme dosazením vztahu pro sílu (2.27) do vztahu (2.29)

$$\begin{aligned} W_p &= - \int_{r_z}^{r_z+h} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \kappa m M_z \int_{r_z}^{r_z+h} \frac{1}{r^2} dr = \\ &= \frac{\kappa M_z m h}{r_z^2} \left(1 + \frac{h}{r_z}\right)^{-1} = m g_0 h \left(1 + \frac{h}{r_z}\right)^{-1} \approx m g_0 h \left(1 - \frac{h}{r_z}\right), \end{aligned} \quad (2.35)$$

kde $\frac{\kappa M_z}{r_z^2} = g_0$ jsme označili velikost tíhového zrychlení na povrchu Země.

V blízkosti zemského povrchu ($h \ll r_z$) můžeme považovat tíhové pole za **homogenní** (tj. intenzita tíhového pole je konstantní co do velikosti i směru). Vztah (2.35) se pak zjednoduší na známý tvar

$$W_p = mgh . \quad (2.36)$$

Potenciální energii můžeme zavést i pro jiná silová pole, např. elektrostatické pole, které je rovněž konzervativním polem.

2.10 Zákon zachování energie

Jestliže síla \vec{F} , která je konzervativní silou, je jedinou silou působící na hmotný bod, pak práce vykonaná touto silou po určité dráze je rovna přírůstku kinetické energie a úbytku potenciální energie hmotného bodu

$$\begin{aligned} A &= \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\Delta W_p = \Delta W_k \\ \Delta W_k + \Delta W_p &= \Delta(W_k + W_p) = 0 \Rightarrow W_k + W_p = \text{konst} , \end{aligned} \quad (2.37)$$

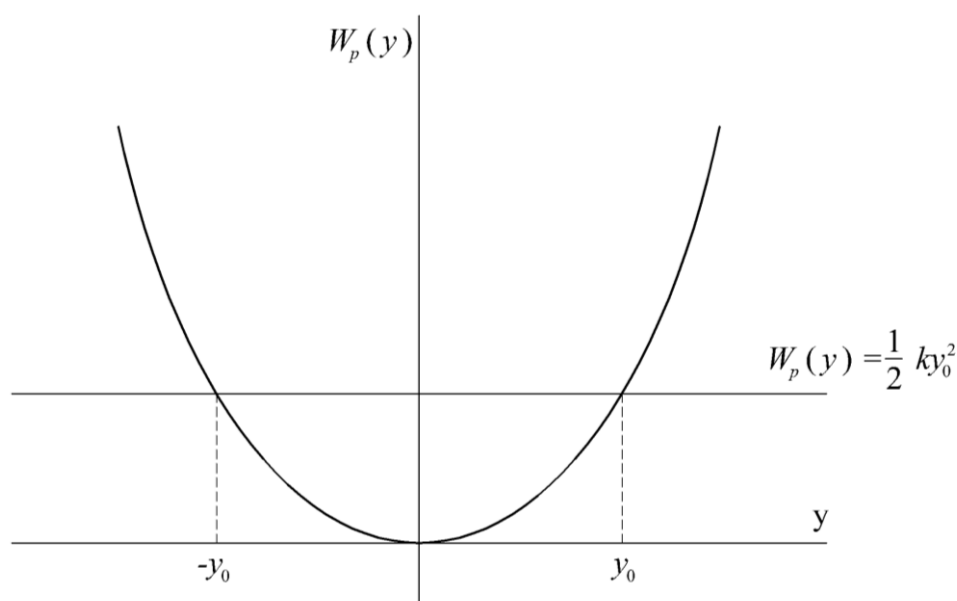
kde součet kinetické a potenciální energie představuje celkovou mechanickou energii hmotného bodu. Vztah (2.37) vyjadřuje **zachování (konzervaci) celkové mechanické energie během pohybu hmotného bodu**.

Příkladem pohybu v poli konzervativních sil, kde platí zákon zachování mechanické energie, je kmitavý pohyb hmotného bodu spojeného s pružinou. Tento pohyb jsme řešili v odst. 2.5. Velikost síly způsobující harmonický pohyb hmotného bodu ve směru osy y lze vyjádřit relací $F = -ky$, kde k je konstanta charakterizující tuhost vazby a y je okamžitá výchylka hmotného bodu ve směru osy y .

Práce, kterou musíme vykonat vnější silou (proti vratné síle pružiny), aby se pružina protáhla z polohy $y = 0$ do bodu vzdáleného o y_0 , který je zároveň krajní polohou kmitajícího bodu, (obr. 2.1) je

$$A = - \int_{r_1}^{r_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{y_0} ky \, dy = \frac{1}{2} ky_0^2 . \quad (2.38)$$

Vykonaná vnější práce se projeví zvýšením potenciální energie kmitajícího bodu.



Obr. 2.8

Na obr. 2.8 je průběh potenciální energie hmotného bodu konajícího kmitavý harmonický pohyb v závislosti na okamžité výchylce y , $W_p(y) = \frac{1}{2} m\omega^2 y^2$.

Celková energie hmotného bodu

$$W = W_k + W_p$$

uvedená již vztahem (2.37) je rovna v bodě y_0 potenciální energii hmotného bodu $\frac{1}{2} ky_0^2$, protože jeho kinetická energie je v krajní poloze nulová. V kterémkoliv jiném bodě je celková energie kmitajícího hmotného bodu složena z kinetické energie W_k a potenciální energie W_p .

$$W_k + W_p = \frac{1}{2} m\dot{v}^2 + \frac{1}{2} ky^2 . \quad (2.39)$$

O tom, že celková energie hmotného bodu během kmitavého pohybu zůstává konstantní, je možno se přesvědčit dosazením za velikost okamžité rychlosti v a okamžitou výchylku y do vztahu (2.39).

$$\begin{aligned}
y &= y_0 \sin(\omega t + \varphi_0) \\
v &= \frac{dy}{dt} = \omega y_0 \cos(\omega t + \varphi_0) \\
W_k + W_p &= \frac{1}{2} m \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} k y^2 = \\
&= \frac{1}{2} m \omega^2 y_0^2 \cos^2(\omega t + \varphi_0) + \frac{1}{2} m \omega^2 y_0^2 \sin^2(\omega t + \varphi_0),
\end{aligned}$$

kde jsme za k dosadili $k = m\omega^2$, což vyplývá z pohybové rovnice pro harmonický pohyb hmotného bodu.

Další úpravou vztahu pro $W_k + W_p$ dostaneme

$$\begin{aligned}
W_k + W_p &= \frac{1}{2} m \omega^2 y_0^2 \left[\cos^2(\omega t + \varphi_0) + \sin^2(\omega t + \varphi_0) \right] = \\
&= \frac{1}{2} m \omega^2 y_0^2 = \frac{1}{2} k y_0^2 .
\end{aligned} \tag{2.40}$$

Celková energie hmotného bodu upevněného na pružině je během kmitavého pohybu konstantní, **zachovává se**, a je stejně velká jako maximální kinetická energie nebo maximální potenciální energie.

Zákon zachování mechanické energie je speciální formou **obecného zákona zachování energie**.

2.11 Konzervativní a nekonzervativní síly

Tíhové pole Země je příkladem konzervativního silového pole a tíhová síla je konzervativní síla. Tíhová síla koná práci projevující se, jak již bylo řečeno, změnou potenciální nebo kinetické energie hmotného bodu. Jestliže síla působí po uzavřené křivce, je celková vykonaná práce nulová. Odpovídá to například situaci, kdy hmotný bod byl nejdříve proti směru tíhové síly posunut z povrchu Země do výšky h a pak se vrátil volným pádem zpět.

Dalším příkladem konzervativní síly je síla pružiny, kterou lze vyjádřit ve tvaru $F = -ky$, kde y je okamžitá výchylka konce pružiny ve směru osy y , k je konstanta. Konzervativní jsou také všechny **centrální síly**, tj. síly, které míří stále do jednoho bodu a jsou závislé pouze na souřadnicích. Příkladem centrálních sil závislých pouze na souřadnicích (nikoliv na rychlosti) jsou gravitační síly a elektrické síly.

Jako příklad nekonzervativních sil je možné uvést síly tření. Jestliže se při pohybu hmotného bodu uplatňuje tření, musíme znát dráhu, po které se hmotný bod pohybuje, abychom mohli určit práci konanou nekonzervativními silami. Celková mechanická energie hmotného bodu po skončení pohybu W_f

$$W_f = W_i + A , \tag{2.41}$$

kde W_i je celková mechanická energie na počátku a A je práce vykonaná nekonzervativními silami.

2.12 Výkon

Veličina, která hodnotí velikost vykonané práce vzhledem k vynaloženému času, se nazývá **výkon**. Okamžitý výkon P je definován

$$P = \frac{dA}{dt} . \quad (2.42)$$

Rozměr $[P] = \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-3}$, jednotkou výkonu je 1 W (watt).

Velikost práce můžeme stanovit ze známého výkonu a času

$$A = \int_{t_1}^{t_2} P dt . \quad (2.43)$$

Jestliže ze vztahu (2.43) dosadíme za práci pomocí definičního vztahu, potom

$$P = \frac{dA}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} \quad (2.44)$$

při splnění předpokladu, že \vec{F} není funkcí času.

2.13 Příklady ke kap. 2

Příklad 2.1

Hmotný bod hmotnosti $m = 3 \text{ kg}$ se začne v čase $t = 0 \text{ s}$ pohybovat bez tření podél osy y působením síly o velikosti $F(t) = 1 + 4t$. Síla přestane působit v čase $t = 6 \text{ s}$. Všechny veličiny jsou v jednotkách SI soustavy.

Vypočítejte:

- rychlost hmotného bodu v čase $t = 6 \text{ s}$,
- zrychlení v čase $t = 6 \text{ s}$,
- dráhu y v čase $t = 6 \text{ s}$,
- výkon síly v čase $t = 6 \text{ s}$.

Řešení:

a) Pro změnu hybnosti hmotného bodu za dobu $t_1 = 6 \text{ s}$ platí vztah

$$\int_0^{t_1} F(t) dt = m(v_y - v_0) = \int_0^{t_1} (1 + 4t) dt = \left[t + 2t^2 \right]_0^{t_1} = t_1 + 2t_1^2 = 78 \text{ N} \cdot \text{s} \text{ a odtud velikost}$$

rychlosti v_y po 6 s, (rychlost v čase $t = 0 \text{ s}$ je nulová), $v_y = 26 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

- b) Pro velikost zrychlení platí vztah $a_y(t) = \frac{dv_y}{dt} = \frac{4t+1}{m}$. Po dosazení času $t = 6$ s je $a = 8,3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.
- c) Dráhu v určitém čase vypočteme dvojí integrací zrychlení. Pro velikost rychlosti platí vztah $v_y(t) = \int a_y dt = \frac{t+2t^2}{m} + C_1$, kde konstantu C_1 určíme z počátečních podmínek, $C_1 = 0$. Souřadnice polohy hmotného bodu je určena vztahem $y(t) = \int v_y dt = \frac{1}{m} \left(\frac{1}{2}t^2 + \frac{2}{3}t^3 \right) + C_2$, kde konstantu C_2 určíme opět z počátečních podmínek. Jestliže nejsou přímo zadány, předpokládáme, že se hmotný bod nacházel v čase $t = 0$ s v počátku souřadnic, volíme tedy $y(0) = 0$, $C_2 = 0$. Pro souřadnici hmotného bodu v $t = 6$ s, po dosazení za hmotnost, platí $y(t) = \frac{2t^3}{9} + 4t = 54 \text{ m}$. Hodnotu konstanty určíme dosazením času $t = 0$ s, $C_1 = C_2 = 0$.
- d) Výkon síly vypočteme ze vztahu $P = \vec{F} \cdot \vec{v}$, kam za F a v dosadíme hodnoty v 6 s.
- $$P = (1+4t) \left(\frac{t+2t^2}{m} \right) = 650 \text{ W}.$$

Příklad 2.2

Na stlačení pružiny o délku $x_1 = 0,5 \text{ cm}$ je zapotřebí síla $F_1 = 1 \cdot 10^3 \text{ N}$. Vypočítejte potenciální energii pružiny při stlačení o 1,2 cm.

Řešení:

Potenciální energie pro tento případ je definována vztahem $W_p = \int_0^{x_2} F dx$, kde F je velikost síly a je úměrná stlačení, $F = kx$. Pro výchylku x_1 platí ekvivalentní vztah $F_1 = kx_1$. Vyloučením konstanty k dostaneme vztah pro sílu F

$$F = \frac{F_1}{x_1} x.$$

Pro potenciální energii dosazením za sílu F můžeme psát

$$W_p = \frac{F_1}{x_1} \int_0^{x_2} x dx = \frac{F_1}{x_1} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{x_2} = \frac{F_1}{x_1} \frac{x_2^2}{2} = \frac{1 \cdot 10^3 \cdot 1,2 \cdot 10^{-4}}{0,5 \cdot 10^{-2} \cdot 2} = 2,07 \text{ J}.$$

Příklad 2.3

Ujíždějící naplněná bedna klouže po vodorovné podlaze směrem k muži, který se ji snaží zabrzdit tak, že ji odtlačuje silou $\vec{F} = 3\vec{i} - 5\vec{j} - 3\vec{k}$ a ustupuje před ní. Bedna se při tom posune o délku vektoru $\vec{d} = -4\vec{i}$. Kinetická energie bedny na počátku je 20 J. Všechny veličiny jsou v jednotkách SI soustavy. Vypočítejte:

- práci vykonanou silou F při posunutí d ,
- kinetickou energii bedny na konci posunutí.

Řešení:

- a) Pro výpočet práce použijeme obecný vztah $A = \vec{F} \cdot \vec{d}$. Práci nepočítáme pomocí integrálu, protože síla i dráha tělesa mají konstantní směr. Po dosazení složek vektorů do skalárního součinu dostaneme pro velikost vykonané práce
- $$|A| = |-3 \cdot 4 - 5 \cdot 0 - 3 \cdot 0| = 12 \text{ J}$$
- b) Vykonaná práce se projeví snížením hodnoty kinetické energie. Kinetická energie bedny po posunutí je $W_k = 20 \text{ J} - 12 \text{ J} = 8 \text{ J}$.

Příklad 2.4

Chlapec hodlá využít ke skoku z mostu o výšce 35 m bungee-jumpingu. Hmotnost chlapce je 65 kg a pružné lano, jehož protažení se řídí Hookovým zákonem, má délku $L = 27 \text{ m}$. Tělo skokana považujeme za bodový objekt. Tuhost lana je $150 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$.

Vypočítejte:

- a) výšku h , v jaké budou chodidla skokana při zastavení letu v bodě obratu,
b) výslednou sílu působící na skokana v nejnižším bodě.

Řešení:

- a) Označíme jako délku d prodloužení lana v okamžiku bodu obratu. Pak pro změnu potenciální energie (tíhové pole Země) vzhledem k počátečnímu stavu, kdy skokan stál na mostě platí relace

$$\Delta W_{pg} = mg \Delta y = -mg(L + d).$$

Změna potenciální energie odpovídající změně výchylky pružného lana je dána vztahem $\Delta W_{pp} = \frac{1}{2}kd^2$, kde k je tuhost lana (pružiny). Vzhledem k tomu, že v počátečním stavu i v bodě obratu je kinetická energie nulová, je možné zákon zachování energie zapsat ve tvaru

$$0 + \frac{1}{2}kd^2 - mg(L + d) = 0,$$

a po dosazení

$$\frac{1}{2}150d^2 - 65 \cdot 9,81 \cdot 27 - 65 \cdot 9,81 \cdot d = 0.$$

Jejím řešením dostaneme $d = 8,82 \text{ m}$. Druhý kořen rovnice je záporný a nemá fyzikální smysl. Chodidla skokana budou v místě obratu ve výšce

$$h = 35 - (27 + 8,82) = 1,18 \text{ m}.$$

- b) Na skokana působí výsledná síla daná rozdílem tíhové síly působící směrem dolů a pružné síly lana směrem vzhůru. Celková síla má v bodě obratu velikost
- $$F = kd - mg = 150 \cdot 8,82 - 65 \cdot 9,81 \doteq 685 \text{ N}.$$
- Síla působí směrem vzhůru.

3. Dynamika soustavy hmotných bodů

3.1 Střed hmotnosti soustavy hmotných bodů, zákon zachování hybnosti

Doposud jsme řešili pouze pohyb jednoho hmotného bodu. V mnoha případech ale tento model nestačí, protože tvar, velikost a rozložení hmoty nejsou pro řešení úlohy zanedbatelné. Potom jeden hmotný bod nahradíme **soustavou hmotných bodů**, tedy skupinou **n hmotných bodů**, které zkoumáme a posuzujeme jako určitý celek. Každý jednotlivý bod, který se může pohybovat volně v prostoru, má 3 stupně volnosti (odst. 1.2), soustava n bodů má tedy $3n$ stupňů volnosti. K úplnému popisu polohy soustavy musíme určit $3n$ pohybových rovnic a stejný počet vedlejších podmínek (tj. $6n$ rovnic), což je často složitá úloha. Počet rovnic lze snížit zavedením určitých vazbových podmínek pro danou soustavu.

Síly působící na soustavu hmotných bodů dělíme podle původu na dvě skupiny: **vnější** (externí) a **vnitřní** (interní), kterými na sebe působí jednotlivé hmotné body soustavy. Podle 2. Newtonova zákona je síla \vec{F} , složená z vnější síly $\vec{F}_{i\text{ext}}$ a vnitřní síly $\vec{F}_{i\text{int}}$, působící na i -tou částici o hmotnosti m_i rovna

$$\vec{F}_i = m_i \vec{a}_i = \vec{F}_{i\text{ext}} + \vec{F}_{i\text{int}} . \quad (3.1)$$

Vnitřní síly jsou párové a podle 3. Newtonova zákona je

$$\vec{F}_{ik\text{int}} = -\vec{F}_{ki\text{int}} , \quad (3.2)$$

a proto je součet všech vnitřních sil roven nule.

$$\sum_i m_i \vec{a}_i = \frac{d}{dt} \sum_i (m_i \vec{v}_i) = \frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_i \vec{F}_{i\text{ext}} = \vec{F} , \quad (3.3)$$

kde $\vec{F} = \sum_i \vec{F}_{i\text{ext}}$ je **výslednice vnějších sil působících na soustavu**.

Zvláštním případem je soustava hmotných bodů, na kterou nepůsobí žádná vnější síla. Taková soustava se nazývá **izolovaná**.

Abychom zjednodušili vyšetřování pohybu soustavy n hmotných bodů a nemuseli řešit $3n$ pohybových skalárních rovnic, využijme zkušenosti, která říká, že lze najít bod, který se pohybuje takovým způsobem, jako kdyby v něm byla soustředěna celková hmotnost soustavy a působily v něm všechny síly působící na soustavu. Tento bod nazveme **střed hmotnosti soustavy** a definujeme jej pomocí jeho polohového vektoru \vec{r}_s , který musí vyhovovat vztahu

$$\begin{aligned} m\vec{r}_s &= m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \dots + m_i\vec{r}_i = \sum_i m_i\vec{r}_i \\ \Rightarrow \vec{r}_s &= \frac{1}{m} \sum_i m_i\vec{r}_i , \end{aligned} \quad (3.4)$$

kde

$$m = \sum_i m_i \quad (3.5)$$

je celková hmotnost soustavy (sčítáme přes všechny hmotné body soustavy).
Jestliže rovnici (3.4) derivujeme podle času, potom dostaneme vztah

$$\begin{aligned} m \frac{d\vec{r}_s}{dt} &= \sum_i m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} \\ m\vec{v}_s &= \sum_i m_i \vec{v}_i, \end{aligned} \quad (3.6)$$

kde $\vec{v}_s = \frac{d\vec{r}_s}{dt}$, a tedy

$$\vec{v}_s = \frac{1}{m} \sum_i m_i \vec{v}_i. \quad (3.7)$$

Celková hybnost soustavy \vec{p} , tj. součet hybností jednotlivých hmotných bodů, je rovna hybnosti středu hmotnosti pohybujícího se rychlostí \vec{v}_s .

$$\vec{p} = \sum_i m_i \vec{v}_i = m\vec{v}_s \quad (3.8)$$

Derivováním vztahu (3.8) podle času dostaneme

$$m\vec{a}_s = \sum_i m_i \vec{a}_i, \quad (3.9)$$

kde $\vec{a}_s = \frac{d\vec{v}_s}{dt}$. Ze vztahů (3.3) a (3.9) vyplývá

$$m\vec{a}_s = \vec{F}. \quad (3.10)$$

Střed hmotnosti soustavy se pohybuje tak, jako by v něm byla soustředěna celá hmotnost soustavy a působila na něj výslednice všech vnějších sil. Problém soustavy hmotných bodů je možné převést na problém jednoho bodu, a to středu hmotnosti soustavy.

Rovnici (3.10) můžeme pro soustavu hmotných bodů znovu přepsat do jednoduchého tvaru

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}. \quad (3.11)$$

Pro případ izolované soustavy, kde vnější síla $\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i = 0$, vyplývá z (3.11), že

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = 0, \quad (3.12)$$

a proto \vec{p} je konstantní co do velikosti a směru. **Celková hybnost izolované soustavy je konstantní.**

Vztah (3.12) vyjadřuje **zákon zachování hybnosti** pro izolovanou soustavu a je jedním z nejdůležitějších fyzikálních zákonů. Jeho platnost v mechanice je širší než platnost zákona zachování celkové mechanické energie, který platí jen pro konzervativní síly.

3.2 Srážka dvou částic (hmotných bodů)

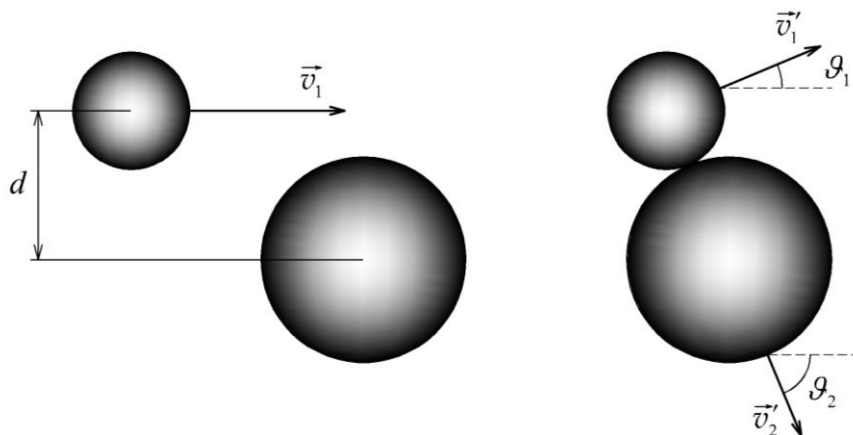
Pro izolovanou soustavu dvou částic jsme formulovali v předešlém odstavci zákon zachování celkové hybnosti. Hybnost soustavy před srážkou a po srážce bude stejná. Platí

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{v}'_1 + m_2\vec{v}'_2, \quad (3.13)$$

kde m_1, m_2 jsou hmotnosti částic, $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}'_1, \vec{v}'_2$ jsou rychlosti první a druhé částice před a po srážce. V rovnici (3.13) vystupují dvě neznámé, rychlosti \vec{v}'_1, \vec{v}'_2 po srážce. K jejich určení lze použít další zákon zachování – zachování kinetické energie.

Jestliže se kinetická energie soustavy během srážky nemění, označujeme ji jako pružnou, jestliže se energie mění, jde o nepružnou srážku.

Při řešení problému srážky dvou částic nabývá na významu pojem střed hmotnosti soustavy. Podle (3.8) lze hybnost soustavy vyjádřit jako hybnost středu hmotnosti, tj. součin celkové hmotnosti soustavy a rychlosti hmotného středu.



Obr. 3.1

Předpokládejme, že se jedná o srážku dvou částic a tato srážka není přímá (obr. 3.1). Protože rozměry částic nehrají roli, můžeme částice považovat za hmotné body. Dále pro jednoduchost předpokládejme, že první částice o hmotnosti m_1 se pohybuje před srážkou rychlostí \vec{v}_1 ve směru osy x a druhá, s hmotností m_2 , je v klidu. Charakter srážky popisuje **parametr**

srážky. Je definován jako vzdálenost středů částic měřená ve směru kolmém na vektor \vec{v}_1 a na obr. 3.1 je označen d . Po srážce se první částice pohybuje ve směru odchýleném od původního směru o úhel ϑ_1 a druhá částice o úhel ϑ_2 .

Jestliže rozepíšeme vektorovou rovnici (3.13), která vyjadřuje zákon zachování hybnosti soustavy, do dvou rovnic pro složky (předpokládané řešení je v rovině xy), dostaneme

$$\begin{aligned} \text{pro x-ovou složku} \quad m_1 v_1 &= m_1 v'_1 \cos \vartheta_1 + m_2 v'_2 \cos \vartheta_2 \\ \text{pro y-ovou složku} \quad 0 &= m_1 v'_1 \sin \vartheta_1 - m_2 v'_2 \sin \vartheta_2 \end{aligned} \quad (3.14)$$

Třetí rovnice je znění zákona zachování kinetické energie soustavy

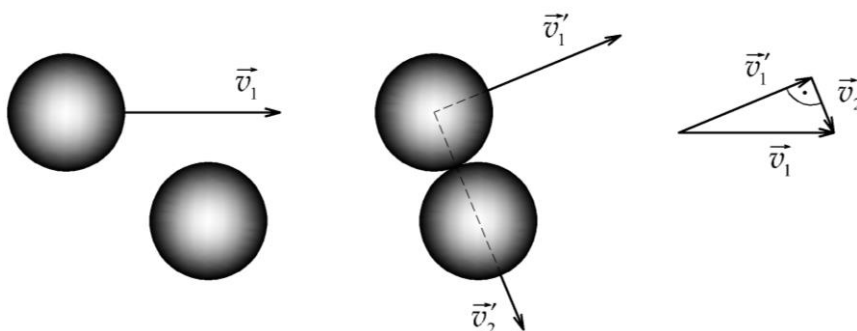
$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 \quad (3.15)$$

V rovnicích (3.14) a (3.15) jsou celkem 4 neznámé $v'_1, v'_2, \vartheta_1, \vartheta_2$. Další rovnice záleží na parametru srážky, a často bývá sestavena z experimentálně stanovených úhlů srážky.

Pro jednoduchý případ, kdy hmotnosti m_1 a m_2 jsou stejné, srážka probíhá mezi stejnými částicemi, z nichž jedna je na počátku v klidu, platí

$$\begin{aligned} m_1 \vec{v}_1 &= m_1 \vec{v}'_1 + m_1 \vec{v}'_2 \\ \vec{v}_1 &= \vec{v}'_1 + \vec{v}'_2 \end{aligned} \quad (3.16)$$

Jak vyplývá ze vztahu (3.16), mezi vektory rychlostí platí jednoduchý vztah.



Obr. 3.2

Pro pružnou srážku dále platí zákon zachování kinetické energie

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_1 v_2'^2,$$

a protože je m_1 rovno m_2 , dostaneme jednodušší vztah pro rychlosti

$$\vec{v}_1^2 = \vec{v}_1'^2 + \vec{v}_2'^2 . \quad (3.17)$$

Podle vztahu (3.16) můžeme z vektorů vytvořit trojúhelník, který je na obr. 3.2. Vztah (3.17) je Pythagorova věta pro tento trojúhelník. Rychlosti \vec{v}_1' , \vec{v}_2' částic po srážce navzájem kolmé.

3.3 Těžišťová soustava

Z rovnic (3.8) a (3.12) vyplývá, že rychlost středu hmotnosti soustavy zůstává po srážce nezměněna. Proto je často výhodné řešit srážku v referenčním systému pevně spojeném se středem hmotnosti. V této souřadnicové soustavě je střed hmotnosti v klidu a celková hybnost soustavy je nulová. Soustava se nazývá **těžišťová**. Vyřešme v těžišťové soustavě jednorozměrný případ pružné srážky dvou částic o hmotnostech m_1 a m_2 .

Je-li hybnost středu hmotnosti soustavy dvou hmotných bodů nulová, pak pro hybnost hmotného bodu 1 a hybnost hmotného bodu 2 platí

$$\vec{p}_1 = -\vec{p}_2 \quad (3.18)$$

a velikosti hybností částic s hmotnostmi m_1 a m_2 před srážkou jsou si rovny. Kinetická energie soustavy před srážkou je

$$W_k = \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} = p_1^2 \left(\frac{1}{2m_1} + \frac{1}{2m_2} \right) \quad (3.19)$$

a pro případ pružné srážky je kinetická energie po srážce stejná

$$W_k = p_1'^2 \left(\frac{1}{2m_1} + \frac{1}{2m_2} \right), \quad (3.20)$$

kde jsme použili analogicky se vztahem (3.18) relaci $\vec{p}_1' = -\vec{p}_2'$ pro hybnosti částic po srážce. Srovnáním rovnic (3.19) a (3.20) dostaneme

$$p_1^2 = p_1'^2 . \quad (3.21)$$

Jestliže z rovnice (3.21) stanovíme relaci mezi vektory hybnosti jedné částice před a po srážce, dostaneme dvě možná řešení. V prvním případě platí pro první i druhou částici

$$\begin{aligned} \vec{p}_1 &= \vec{p}_1' \\ \vec{p}_2 &= \vec{p}_2' \end{aligned} \quad (3.22)$$

a znaménko (+) odpovídá tedy triviálnímu případu, tj. nerealizované srážce, hybnosti zůstávají stejné. V druhém případě pro znaménko (−) je

$$\begin{aligned}\vec{p}_1 &= -\vec{p}'_1, & \vec{p}_2 &= -\vec{p}'_2 \\ \vec{v}_1 &= -\vec{v}'_1, & \vec{v}_2 &= -\vec{v}'_2 .\end{aligned}\tag{3.23}$$

Vidíme, že řešení srážky dvou částic v těžišťové soustavě je velmi jednoduché. Z rovnice (3.23) vyplývá, že velikost rychlostí i energie částic po srážce zůstávají takové, jako byly před srážkou, protože směr rychlostí se pouze změnil na opačný.

Kromě těžišťové soustavy jako referenční soustavu často zavádíme **laboratorní soustavu**. V laboratorní soustavě se předpokládá, že jedna částice se pohybuje a druhá (terčová) je před srážkou v klidu. Laboratorní soustava dobře vyhovuje případům často řešeným v jaderné fyzice, a to v problematice jaderných reakcí, kdy terčové jádro můžeme vzhledem k rychlosti náletávajících částic považovat za nehybné.

Rychlost středu hmotnosti soustavy hmotných bodů v laboratorní soustavě je pak určena vztahem

$$\vec{v}_s = \frac{m_1 \vec{v}_1}{m_1 + m_2} .\tag{3.24}$$

Transformační vztahy mezi laboratorní a těžišťovou soustavou jsou jednoduché. Stačí si uvědomit, že střed hmotnosti je v těžišťové soustavě v klidu a v laboratorní se pohybuje rychlostí danou vztahem (3.24).

Pomocí těchto dvou referenčních soustav, zejména těžišťové, v které, jak jsme poznali, jsou vztahy pro hybnosti a rychlosti jednoduché, je možno řešit řadu fyzikálních úloh. Zejména jsou významné vztahy, které řeší energetickou bilanci, tj. jakou energii předá během srážky první částice druhé a naopak. Z energetické bilance například vyplyne, že největší část své kinetické energie předá částice v pružné srážce pouze tehdy, má-li druhá částice přibližně stejnou hmotnost. Tento poznatek je s úspěchem využíván při výběru látek vhodných pro zpomalování neutronů pružnými srážkami v jaderných reaktorech. Přednostně se volí látky bohaté na vodík, protože hmotnost vodíkových jader je jen o málo menší než hmotnost neutronu.

3.4 Soustavy s proměnnou hmotností – princip pohybu rakety

Ačkoliv hmotnost částice jsme v klasické mechanice zatím vždy považovali za konstantní, potřebujeme se v některých případech zabývat problémem, v kterém se hmotnost mění. Takovým případem je pohyb rakety, která při svém pohybu spaluje palivo, a proto se její hmotnost zmenšuje. Uvažujeme-li však soustavu tvořenou raketou a vyhořelým palivem, můžeme v kterémkoliv čase t použít bilanci pro hybnost celé soustavy. Je-li hmotnost rakety s palivem m a raketa se pohybuje v čase t rychlostí \vec{v} vůči Zemi, pak hybnost $\vec{p}(t)$ je dána obvyklým vztahem

$$\vec{p}(t) = m\vec{v}(t) .\tag{3.25}$$

Po uplynutí času dt je hmotnost rakety menší o dm (hmotnost spáleného paliva) a rychlost rakety se zvýší o $d\vec{v}$. Zákon zachování hybnosti v čase $(t + dt)$ pro soustavu raketa a palivo můžeme zapsat ve tvaru

$$\vec{p}(t + dt) = (m - dm)(\vec{v} + d\vec{v}) + dm_p \vec{v}_p, \quad (3.26)$$

kde \vec{v}_p je rychlost plynů měřená ve stejné referenční soustavě jako rychlost rakety (např. vzhledem k Zemi), dm_p je hmotnost plynů.

Pro změnu hybnosti $d\vec{p}$ za čas dt po odečtení rovnic (3.26) a (3.25) dostaneme:

$$d\vec{p} = \vec{p}(t + dt) - \vec{p}(t) = (m d\vec{v} - \vec{v} dm + dm_p \vec{v}_p), \quad (3.27)$$

kde jsme zanedbali člen vyššího řádu $dm d\vec{v}$.

Protože $dm_p = -dm$, můžeme zapsat rovnici (3.27) ve tvaru

$$d\vec{p} = m d\vec{v} - \vec{v}_r dm$$

a po derivování

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m d\vec{v} - \vec{v}_r dm) = \vec{F}, \quad (3.28)$$

kde $\vec{v}_r = \vec{v}_p + \vec{v}$ představuje relativní rychlost raketových plynů vzhledem k raketě, \vec{F} je výslednice vnějších sil působících na soustavu raketa + plyny. Po úpravě rovnice (3.28) dostaneme pohybovou rovnici pro raketu ve tvaru

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \vec{v}_r \frac{dm}{dt}. \quad (3.29)$$

Pokud je soustava izolovaná ($\vec{F} = 0$), pak má pohybová rovnice tvar

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{v}_r \frac{dm}{dt}. \quad (3.30)$$

Jestliže předpokládáme, že $\frac{dm_p}{dt}$ je konstantní, můžeme označit $\frac{dm_p}{dt} = \mu$ a potom s využitím $dm_p = -dm$ dostaneme

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{dm_p}{dt} = -\mu \Rightarrow m = \int_0^t \mu dt = -\mu t + m_0, \quad (3.31)$$

kde m_0 je hmotnost rakety v čase $t = 0$. Po dosazení z (3.31) do (3.30) pro $d\vec{v}$ dostáváme

$$d\vec{v} = -\frac{\mu}{m_0 - \mu t} \vec{v}_r dt .$$

Integrací této rovnice určíme okamžitou rychlost rakety \vec{v} podle vztahu

$$\vec{v} = -\vec{v}_r \ln \frac{m_0}{m} + \vec{v}_0 , \quad (3.32)$$

kde \vec{v}_0 je rychlost rakety v čase $t = 0$.

3.5 Tuhé těleso

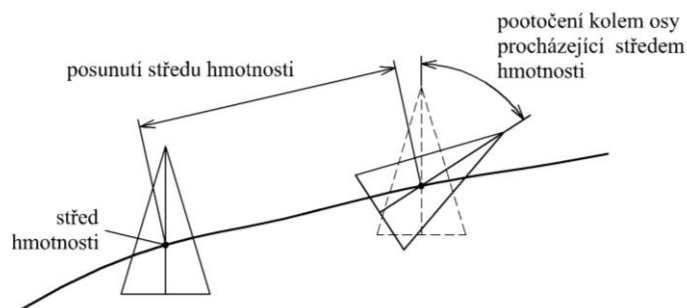
Zatím jsme při řešení problémů vystačili s představou hmotného bodu, případně soustavy hmotných bodů. Jestliže si jako další úlohu vybereme rotační pohyb kruhové desky kolem pevné osy, nemůžeme již tuto desku považovat za hmotný bod nebo částici, protože jednotlivé hmotné body desky konají rotační pohyb s různou rychlostí a zrychlením. Na desku musíme nahlížet jako na soustavu částic, přesněji, musíme ji rozdělit na jednotlivé části, jejichž rozměry jsou tak malé, že změnu rychlosti ani zrychlení v rámci jednotlivé části není třeba uvažovat. Jakmile se kruhová deska pohybuje, a není rozhodující jakým způsobem, projevuje se skutečnost, že **vzdálenost dvou hmotných bodů (elementů) zůstává konstantní**. Takovou soustavu nazýváme **tuhé těleso**. Ačkoliv všechna tělesa v přírodě jsou deformovatelná, představa tuhého tělesa jako idealizujícího modelu je velice užitečná, protože zjednodušuje analýzu pohybu.

V dalších odstavcích budeme při popisu pohybu tuhého tělesa často vycházet z představy soustavy diskrétních hmotných bodů, ačkoliv každé těleso je tvořeno spojitě rozprostřenou hmotností. S jednotlivými elementárními částmi tuhého tělesa budeme pracovat jako s hmotnými body, protože takový popis bude názornější a matematická náročnost výpočtů bude menší.

Tuhé těleso je tedy soustava hmotných bodů, která má díky podmínce konstantní vzdálenosti dvou bodů (vazbě, odst. 3.1) **snížený počet stupňů volnosti**. Zvolme si v této soustavě libovolný hmotný bod. Můžeme ho považovat za volný a má tedy 3 stupně volnosti. Pro jakýkoliv druhý bod musí být naplněn požadavek konstantní vzdálenosti od prvního bodu, a proto se může pohybovat jen po povrchu koule, jejíž poloměr je daná vzdálenost. Pohybu po ploše odpovídají 2 stupně volnosti. Libovolný třetí bod je omezen ještě více, protože musí udržovat konstantní vzdálenost od prvního i druhého bodu. Může se tedy pohybovat jen po kružnici se středem na spojnici prvního a druhého bodu. Pohybu po křivce přísluší 1 stupeň volnosti. Každý další bod už nemá žádný stupeň volnosti.

Každé tuhé těleso, složené nejméně ze tří hmotných bodů, má tedy 6 stupňů volnosti. K určení jeho pohybového stavu je třeba řešit 2 vektorové (6 skalárních) rovnice a znát 12 okrajových podmínek. Tyto pohybové rovnice se nazývají impulzové věty a odvodíme je později.

Pomocí jednoduchých úvah dokážeme, že pro tuhé těleso lze v každém okamžiku změnu polohy složit z **translačního pohybu středu hmotnosti** soustavy a **rotace tělesa** kolem okamžité osy procházející tímto středem. Toto tvrzení ilustruje i obr. 3.3.



Obr. 3.3

Tuhé těleso tedy modelově popisujeme jako soustavu hmotných bodů, které se nemohou vůči sobě pohybovat. Ve skutečnosti je třeba předpokládat, že hmota tělesa je spojitě rozložena v prostoru. Těleso pak rozdělíme na elementy o hmotnosti dm a objemu dV , jejichž rozměry musí být zanedbatelně malé vůči rozměrům celého tělesa. Hustota ρ se v obecném případě může měnit místo od místa, ρ je funkcí $\rho(x, y, z)$. Pro hmotnost dílčího hmotného elementu dm platí vztah

$$dm = \rho dV .$$

Protože je v tuhém tělese takových elementů nekonečně mnoho, nemůžeme stanovit jejich počet a tedy je sečíst. Součty v rovnicích pro soustavu hmotných bodů přechází v integrály. Pro celkovou hmotnost tělesa m platí:

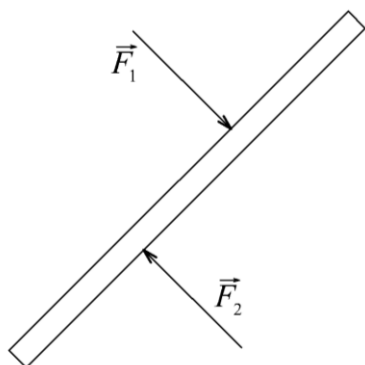
$$m = \int_{(m)} dm = \int_{(V)} \rho dV . \quad (3.33)$$

Je-li těleso homogenní, je hustota ρ konstantní a můžeme pro ni psát zjednodušený vztah

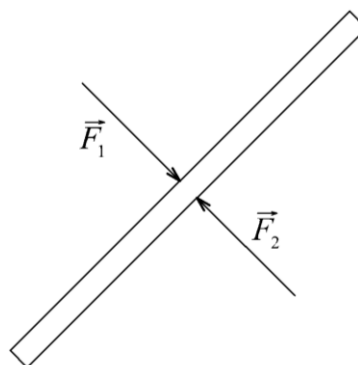
$$\rho = \frac{m}{V} .$$

3.6 Statická rovnováha tuhého tělesa

Jestliže částice (hmotný bod) je v rovnováze, tj. nachází se v klidu nebo pohybu rovnoměrném přímočarém, znamená to, že výslednice všech vnějších sil, které na ni působí je nulová. Ukazuje se, že tato podmínka (nulová vnější síla) není postačující pro rovnováhu tuhého tělesa. Na obr. 3.4 a, b je tuhé těleso ve tvaru volné tyče, na nějž působí dvě stejně velké síly, v prvním případě (obr. 3.4 a) mají různé působišťe, v druhém případě (obr. 3.4 b) působí v jedné přímce. V prvním případě budou síly tyč natáčet, v druhém případě nikoliv.



Obr. 3.4 a



Obr. 3.4 b

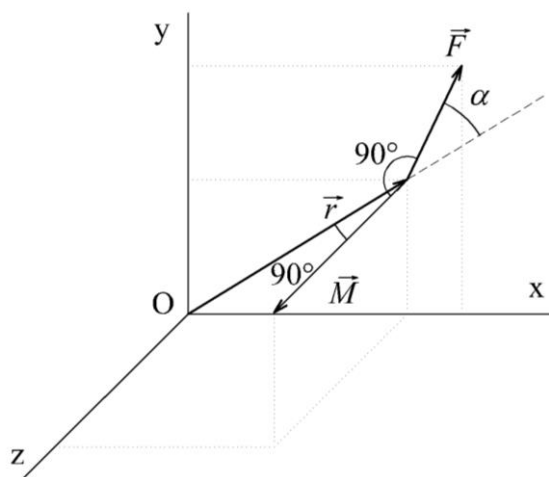
Otáčivý účinek síly vzhledem k určitému bodu v prostoru charakterizuje **moment síly**. Vyjádříme-li jeho velikost M pomocí velikosti polohového vektoru (obr. 3.5), který má počátek v bodě O a koncový bod v působišti síly a pomocí velikosti síly F , platí

$$M = rF \sin \alpha , \quad (3.34)$$

kde α je úhel mezi vektory \vec{r} , \vec{F} . Výraz (3.34) představuje velikost vektorového součinu vektorů. Moment síly je definován vztahem

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} , \quad (3.35)$$

kde záleží na pořadí vektorů \vec{r} , \vec{F} . Záměnou pořadí za $\vec{F} \times \vec{r}$ dostaneme vektor $-\vec{M}$. Moment síly je kolmý na rovinu vektorů \vec{r} , \vec{F} . Vymizí, jestliže vektory leží v jedné přímce ($\sin \alpha = 0$).



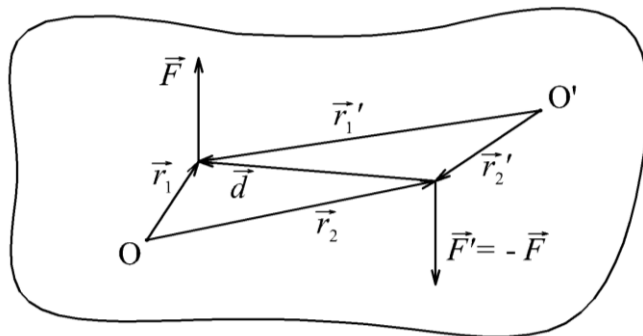
Obr. 3.5

Dvě rovnoběžné síly, stejně veliké a opačné orientace s působišti na dvou různých přímkách (obr. 3.4 a) se nazývají **silová dvojice**.

Moment silové dvojice působící na tuhé těleso můžeme vypočítat jako součet momentů jednotlivých sil vzhledem k libovolně zvolenému bodu O

$$\vec{M} = \vec{r}_1 \times \vec{F} + \vec{r}_2 \times (-\vec{F}) = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F} = \vec{d} \times \vec{F} . \quad (3.36)$$

Vektor \vec{d} je orientován od působíště síly $-\vec{F}$ k působíšti síly \vec{F} . Moment silové dvojice, jak vyplývá z obr. 3.6 a ze vztahu (3.36) nezávisí na volbě bodu O.

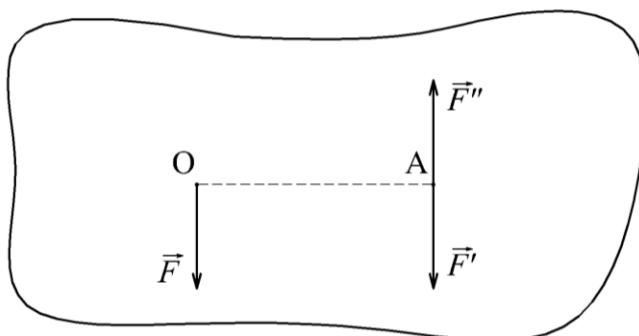


Obr. 3.6

V obecném případě, kdy na tuhé těleso působí různě velké síly různého směru, můžeme použít několik základních pravidel pro přesun a skládání sil. Působíště každé síly můžeme libovolně posunout po přímce, v které působí. Dynamický účinek síly na těleso se tím nezmění. Síly, které mají působíště ve společném bodu, můžeme vektorově složit. Působíště síly můžeme přemístit z bodu O do bodu A, obr. 3.7 mimo přímku, na které působí síla, jestliže v bodě A připojíme dvě síly, stejně velké a opačné orientace. Přemístěním působíště síly do bodu A jsme dostali navíc dvojici sil.

Aplikujeme-li uvedené postupy na síly $\vec{F}_1 \dots \vec{F}_n$ působící na tuhé těleso v různých bodech, můžeme jejich působíště přesunout do hmotného středu soustavy, kde je vektorově složíme ve výslednou sílu. Všechny vzniklé silové dvojice charakterizujeme jejich momenty a rovněž je všechny přesuneme do libovolného bodu tělesa a stanovíme výsledný moment síly.

Výsledná síla \vec{F} umístěná ve středu hmotnosti určuje translační pohyb tuhého tělesa a výsledný moment síly \vec{M} určuje rotační pohyb tělesa.



Obr. 3.7

Ukázali jsme, že silové působení vnějších sil na tuhé těleso můžeme vždy převést na jednu sílu, která způsobuje translaci tělesa a jednu dvojici sil, která způsobuje jeho rotaci. K tomu, aby nastala rovnováha tuhého tělesa, musí být

výslednice vnějších sil nulová

$$\sum_i \vec{F}_i = 0 \quad (3.37)$$

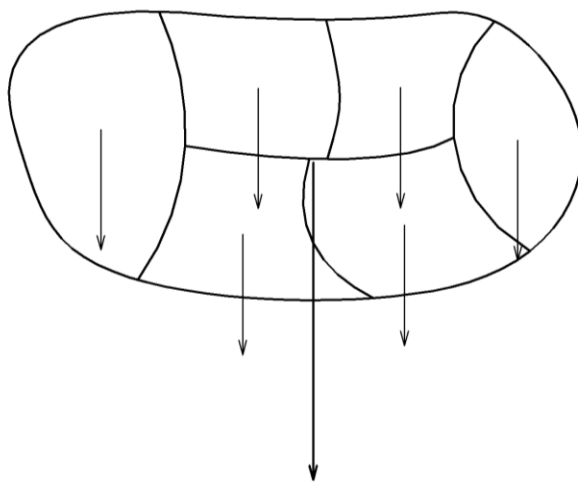
a výsledný moment sil nulový

$$\sum_i \vec{M}_i = \sum_i (\vec{r}_i \times \vec{F}_i) = 0 \quad , \quad (3.38)$$

kde \vec{r}_i jsou polohové vektory působení sil \vec{F}_i k libovolně zvolenému bodu. Platnost rovnice (3.38) nezávisí přitom na bodu, ke kterému stanovíme \vec{M} .

3.7 Těžiště a střed hmotnosti

Na obr. 3.8 je zobrazeno tuhé těleso umístěné v tíhovém poli Země, které je rozděleno do velmi malých částí, abychom je mohli považovat za hmotné body. Síla, kterou na každý hmotný bod působí homogenní tíhové pole, je $\vec{F}_{gi} = m_i \vec{g}$.



Obr. 3.8

Výslednou sílu působící na těleso dostaneme postupem popsaným v předchozím odstavci.

$$\vec{F}_g = \sum_i m_i \vec{g} \quad .$$

Působení síly umístíme do bodu, který nazveme **těžiště**. Jeho polohový vektor \vec{r}_T lze najít z podmínky rovnosti výsledného momentu síly \vec{F}_g a sumy momentů jednotlivých hmotných bodů (ke kterémukoliv bodu tělesa, například k počátku).

$$\vec{r}_T \times \vec{F}_g = \sum_i (\vec{r}_i \times \vec{F}_{g_i}) = \sum_i (\vec{r}_i \times m_i \vec{g}) ,$$

což lze upravit

$$\vec{r}_T m \times \vec{g} = \sum_i (\vec{r}_i m_i \times \vec{g}) .$$

Tato rovnice platí zcela obecně, a proto

$$\vec{r}_T = \frac{1}{m} \sum_i \vec{r}_i m_i . \quad (3.39)$$

Výraz pro \vec{r}_T je shodný s výrazem ve vztahu (3.4) pro polohový vektor středu hmotnosti, a proto $\vec{r}_T = \vec{r}_s$.

S použitím vztahu (3.33) dostaneme výraz pro výpočet těžiště tuhého tělesa ve tvaru

$$\vec{r}_T = \frac{1}{m} \int_{(m)} \vec{r} dm .$$

Poloha těžiště je pro homogenní tíhové pole totožná se středem hmotnosti soustavy.

Rovnice (3.39) představuje tři složkové rovnice pro souřadnice x_T, y_T, z_T . Polohu těžiště tuhého tělesa můžeme stanovit buď experimentálně nebo výpočtem.

3.8 Dynamika tuhého tělesa, I. věta impulzová

Pohyb tuhého tělesa je složitější než pohyb hmotného bodu, protože tuhé těleso se kromě translačního pohybu může ještě otáčet.

Translace je pohyb, při kterém libovolná přímka pevně spojená s tělesem zachovává v prostoru směr. Trajektorie všech bodů tělesa při translačním (posuvném) pohybu jsou stejné a body se pohybují stejnou okamžitou rychlostí.

Rotace tělesa je pohyb, při kterém zůstává v klidu přímka v tělese. Pokud je poloha této přímky v čase konstantní, pak se jedná o rotaci kolem pevné osy. Jestliže se poloha této přímky s časem mění, jedná se o rotaci kolem okamžité osy. Při rotaci kolem pevné osy opisují body tuhého tělesa kružnice o různých poloměrech (s výjimkou osy rotace, na níž zůstávají body v klidu) v rovinách kolmých na osu rotace. Jejich obvodové rychlosti závisejí na vzdálenosti bodů od osy rotace. **Úhlové rychlosti jsou pro všechny body tělesa stejné.**

Translační pohyb středu hmotnosti soustavy byl diskutován v kapitole 3.1 a pohybovou rovnicí středu hmotnosti je rovnice (3.10). Velikost zrychlení hmotného středu se rovná velikosti působící síly dělené celkovou hmotností soustavy.

Vztah pro sílu

$$\vec{F} = m \frac{d^2 \vec{r}_s}{dt^2} = \frac{d\vec{p}}{dt}, \quad (3.40)$$

kde \vec{F} je výslednice všech vnějších sil, působících na tuhé těleso, se nazývá **I. impulzová věta**. První impulzová věta je pohybovou rovnicí hmotného středu, který reprezentuje celé těleso.

Rotační pohyb tuhého tělesa je podstatně komplikovanější, jestliže osa rotace mění při pohybu tělesa svůj směr v prostoru. Soustředíme se proto na rotační pohyb **kolem pevné osy** v prostoru. Kinematicky jsme tento pohyb řešili již v kap. 1.4 pro hmotný bod (body konají kruhový pohyb) a zavedli jsme všechny potřebné veličiny, tj. kromě okamžité rychlosti \vec{v} a zrychlení \vec{a} ještě úhlovou rychlost $\vec{\omega}$ a úhlové zrychlení $\vec{\varepsilon}$.

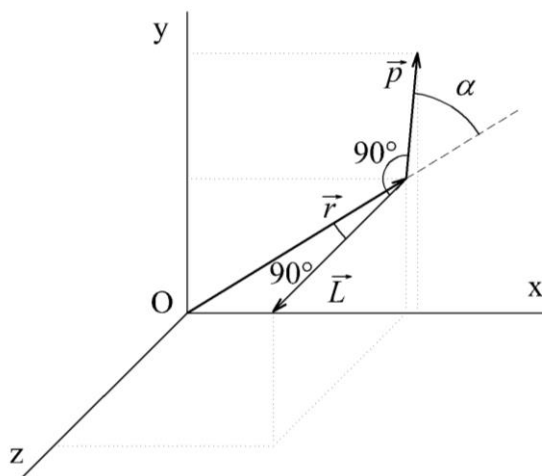
3.9 Rotace tuhého tělesa kolem pevné osy, II. věta impulzová

Uvažujme nejdříve pro jednoduchost **hmotný bod**. Jestliže na hmotný bod působí vnější síla \vec{F} , jejíž moment vzhledem k bodu O je \vec{M} (obr. 3.5), pak můžeme vztah pro tento moment zapsat jako

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt},$$

kde \vec{p} je hybnost hmotného bodu a pro vyjádření síly jsme použili 2. Newtonův zákon. Analogicky se zavedením momentu síly nyní můžeme definovat veličinu moment hybnosti. Pro částici hmotnosti m pohybující se rychlostí \vec{v} je **moment hybnosti** \vec{L} vzhledem k bodu O (obr. 3.9) definován vztahem

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}. \quad (3.41)$$



Obr. 3.9

Použijeme-li definiční vztah (3.41) pro moment hybnosti částice \vec{L} a provedeme derivaci podle času

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} ,$$

dostaneme

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} , \quad (3.42)$$

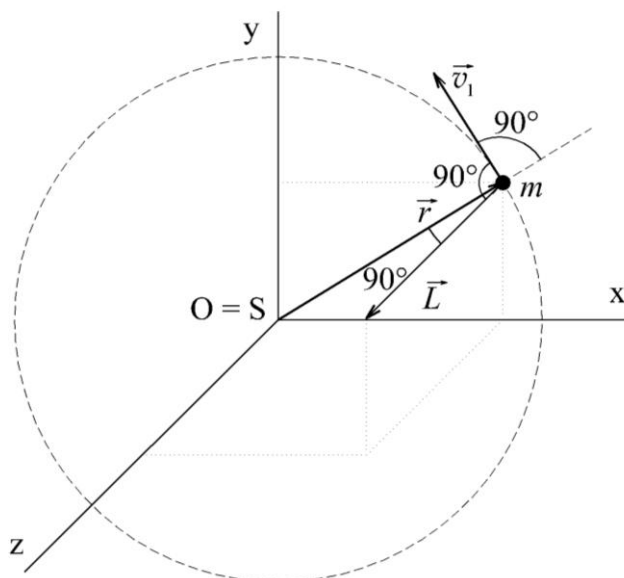
protože vektor $\frac{d\vec{r}}{dt}$ je rovnoběžný s \vec{p} a tedy $\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} = 0$. Výraz, který jsme získali na pravé straně rovnice (3.42), je vyjádření pro moment síly, a proto relaci můžeme přepsat do tvaru

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} . \quad (3.43)$$

Časová změna momentu hybnosti hmotného bodu je rovna výslednému momentu vnějších sil. Tuto úvahu, kterou jsme zatím provedli pro hmotný bod, zobecníme a ukážeme, že platí pro soustavu hmotných bodů, tedy i tuhé těleso.

Příklad výpočtu momentu hybnosti

Částice hmotnosti m se pohybuje po kruhové dráze o poloměru r (obr. 3.10). Rychlost částice je \vec{v} a velikost úhlové rychlosti ω . Jako rovinu pohybu zvolíme xy .



Obr. 3.10

Pro velikost momentu hybnosti částice vzhledem ke středu křivky lze psát

$$|\vec{L}| = |\vec{r} \times \vec{p}| = |\vec{r} \times m\vec{v}| = rmv = mr^2\omega .$$

Moment hybnosti částice má tentýž směr jako úhlová rychlost. Jestliže na částici bude působit pouze dostředivá síla, potom moment síly bude nulový a podle (3.43) moment hybnosti částice bude konstantní.

Zatím jsme se zabývali výpočtem momentu hybnosti jedné částice. V případě soustavy hmotných bodů (částic) je celkový moment hybnosti

$$\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i .$$

Předpokládejme jednoduchý případ, že soustava je tuhé těleso rotující kolem osy symetrie, pak pro jednotlivé elementy můžeme použít vztahy z předchozího příkladu pro jednu částici

$$\vec{L}_i = m_i r_i^2 \vec{\omega} ,$$

kde $\vec{\omega}$ je stejná pro všechny elementy tělesa. Jestliže provedeme sumaci přes všechny body tělesa, dostaneme

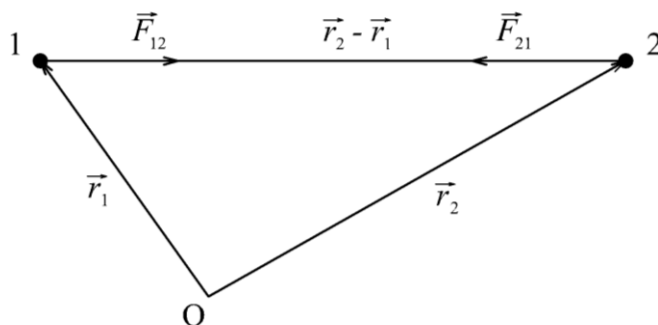
$$\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i = \left(\sum_i m_i r_i^2 \right) \vec{\omega} . \quad (3.44)$$

Tento vztah (jak jsme předpokládali) platí pro těleso nebo soustavu rotující kolem pevné osy procházející těžištěm (středem hmotnosti).

Pro výsledný moment sil \vec{M} působící na soustavu částic lze analogicky s (3.43) napsat

$$\vec{M} = \sum_i \vec{M}_i = \sum_i \frac{d\vec{L}_i}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\sum_i \vec{L}_i \right) = \frac{d\vec{L}}{dt} , \quad (3.45)$$

kde \vec{M}_i jsou pouze momenty vnějších sil.



Obr. 3.11

Pro momenty vnitřních sil působících mezi jednotlivými částicemi lze dokázat (obr. 3.11), že jejich výslednice je nulová (podobně jako pro vnitřní síly).

Výsledný moment vnitřních sil \vec{F}_{12} a \vec{F}_{21} působících mezi částicemi 1 a 2 dostaneme složením obou momentů například k bodu O

$$\vec{M}_1 + \vec{M}_2 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_{12} + \vec{r}_2 \times \vec{F}_{21} = (\vec{r}_1 \times \vec{F}_{12}) + [\vec{r}_2 \times (-\vec{F}_{12})] = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F}_{12} = 0 .$$

Síly působící mezi částicemi jsou párové, momenty těchto sil tedy vymizí. Vztah

$$\vec{M} = \sum_i \vec{M}_i = \frac{d\vec{L}}{dt} \quad (3.46)$$

je zobecněním vztahu (3.43) pro soustavu hmotných bodů a tuhé těleso. Vztah (3.46) se nazývá **II. impulzová věta** a charakterizuje rotační pohyb tuhého tělesa.

Jestliže výsledný moment vnějších sil je nulový, pak levá strana rovnice (3.43) je rovna nule a platí

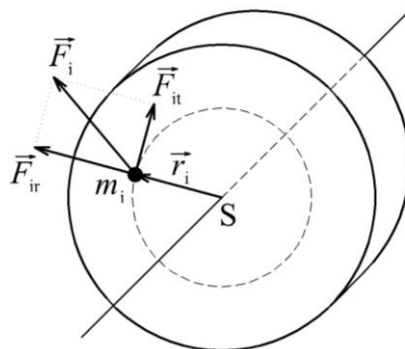
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 . \quad (3.47)$$

Rovnice (3.47) představuje další důležitý zákon zachování, **zákon zachování momentu hybnosti izolované soustavy**. Zatím jsme se setkali s třemi zákony zachování pro izolované soustavy: zákon zachování energie, hybnosti, momentu hybnosti. Pro mikroskopické objekty, kde Newtonova mechanika přestává platit, zůstává zákon zachování momentu hybnosti pro izolované soustavy v platnosti.

3.10 Moment setrvačnosti tuhého tělesa

Nutná podmínka, která musí být splněna, aby tuhé těleso nerotovalo, je podle (3.38) nulový moment síly vzhledem k libovolnému bodu tělesa. Všimněme si, že ačkoliv je to podmínka nutná, není postačující k tomu, aby se těleso nacházelo v klidu. Jestliže těleso již rotuje kolem pevné osy a nepůsobí žádný vnější moment síly, těleso bude pokračovat v rotaci s konstantní úhlovou rychlostí. S analogickou situací jsme se již setkali v případě posuvného pohybu, kdy těleso může také setrvávat v pohybu rovnoměrně přímočarém, i když na něj nepůsobí žádná vnější síla. Jestliže existuje nenulový moment síly, tj. na těleso působí v určitém bodě mimo osu otáčení síla (obr. 3.12), ukážeme, že tuhé těleso bude rotovat s úhlovou rychlostí, která bude záviset na působícím momentu síly. **Úhlové zrychlení tělesa bude úměrné momentu síly.**

Tuhé těleso ve tvaru desky je upevněno tak, že osa otáčení kolmá na rovinu desky prochází těžištěm. Těleso budeme považovat za soustavu hmotných bodů. Nechť na bod o hmotnosti m_i kruhové desky působí síla \vec{F}_i (obr. 3.12).



Obr. 3.12

Rozložme sílu \vec{F}_i na dvě navzájem kolmé síly \vec{F}_{ir} a \vec{F}_{it} . Síla \vec{F}_{ir} ve směru poloměru neovlivňuje rotaci (moment síly je nulový), ovlivňuje ji pouze síla \vec{F}_{it} kolmá k \vec{r}_i . Velikost momentu síly \vec{F}_{it} (vzhledem ke středu S) působící na hmotný bod m_i je

$$M_i = F_{it} r_i .$$

Podle 2. Newtonova zákona můžeme napsat

$$F_i = m_i a_i = m_i r_i \varepsilon ,$$

kde jsme použili vztah mezi velikostí tečného a úhlového zrychlení $a_i = r_i \varepsilon$. Po dosazení do vztahu pro velikost momentu síly dostaneme

$$M_i = m_i r_i^2 \varepsilon .$$

Jedná-li se o soustavu částic, pak velikost celkového momentu sil M dostaneme jako součet jednotlivých M_i

$$\sum_i M_i = \sum_i m_i r_i^2 \varepsilon , \quad (3.48)$$

kde sčítáme přes všechny hmotné body soustavy.

Výraz $\sum_i m_i r_i^2 = I$ je charakteristický pro danou soustavu částic a nazývá se **moment setrvačnosti**. Podle vztahu (3.33), jestliže vezmeme v úvahu spojité rozdělení hmotnosti, můžeme pro tuhé těleso psát

$$I = \int_{(m)} r^2 dm .$$

Úhlové zrychlení je konstantní pro všechny body. Rovnici (3.48) můžeme přepsat do tvaru

$$\vec{M} = \sum_i \vec{M}_i = I \vec{\varepsilon} . \quad (3.49)$$

Tato rovnice charakterizující rotační pohyb soustavy je analogická pohybové rovnici pro translační pohyb vyplývající z 2. Newtonova zákona. Je to **pohybová rovnice pro rotační pohyb tělesa kolem pevné osy**.

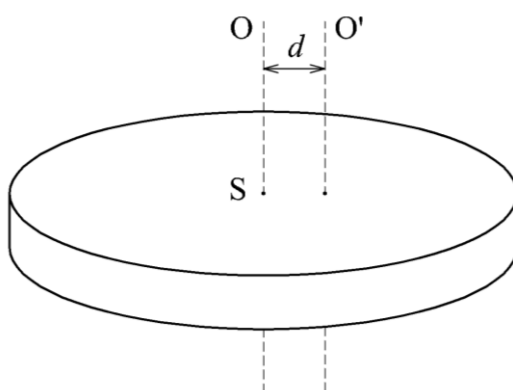
Dosažením $\sum_i m_i r_i^2 = I$ do rovnice (3.44) dostaneme vztah mezi I a \vec{L}

$$\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i = \left(\sum_i m_i r_i^2 \right) \vec{\omega} = I \vec{\omega} .$$

Zákon zachování momentu hybnosti pro izolovanou soustavu $\vec{L}_1 = \vec{L}_2$ můžeme napsat ve tvaru:

$$I_1 \omega_1 = I_2 \omega_2 .$$

Známe-li moment setrvačnosti I_0 vzhledem k některé ose procházející těžištěm, můžeme stanovit moment setrvačnosti vzhledem ke každé ose ve vzdálenosti d , která je s ní **rovnoběžná** (obr. 3.13).



Obr. 3.13

Moment setrvačnosti k rovnoběžné ose je dán vztahem, který se nazývá **Steinerova věta**. Platí

$$I = I_0 + md^2 .$$

3.11 Kinetická energie tělesa rotujícího kolem pevné osy

Jestliže se rotující deska upevněná v těžišti (obr. 3.12) otočí o malý úhel $d\varphi$, hmotný bod m_i vykoná dráhu $ds_i = r_i d\varphi$. Práce dW_i vykonaná silou \vec{F}_i působící na hmotný bod je

$$dW_i = F_{it} ds_i = M_i d\varphi ,$$

kde F_{it} je složka síly \vec{F}_i do směru pohybu.

Obecně, práce vykonaná působením výsledného momentu síly o velikosti M při potočení tělesa o malý úhel $d\varphi$ je

$$dA = M d\varphi . \quad (3.50)$$

Pro výkon P platí

$$P = \frac{dA}{dt} = M \omega , \quad (3.51)$$

kde jsme pro vyjádření práce použili vztah (3.50). Tuto rovnici lze napsat i ve vektorovém tvaru

$$P = \vec{M} \cdot \vec{\omega} . \quad (3.52)$$

Práce vykonaná při potočení soustavy se projeví změnou její kinetické energie. Pro desku rotující kolem osy procházející těžištěm bude zvýšení kinetické energie rovné součtu přírůstků kinetických energií jednotlivých hmotných bodů soustavy vzhledem k těžišti. Kinetická energie W_k je pro tento pohyb dána vztahem

$$W_k = \sum_i \frac{1}{2} m v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} \omega^2 m r_i^2 = \frac{1}{2} I \omega^2 . \quad (3.53)$$

Výraz na pravé straně udává **kinetickou energii tělesa rotujícího kolem pevné osy**.

Výraz (3.53) pro kinetickou energii rotačního pohybu je analogický vztahu pro energii translačního pohybu.

Tuhé těleso, které koná zároveň translační pohyb s okamžitou rychlostí velikosti v a rotační pohyb kolem pevné osy s úhlovou rychlostí ω , můžeme charakterizovat kinetickou energií, která má velikost

$$W_k = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 . \quad (3.54)$$

Pro translační a rotační pohyb lze uvést analogické veličiny, pro které platí formálně stejné vztahy:

translační pohyb	rotační pohyb
posunutí ds	úhlové posunutí $d\varphi$
rychlost \vec{v}	úhlová rychlost $\vec{\omega}$
zrychlení \vec{a}	úhlové zrychlení $\vec{\varepsilon}$
hmotnost m	moment setrvačnosti I
hybnost $\vec{p} = m\vec{v}$	moment hybnosti $\vec{L} = I\vec{\omega}$
síla \vec{F}	moment síly \vec{M}
výkon $P = \vec{F} \cdot \vec{v}$	výkon $P = \vec{M} \cdot \vec{\omega}$
pohyb. rovnice $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\vec{a}$	pohyb. rovnice $\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = I\vec{\varepsilon}$

3.12 Příklady ke kap. 3

Příklad 3.1

Dva hmotné body 1, 2 s hmotnostmi $m_1 = 20 \text{ g}$ a $m_2 = 40 \text{ g}$ se navzájem pohybují a to tak, že bod 1 se pohybuje s konstantním zrychlením $\vec{a}_1 = (2, 0, 0) \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, bod 2 s konstantní rychlostí $\vec{v}_2 = (0, 3, 0) \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. V čase $t = 0 \text{ s}$ byl bod 1 v počátku souřadnic v klidu, bod 2 byl vzdálen od počátku souřadnic o 1,5 m v kladném směru osy x.

Vypočítejte:

- polohu hmotného středu soustavy v čase $t = 0 \text{ s}$,
- pohybovou rovnici pro hmotný střed soustavy,
- polohu hmotného středu soustavy v čase $t = 10 \text{ s}$.

Řešení:

- a) Souřadnice polohy hmotného středu jsou definovány rovnicemi

$$x_s = \frac{1}{m_1 + m_2} (x_1 m_1 + x_2 m_2), \quad y_s = \frac{1}{m_1 + m_2} (y_1 m_1 + y_2 m_2) \text{ a po dosazení pro } t = 0 \text{ s,}$$

$$x_s(0) = \frac{1}{(20 + 40) \cdot 10^{-3}} \cdot (0 \cdot 20 + 1,5 \cdot 40) \cdot 10^{-3} = 1 \text{ m,}$$

$$y_s(0) = \frac{1}{(20 + 40) \cdot 10^{-3}} \cdot (0 \cdot 20 + 0 \cdot 40) \cdot 10^{-3} = 0 \text{ m.}$$

- b) Hmotný střed soustavy se pohybuje se zrychlením pouze ve směru osy x. Síla působící ve směru x má velikost $F_x = (m_1 + m_2)a_x$. Další složky síly jsou $F_y = 0, F_z = 0$.

- c) Integrací pohybových rovnic stanovíme složky rychlosti

$v_x = \int a_x dt = a_x t + C_1 = a_x t$. Konstanta C_1 je vzhledem k daným počátečním podmínkám nulová, $v_y = \int a_y dt = \int 0 dt = C_2 = v_y$, hmotný bod se pohybuje ve směru osy y rovnoměrným pohybem. Pro polohu hmotného středu v čase t integrací dostaneme vztahy

$$x_s = \int v_x dt = \int a_x t dt = \frac{1}{2} a_x t^2 + C_3 = \frac{1}{2} a_x t^2 + x_s(0),$$

$$y_s = \int v_y dt = v_y t + C_4 = v_y t + y(0),$$

kde hodnoty integračních konstant C_3, C_4 vyplývají z počátečních podmínek. Po dosazení $t = 10 \text{ s}$, jsou hodnoty souřadnic hmotného středu

$$x_s = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{0,02}{0,02 + 0,04} \right) 2 \cdot 100 + 1 = 34,3 \text{ m, } y_s = 3 \cdot 10 + 0 = 30 \text{ m.}$$

Příklad 3.2

Setrvačnick se otáčí konstantní úhlovou rychlostí, která odpovídá frekvenci $f_0 = 5 \text{ s}^{-1}$. Jeho kinetická energie je $W_k = 9 \cdot 10^{-1} \text{ J}$. V čase $t = 10 \text{ s}$ na něho začne působit kroučící moment o velikosti $M = 60 \cdot 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{m}$.

Vypočítejte:

- moment setrvačnosti J setrvačnicku,

- b) velikost úhlového zrychlení ε setrvačnicku,
- c) dobu, ve které bude jeho okamžitá úhlová rychlost dvojnásobná ve srovnání s původní,
- d) práci potřebnou k pootočení setrvačnicku o 90° .

Řešení:

- a) Pro kinetickou energii rotujícího setrvačnicku platí vztah $W_k = \frac{1}{2} J \omega^2 = \frac{1}{2} J (2\pi f)^2$,

z kterého můžeme vypočítat moment setrvačnosti setrvačnicku

$$J = \frac{2W_k}{4\pi^2 f^2} = \frac{W_k}{2\pi^2 f^2} = \frac{9 \cdot 10^{-1}}{2 \cdot 3,14^2 \cdot 5^2} = 1,83 \cdot 10^{-3} \text{ J}$$

- b) V čase $t = 10$ s, kdy začne působit krouticí moment, setrvačnick získá zrychlení, které určíme ze vztahu $M = J\varepsilon$ a po dosazení $\varepsilon = \frac{M}{J} = \frac{60 \cdot 10^{-3}}{1,83 \cdot 10^{-3}} = 32,8 \text{ s}^{-2}$.

- c) Setrvačnick vykonává od desáté sekundy pohyb s konstantním zrychlením, a proto jeho okamžitá úhlová rychlost narůstá lineárně s časem. Platí $\omega = \int \varepsilon dt = \varepsilon t + C$, kde konstantu C určíme z počáteční podmínky. Konstanta $C = \omega_0 = 2\pi f_0$, a proto výsledný vztah pro je $\omega = \varepsilon t + \omega_0$. Dvojnásobnou úhlovou rychlost určíme z relace $2\omega_0 = \varepsilon t + \omega_0$ a odtud pro hledaný čas platí $t = \frac{\omega_0}{\varepsilon} = \frac{2\pi f_0}{\varepsilon} = \frac{2 \cdot 3,14 \cdot 5}{32,8} = 0,96 \text{ s}$.

- d) Práci potřebnou k pootočení setrvačnicku určíme ze vztahu $A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} M d\varphi$, integraci můžeme nahradit součinem $M\varphi$, protože působí konstantní krouticí moment.
 $A = 60 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{\pi}{2} = 9,42 \cdot 10^{-2} \text{ J}$.

Příklad 3.3

Kruhová vodorovná deska o poloměru $R = 1,5$ m a hmotnosti $m = 80$ kg se otáčí kolem svislé osy jdoucí středem desky frekvencí $f = 2 \text{ min}^{-1}$. Člověk hmotnosti $m_1 = 60$ kg stojí na okraji desky.

Vypočítejte:

- a) jak se změní úhlová rychlost otáčení desky, jestliže člověk přejde do středu desky (považujte jej za hmotný bod),
- b) jakou práci přitom člověk vykoná.

Řešení:

- a) Pro rotující těleso se zachovává součin $J\omega$. Při změně polohy člověka platí vztah $(J + m_1 R^2)\omega_1 = J\omega_2$, kde člen $m_1 R^2$ zohledňuje zvětšení momentu setrvačnosti při přechodu člověka na okraj desky, ω_1 je odpovídající úhlová rychlost pohybu. Po dosazení za moment setrvačnosti desky dostaneme

$$\left(\frac{1}{2}mR^2 + m_1R^2\right)\omega_1 = \frac{1}{2}mR^2\omega_2,$$

$$\left(\frac{1}{2}m + m_1\right)\omega_1 = \frac{1}{2}m\omega_2,$$

$$\omega_2 = \frac{m + 2m_1}{m}\omega_1, \quad \Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \frac{2m_1}{m}\omega_1 = \frac{2 \cdot 60}{80} \cdot 2 \cdot 3,14 \cdot 2 \cdot \frac{1}{60} = 0,314 \text{ s}^{-1}.$$

Úhlová rychlost se zvětší o $0,314 \text{ s}^{-1}$.

- b) Pokud neuvažujeme tření, je vykonaná práce rovna změně kinetické energie soustavy deska + člověk. Platí vztah

$$A = \frac{1}{2}J\omega_2^2 - \frac{1}{2}(J + m_1R^2)\omega_1^2 \text{ a po dosazení}$$

$$A = \frac{1}{4} \cdot 80 \cdot 1,5^2 \cdot (0,523^2 - 0,209^2) - \frac{1}{2} \cdot 60 \cdot 1,5^2 \cdot 0,209^2 = 7,39 \text{ J}.$$

V případě tření je vykonaná práce větší než vypočtená hodnota.

4. Mechanika kontinua

4.1 Předmět mechaniky kontinua

Jestliže se zabýváme studiem chování reálného tělesa, měli bychom vyšetřovat chování všech jeho jednotlivých hmotných bodů. Uvážíme-li počet hmotných bodů, přesněji počet molekul nebo atomů například v 1 m^3 , dostaneme pro vzduch řádově 10^{25} molekul. Toto obrovské číslo, které může být pro jiné materiály ještě o několik řádů vyšší, nás opravňuje nahlížet na tělesa jako na objekty spojitě vyplněné látkou. Dostáváme se tak k odlišnému modelu reálných těles, než s jakým jsme zatím pracovali. Namísto modelu tělesa jako soustavy hmotných bodů je nutné vytvořit model kontinua, neboli model spojitého prostředí. Oba modely, soustava i kontinuum, mají svá oprávnění, a každý z nich se používá při řešení určitého typu problémů. Jestliže můžeme zanedbat změnu tvaru a velikosti tělesa, použijeme obvykle model tuhé soustavy hmotných bodů. Při řešení složitějších úloh, které jsou spojeny s deformací těles, je nutné použít model kontinua.

Mechanika kontinua se zabývá pohybem **deformovatelných těles**. Kontinuum může být buď ve stavu **pevném**, **kapalném** nebo **plynném**. Kapaliny a plyny obvykle označujeme jako **tekutiny**. Jednotlivé stavy kontinua se liší změnou tvaru a objemu při působení vnější síly. Pevná látka nemění svůj tvar ani objem, pouze se deformuje, kapalina mění tvar, ale nemění téměř svůj objem, plyn mění tvar i objem. Mezi vyjmenovanými stavy látky však nelze stanovit ostré hranice. Problémy, které mechanika kontinua řeší, jsou například

- **deformace**,
- **pohyb tekutin**,
- **vlnění** (šíření vln v prostředí, akustické vlny).

Všechny zákony klasické mechaniky, s kterými jsme se zatím seznámili, platí i pro kontinuum. Platí Newtonovy zákony i Newtonův gravitační zákon.

Model kontinua vychází z představy spojitě rozprostřené hmotnosti. V určitém časovém okamžiku charakterizujeme pohybový stav kontinua tak, že naměříme například v bodě A o polohovém vektoru \vec{r}_A elementární hmotnost $dm = dm(\vec{r}_A)$, rychlost $\vec{v} = \vec{v}(\vec{r}_A)$, zrychlení $\vec{a} = \vec{a}(\vec{r}_A)$ a v bodě B o polohovém vektoru \vec{r}_B elementární hmotnost $dm = dm(\vec{r}_B)$, rychlost $\vec{v} = \vec{v}(\vec{r}_B)$, zrychlení $\vec{a} = \vec{a}(\vec{r}_B)$. Všechny veličiny, \vec{v} , \vec{a} , i další, jsou na rozdíl od soustavy hmotných bodů, kde nabývaly diskrétních hodnot pro jednotlivé hmotné body, zobrazeny spojitými funkcemi z hlediska polohy. Celkovou hmotnost tělesa vyplněného spojitě rozprostřenou hmotností musíme, jak již bylo řečeno v kap. 3, stanovit integrálem

$$m = \int_{(M)} dm ,$$

kde integrujeme přes celé těleso. V případě soustavy hmotných bodů přechází integrál v sumaci přes diskrétně rozložené hmotné body, $m = \sum_i m_i$.

Použijeme-li pro spojitě rozprostřené prostředí při výpočtu hmotnosti integrální vztah, můžeme všechny známé vztahy pro parametry soustavy hmotných bodů přepsat na vztahy platné pro těleso se spojitě rozprostřenou hmotností (někdy budeme používat zkrácený výraz spojitě těleso).

Vztah pro polohu hmotného středu soustavy můžeme jednoduše změnit na vztah pro výpočet polohového vektoru hmotného středu tělesa se spojitě rozprostřenou hmotností, který má tvar

$$\vec{r}_s = \frac{1}{m} \int \vec{r} dm ,$$

kde \vec{r} je polohový vektor hmotného elementu dm . Pro rychlost hmotného středu tělesa platí relace

$$\vec{v}_s = \frac{1}{m} \int \vec{v} dm ,$$

a pro zrychlení

$$\vec{a}_s = \frac{1}{m} \int \vec{a} dm ,$$

kde \vec{v} , \vec{a} jsou rychlost, zrychlení hmotného elementu dm .

Další vztahy pro spojitě těleso, které jsou ekvivalentní vztahům zavedeným pro soustavu hmotných bodů, můžeme napsat i pro další veličiny, např. hybnost, moment hybnosti, moment setrvačnosti. Moment setrvačnosti je pro těleso spojitě vyplněné hmotností definován vztahem

$$I = \int r^2 dm , \tag{4.1}$$

kde r je vzdálenost hmotného elementu dm od osy otáčení a integraci provádíme přes celé těleso.

Pro těleso se spojitě rozprostřenou hmotností zavádíme veličinu **hustota** vztahem

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{dm}{dV} . \tag{4.2}$$

V limitním přiblížení nesmíme překročit při zmenšování ΔV jistý kritický rozměr, který je srovnatelný se vzdálenostmi mezi molekulami. Pro menší vzdálenost by se již projevila mikroskopická stavba kontinua s jeho nespojitostmi. Z makroskopického hlediska, které teorie kontinua používá, bude však element dm , s kterým budeme pracovat, dostatečně malý a přitom bude obsahovat značné množství molekul nebo atomů. Hmotné elementy dm a jim odpovídající objemové elementy dV budeme pro jednoduchost často nazývat hmotné body, eventuálně **materiálové body**.

Ve fyzice kontinua je vhodné pracovat s **hustotami** veličin. **Hustota veličiny** charakterizuje hodnotu veličiny odpovídající určitému objemovému elementu kontinua. Hustota obecné veličiny B , označme ji B_H , se zavádí vztahem

$$B_H = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta B}{\Delta V} , \tag{4.3}$$

kde ΔB je množství veličiny B obsažené v objemu V (nebo působící na objem V). Hustoty veličin jsou obecně funkcí času a polohy, $B_H = B_H(\vec{r}, t)$.

Pro **popis kontinua** můžeme obecně použít dvojí přístup:

- 1) Vybrat si v kontinuu individuální bod (malý objem) a sledovat jeho dráhu, rychlost a zrychlení. Tento postup navrhl **Lagrange**, a nese proto jeho jméno.
- 2) Vybrat si pevný bod v prostoru a sledovat, jak se v tomto pevném místě v prostoru mění rychlost a zrychlení spojitého prostředí, tj. prostředí, které do něj přitéká a odtéká. Na tomto principu je založena **Eulerova metoda**.

Lagrangeova metoda popisu kontinua je založena na sledování jednotlivých (individuálních) bodů. Pro každý materiálový bod stanovíme jeho materiálové (Lagrangeovy) souřadnice X_1, X_2, X_3 (souřadnice X_1, X_2, X_3 jsou ekvivalentní dříve používaným souřadnicím X, Y, Z a používají se často kvůli přehlednosti zápisu) v nějakém výchozím okamžiku a sledujeme, jak se tyto souřadnice v čase mění, tj. nabývají hodnot x_1, x_2, x_3 , které jsou v čase proměnné. Pohyb materiálového bodu je popsán obecně rovnicemi typu

$$\begin{aligned}x_1 &= x_1(X_1, X_2, X_3, t) \\x_2 &= x_2(X_1, X_2, X_3, t) \\x_3 &= x_3(X_1, X_2, X_3, t) .\end{aligned}\tag{4.4}$$

Pomocí Lagrangeových souřadnic můžeme popisovat změny všech veličin charakterizujících kontinuum, např. hustoty, teploty apod. Teplotní pole v kontinuu bude popsáno rovnicí typu

$$T = T(X_1, X_2, X_3, t) .\tag{4.5}$$

Jestliže položíme $t = \text{konst}$, odpovídá to případu, kdy v určitém časovém okamžiku změříme teplotu ve všech materiálových bodech současně (v bodech o různých souřadnicích X_1, X_2, X_3) a dostaneme tak průběh teploty v celém objemu uvažovaného kontinua. Budeme-li sledovat průběh teploty (měřit teplotu) v jenom určitém materiálovém bodě, pak rovnice (4.5) zobrazuje změny teploty v čase v určitém místě kontinua.

Mezi souřadnicemi x_1, x_2, x_3 a souřadnicemi X_1, X_2, X_3 existuje jednoznačné přiřazení které znamená, že každému bodu o souřadnicích X_1, X_2, X_3 odpovídá jeden bod se souřadnicemi x_1, x_2, x_3 , a proto žádný bod kontinua se v průběhu času nemůže ztratit ani nově objevit. Máme tedy dva soubory souřadnic vystupujících v rovnicích (4.4), (4.5), které se liší tím, že jsou naměřeny v různých časech. Můžeme proto zavést dvě souřadnicové soustavy, jednu pevnou nepohyblivou, ve které měříme souřadnicemi x_1, x_2, x_3 a druhou, kterou obvykle spojujeme pevně s materiálem (souřadnicové osy například vložíme do hran elementární krychle umístěné v materiálu), a v této materiálové (Lagrangeově) soustavě měříme souřadnice X_1, X_2, X_3 . Jestliže budou probíhat deformační změny v materiálu, budou mít za následek i deformaci této soustavy pevně spojené s materiálem a sledování pohybového stavu soustavy bude dosti obtížné.

Při **Eulerově metodě** je základem nehybný pozorovatel, který sleduje nepřetržitě pohyb kontinua. Z jeho hlediska je nutné definovat pevnou soustavu souřadnic, ve které by mohl měřit

souřadnice jednotlivých materiálových bodů kontinua. Za tuto soustavu můžeme zvolit například soustavu, ve které jsme při Lagrangeově metodě měřili souřadnice x_1, x_2, x_3 . Takto zavedené souřadnice nazveme Eulerovy. Protože můžeme vztahem (4.4) přejít od souřadnic Lagrangeových k Eulerovým, můžeme také veličiny charakterizující kontinuum vyjádřit jako funkci Eulerových souřadnic a vztah (4.5) přepsat do tvaru

$$T = T(x_1, x_2, x_3, t) . \quad (4.6)$$

Lagrangeovou metodou sledujeme změny polohy pohyblivých bodů, Eulerovou metodou změnu polohy nehybných bodů.

4.2 Kinematika kontinua

V kapitole mechanika hmotného bodu jsme pro charakterizování pohybového stavu hmotného bodu zavedli veličiny polohový vektor, okamžitá rychlost a zrychlení. Zjistili jsme, že hodnoty těchto veličin závisí na volbě referenčního (souřadnicového) systému. Kontinuum, jak jsme uvedli, můžeme popisovat dvojím možným způsobem, Lagrangeovým a Eulerovým, a máme proto na výběr mezi dvěma různými souřadnicovými soustavami. Ukážeme, jak se projeví vliv výběru souřadnicového systému na časové změně určité fyzikální veličiny.

Pozorovatel v **Eulerově** systému souřadnic (pevně spojený s nehybnou v prostoru soustavou souřadnic) naměří například změnu teploty, dané vztahem (4.6)) v malém časovém intervalu Δt ($\Delta t \rightarrow 0$) v nehybném bodě A, který má v této pevné soustavě polohový vektor \vec{r}_A . Časová změna teploty měřená **Eulerovým** pozorovatelem v bodě A je rovna

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{T(t + \Delta t) - T(t)}{\Delta t} = \frac{\partial T}{\partial t} . \quad (4.7)$$

Tato časová změna teploty měřená v určitém místě se označuje jako **lokální časová změna** (lokální časová derivace).

Lagrangeův pozorovatel měří také časovou změnu teploty v určitém bodě, ale je pevně spojen se souřadnicovou soustavou, která se pohybuje rychlostí proudění \vec{v} částic kontinua. Měří například časovou změnu teploty v bodě B s polohovým vektorem \vec{R}_B , který v čase t splýval s bodem A ($\vec{r}_A = \vec{R}_B$), ale vzdaluje se od něho rychlostí \vec{v} , takže v čase $t + \Delta t$ je v poloze o $\vec{v} \Delta t$ dále. **Lagrangeův** pozorovatel proto sčítá dvě časové změny: změnu lokální, kterou znamená rovněž **Eulerův** pozorovatel v nehybném bodě A (vztah (4.7)), a změnu způsobenou posunem bodu A rychlostí \vec{v} do nové polohy, kde může být jiná teplota. Tato druhá změna spojená s pohybem kontinua, se nazývá **konvektivní časová změna** a můžeme ji vyjádřit pro jakýkoliv bod kontinua obecným vztahem

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta T}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta T}{\Delta x_1} \frac{\Delta x_1}{\Delta t} + \frac{\Delta T}{\Delta x_2} \frac{\Delta x_2}{\Delta t} + \frac{\Delta T}{\Delta x_3} \frac{\Delta x_3}{\Delta t} \right) = (\vec{v} \cdot \text{grad} T) , \quad (4.8)$$

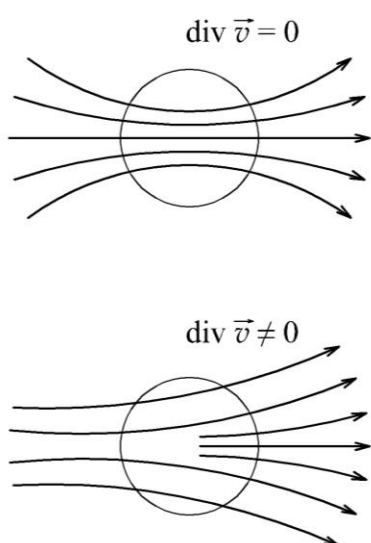
kde předpokládáme, že teplota T závisí na poloze bodu s polohovým vektorem \vec{r} , který má složky x_1, x_2, x_3 a že složky rychlosti \vec{v} jsou $\frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \frac{dx_3}{dt}$.

Časová změna teploty měřená **Lagrangeovým** pozorovatelem, nazývaná **materiálová časová změna** (materiálová časová derivace) je **součet lokální a konvektivní změny** a platí pro ni vztah

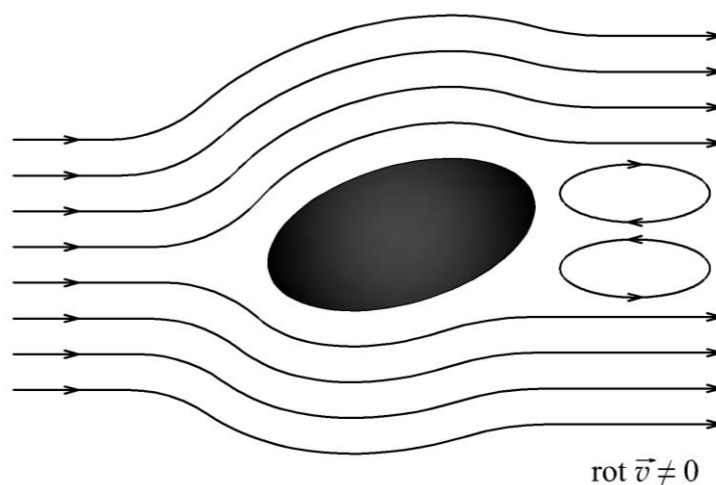
$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad} T) . \quad (4.9)$$

Tento vztah můžeme zobecnit pro jakoukoliv fyzikální veličinu.

Kontinuum má dvě základní kinematické vlastnosti: může se pohybovat a může se deformovat. Pohyb můžeme sledovat tak, že si vybereme nějaký materiálový bod, použijeme **Lagrangeovu metodu**, a sledujeme jeho **trajektorii**. Pohyb kontinua je při tomto popisu určen množinou všech trajektorií. Další popis, který se rovněž používá, je **Eulerův popis pomocí proudnic**, čar, jejichž tečny v každém bodě mají směr rychlosti proudění \vec{v} v tomto místě. Proudnice a trajektorie obecně nesplývají. Body trajektorie jsou dány polohami hmotného bodu, zatímco proudnice je vázána na rozložení rychlosti \vec{v} v prostoru v daném časovém okamžiku. Křivky splývají pouze v případě stacionárního (ustáleného) proudění.



Obr. 4.1 a



Obr. 4.1 b

Proudnice mohou vznikat i zanikat (obr. 4.1 a). Jejich přírůstek nebo úbytek charakterizuje skalární veličina **divergence rychlosti**, zapisovaná symbolem $\text{div } \vec{v}$. Pro $\text{div } \vec{v}$ platí

$$\text{div } \vec{v} = \vec{\nabla} \cdot \vec{v}, \quad \vec{v} = \vec{v}(x_1, x_2, x_3),$$

kde $\vec{\nabla}$ je vektorový operátor o složkách $\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}$. Divergence vektoru \vec{v} , píšeme symbolem $\text{div } \vec{v}$, je tedy skalární veličina definovaná jako skalární součin operátoru $\vec{\nabla}$ a vektorové funkce \vec{v} . Tuto operaci zapíšeme vztahem

$$\text{div } \vec{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} .$$

Je-li $\text{div } \vec{v} = 0$, je počet proudnic v elementárním objemu konstantní, stejný počet proudnic do objemu vstupuje jako vystupuje. Je-li $\text{div } \vec{v} \neq 0$, pak určitý počet proudnic v objemu vznikne nebo zanikne. Tato podmínka definuje, že **proudění je zřídlové**, což je patrné z obr. 4.1a.

Jestliže některá proudnice má tvar uzavřené křivky, jedná se o **proudění vírové**, které je zobrazeno na obr. 4.1 b. Existence vírů je charakterizována vektorovou veličinou **rotace rychlostí**, píšeme $\text{rot } \vec{v}$. Rotace vektoru \vec{v} je definována relací

$$\text{rot } \vec{v} = \vec{\nabla} \times \vec{v} ,$$

což je vektorový součin operátoru $\vec{\nabla}$ a vektorové funkce, v našem případě $\vec{v} = \vec{v}(x_1, x_2, x_3)$. Složky vektoru $\text{rot } \vec{v}$ určíme podle pravidel vektorového násobení. Použijme z mechaniky známý vztah pro okamžitou rychlost \vec{v} obecného pohybu skládajícího se z translačního a rotačního pohybu $\vec{v} = \vec{v}_T + (\vec{\omega} \times \vec{r})$ a aplikujme na něj operaci rotace

$$\text{rot } \vec{v} = \text{rot } \vec{v}_T + \text{rot } (\vec{\omega} \times \vec{r}) ,$$

kde \vec{v}_T je okamžitá rychlost translačního pohybu a $\vec{\omega}, \vec{r}$ jsou charakteristiky například kruhového pohybu, který vykonává hmotný element.

V prvním členu na pravé straně rovnice lze zaměnit pořadí časové derivace (okamžitá rychlost je časová derivace polohového vektoru) a operace rotace. Vzhledem k tomu, že rotace polohového vektoru je vždy rovna nule, je tento člen nulový. Z druhého členu a po úpravě dostaneme

$$\text{rot } \vec{v} = 2 \vec{\omega} \tag{4.10}$$

Podmínka nevírovosti $\text{rot } \vec{v} = 0$ je totožná s podmínkou, aby se element kontinua pohyboval pouze translačním pohybem.

Doposud jsme se zabývali kinematickým popisem pohybu kontinua a vyhýbali jsme se pojmu deformace. Věnujme se nyní popisu pohybového stavu, který je důsledkem **deformace**.

Zvolme si v deformovatelném tělese individualizovaný bod, jehož poloha je popsána polohovým vektorem \vec{R} . Předpokládejme, že dojde k deformaci tělesa (tvar a velikost se změní) a přitom se bod s polohovým vektorem \vec{R} se posune do místa o polohovém vektoru \vec{r} . Rozdíl polohových vektorů bodu po a před deformací, který popisuje posunutí bodu a současně charakterizuje deformaci, označíme jako **vektor posunutí**.

Platí pro něj relace

$$\vec{u} = \vec{r} - \vec{R} , \quad (4.11)$$

kterou můžeme psát ve složkách

$$u_i = x_i - X_i, \quad i = 1, 2, 3 .$$

Protože každá nová poloha bodu je funkcí jeho původní polohy, můžeme také vektor posunutí libovolného bodu (na základě dosazení do vztahu (4.11)) popsat jako funkci původní polohy před deformací. Pro vektor posunutí pak platí funkční vztah

$$\vec{u} = f(\vec{R}) , \quad (4.12)$$

který popisuje deformaci kteréhokoliv bodu kontinua, tj. jeho posunutí během deformačního procesu. Pro vektor okamžité rychlosti můžeme pak s pomocí vztahu (4.11) psát nový vztah

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{u}}{dt} , \quad (4.13)$$

protože materiálová derivace \vec{R} podle času je rovna nule.

Zatím jsme se zabývali Lagrangeovým způsobem popisu vývoje polohy hmotného bodu. Můžeme ale použít Eulerovu soustavu. Pak je poloha bodu před deformací určena polohovým vektorem \vec{r} a po deformaci se změní na \vec{r}' a pro vektor posunutí platí vztah

$$\vec{u} = \vec{r}' - \vec{r} \quad (4.14)$$

nebo analogicky se vztahem (4.11) složkové rovnice

$$u_i = x'_i - x_i .$$

Eulerův způsob popisu dovoluje jednoduše definovat jeden ze základních parametrů deformačního procesu, veličinu **relativní prodloužení**. Jestliže se při deformaci prodlouží například délka tělesa z původní délky l na délku l' , je relativní prodloužení ε definováno vztahem

$$\varepsilon = \frac{l' - l}{l} .$$

Zajímáme-li se o deformaci elementárního objemu materiálu ΔV , který bude protahován ve směru osy x_1 tak, že jeho původní délka se změní z Δx_1 na $\Delta x'_1 = \Delta x_1 + \Delta u_1$, pak pro ε_1 platí vztah

$$\varepsilon_1 = \frac{\Delta x'_1 - \Delta x_1}{\Delta x_1} = \frac{\Delta u_1}{\Delta x_1} ,$$

kde jsme relativnímu prodloužení Δu_1 přiřadili index 1, protože popisuje změnu rozměru ve směru x_1 . Podrobněji se budeme zabývat deformacemi v následujícím odstavci.

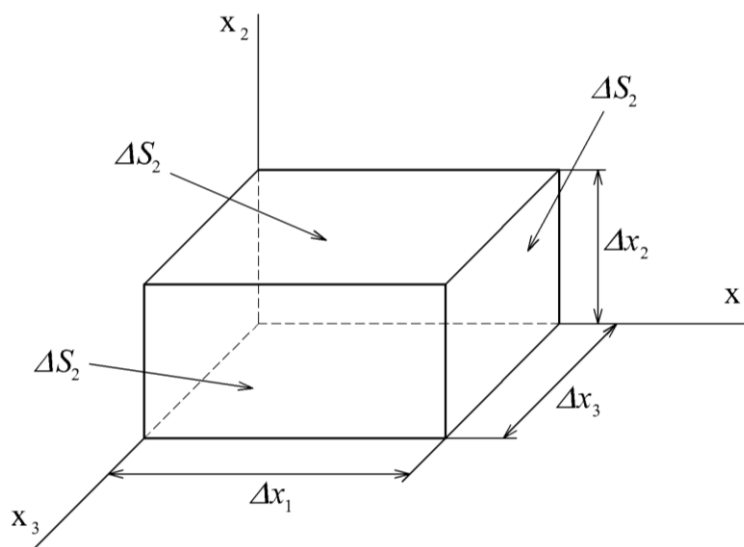
4.3 Dynamika kontinua

V předchozím odstavci jsme kontinuum popsali kinematicky bez ohledu na příčiny působící změny jeho pohybového stavu. Síly, které ovlivňují pohybový stav kontinua, můžeme rozdělit podle vzdálenosti na kterou působí, na **síly krátkého a dlouhého dosahu**. Síly krátkého dosahu jsou molekulární síly a omezují svoji působnost pouze na nejbližší molekuly. Jejich rychlost šíření je proto omezená. Budeme-li na povrch tělesa působit nějakou silou krátkého dosahu, bude ovlivňovat pouze molekuly v povrchové vrstvě, a proto takové síly budeme nazývat **povrchové**. Patří mezi ně například tlaková síla nebo třecí síla. Povrchové síly ovšem ve svém důsledku způsobí, že molekuly z povrchu budou opět silami krátkého dosahu ovlivňovat další vrstvy molekul, takže účinek povrchové síly se rozšíří. Podle principu akce a reakce bude v povrchu materiálu vznikat jako reakce síla, která se bude šířit i dovnitř tělesa a bude se snažit uvést těleso opět do stavu rovnováhy. Tato síla se obvykle nazývá **vnitřní povrchová síla**. Existuje-li v daném tělese stav rovnováhy sil, pak v každém místě libovolně určeného povrchu se **vnější povrchová síla** co do velikosti rovná **vnitřní povrchové síle**.

Síly dlouhého dosahu nazýváme také **objemové**, protože se šíří v podstatě nekonečnou rychlostí a působí najednou na všechny částice (celý objem) v daném tělese. Příkladem těchto sil mohou být síly gravitační, elektromagnetické, ale i setrvačné a Coriolisova síla.

Zvolme v tělese elementární kvádr o délce hran $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3$, který je na obr. 4.2. Pro objem kvádru platí $\Delta V = \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3$. Hrany kvádru jsou rovnoběžné se směry souřadnicových os. Plochy stěn kvádru označme podle směru kladné normály k ploše. Platí pro ně vztahy

$$\Delta S_1 = \Delta x_2 \Delta x_3, \quad \Delta S_2 = \Delta x_1 \Delta x_3, \quad \Delta S_3 = \Delta x_1 \Delta x_2. \quad (4.15)$$



Obr. 4.2

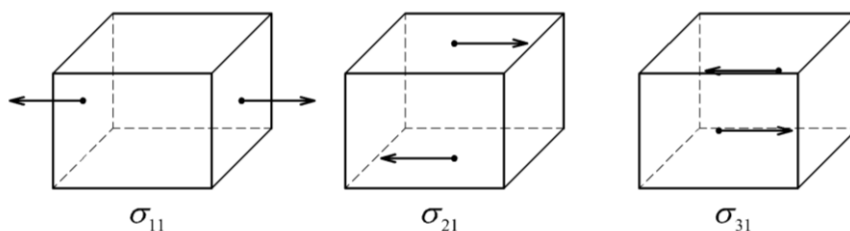
Jestliže na elementární kvádr bude působit povrchová síla $\Delta\vec{P}$, můžeme vyšetřovat její působení na jednotlivé elementární plošky ΔS . Zavedeme veličinu \vec{p} vztahem

$$\vec{p} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{P}}{\Delta S} = \frac{d\vec{P}}{dS} \quad (4.16)$$

Vektorová veličina \vec{p} má význam tlaku (nebo napětí) a je to vlastně síla působící na plochu. Vektor napětí \vec{p} v daném místě závisí na orientaci plošky ΔS vzhledem ke směru působící síly, má tedy tu vlastnost, že v případě změny orientace plošky bude vektor napětí obecně jiný. Nastane-li v tělese rovnováha sil, pak v každém bodě kontinua se vnější povrchová síla (až na znaménko) rovná vnitřní povrchové síle. Souhrn všech vektorů napětí charakterizujících působení síly v určitém bodě daných vztahem (4.16) vytváří stav napjatosti v tomto bodě.

Zabývejme se nyní působením složky síly ΔP_1 ve směru osy x_1 na elementární kvádr. V kartézském systému souřadnic stačí, když vyšetříme působení síly ve třech nezávislých směrech x_1, x_2, x_3 .

Složka síly ΔP_1 může působit celkem šesti různými způsoby (na šest stěn kvádrů), a to na plochu ΔS_1 ve směru normály (na obě protilehlé plochy) a podobně na plochy ΔS_2 a ΔS_3 ve směru tečny, což je znázorněno na obr. 4.3.



Obr. 4.3

Vraťme se nyní ke vztahu (4.16), který můžeme rozepsat jako tři složkové rovnice. Pro složku 1 lze psát

$$p_1 = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta P_1}{\Delta S} \quad (4.17)$$

Napětí však obecně závisí na orientaci plošky ΔS vzhledem k působící síle, a proto je třeba rozlišovat mezi napětím na různých stěnách kvádrů ($\Delta S_1, \Delta S_2, \Delta S_3$), které je obecně různé. Z tohoto důvodu je nutné pro rozlišení napětí používat podrobnější označení. Pro úplný popis napjatosti v určitém bodě stačí zadat tři velikosti vektorů napětí odpovídající třem vzájemně kolmým normálovým vektorům ke třem plochám uvažovaného elementárního kvádrů. Každý z těchto vektorů má tři složky ve směru souřadnicových os x_1, x_2, x_3 . Jednotlivé složky tlaku (napětí) budeme nadále označovat symbolem σ , které opatříme dvěma indexy.

Veličina σ_{21} , složka vektoru napětí, bude například definovaná relací

$$\sigma_{21} = \lim_{\Delta S_2 \rightarrow 0} \frac{\Delta P_1}{\Delta S_2} \quad (4.18)$$

Používáme dva indexy. První index udává směr kladné normály plošky, na kterou působí síla, druhý index určuje složku působící síly.

- σ_{11} je podle této úmluvy normálové napětí vyvolané silou ΔP_1 vzhledem k ploše ΔS_1 ,
- σ_{21} , σ_{31} jsou tečná napětí síly ΔP_1 působící na ploškách ΔS_2 , ΔS_3 .

Případy, kde vzniká normálové, eventuálně tečné napětí jako důsledek působení síly ve směru osy x_1 , jsou na obr. 4.3.

Pro složku síly ΔP_2 dostáváme celkem tři různá napětí σ_{12} , σ_{22} , σ_{32} .

Pro složku síly ΔP_3 dostáváme obdobně σ_{13} , σ_{23} , σ_{33} .

Máme tedy celkem devět složek vektoru napětí, které dohromady tvoří tenzor druhého řádu.

Obecně lze kteroukoliv složku vektoru napětí vyjádřit jednoduchým vztahem

$$\sigma_{ki} = \lim_{\Delta S_k \rightarrow 0} \frac{\Delta P_i}{\Delta S_k}, \quad \text{kde } i, k = 1, 2, 3. \quad (4.19)$$

Vnitřní napětí se uplatňují při různých jevech v kontinuu. Budeme pracovat s těmito druhy vnitřních napětí:

- **elastická napětí** – jako odezvy materiálu při deformačních procesech,
- **vazká napětí** – vnitřní tření kapalin, odezva na posouvání jednotlivých částí materiálu vůči sobě,
- **statické tlaky** – v kapalině nazývané hydrostatické tlaky.

Vraťme se nyní k problému stanovení vnitřní povrchové síly ze známých vnitřních napětí. Složku síly ΔP_1 můžeme vypočítat pomocí vztahu (4.19), a to prostřednictvím napětí působících na jednotlivé stěny kvádrů a integrací přes plochy stěn. Jsou-li napětí vždy na celé elementární plošce stejná, (což můžeme předpokládat), potom integraci nahradíme pouhým součinem napětí a velikosti plochy. Použijeme vztah

$$\Delta P_1 = (\sigma'_{11} - \sigma_{11}) \Delta S_1 + (\sigma'_{21} - \sigma_{21}) \Delta S_2 + (\sigma'_{31} - \sigma_{31}) \Delta S_3, \quad (4.20)$$

kde čárkovaná napětí jsou napětí na odlehlých ploškách (posunutých proti počátku o délku stěny kvádrů, tj. o $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3$). Zavedme nyní, v soulase se vztahem (4.3) novou veličinu,

hustotu povrchové síly \vec{f} vztahem

$$\vec{f} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{P}}{\Delta V}. \quad (4.21)$$

Pro její složku f_1 platí

$$f_1 = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta P_1}{\Delta V} = \lim_{\substack{\Delta x_1 \rightarrow 0 \\ \Delta S_1 \rightarrow 0}} \frac{\Delta P_1}{\Delta x_1 \Delta S_1} . \quad (4.22)$$

Limitní přiblížení znamená, že hustotu síly počítáme v malém objemovém elementu, jehož rozměry se blíží k nule. Jestliže dosadíme do vztahu (4.22) ze vztahu (4.20) a napíšeme pouze první ze tří výrazů na pravé straně rovnice, můžeme tento výraz dále upravovat

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{(\sigma'_{11} - \sigma_{11}) \Delta S_1}{\Delta V} = \lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{\sigma'_{11} - \sigma_{11}}{\Delta x_1} =$$

přesněji

$$= \lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{\sigma'_{11}(x_1 = \Delta x_1) - \sigma_{11}(x_1 = 0)}{\Delta x_1} = \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} .$$

Analogicky i pro další členy dostaneme výrazy $\frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2}$, $\frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3}$.

Dosazením vypočtených výrazů do vztahu (4.22) dostaneme pro složku f_1 vyjádření

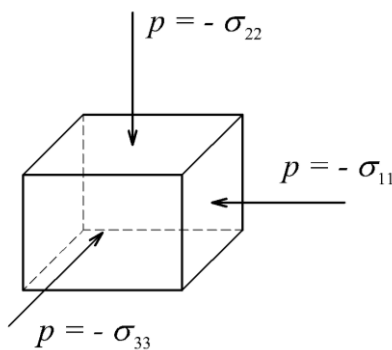
$$f_1 = \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} , \quad (4.23)$$

kde f_1 je x_1 složka hustoty povrchové síly. Všechny složky hustoty síly vyjádříme jednou rovnicí

$$f_i = \sum_k \frac{\partial \sigma_{ki}}{\partial x_k} , \quad k = 1, 2, 3 . \quad (4.24)$$

Rovnice (4.24) je zkrácený zápis tří rovnic pro složky hustoty povrchové síly vyjádřené pomocí tečných a normálových napětí.

Vnitřní elastická napětí jsou reakcí pružného prostředí na síly, které působí deformaci. Statické tlaky mají v každém bodě elementárního objemu ΔV stejnou hodnotu. Jsou kolmé na povrch uvažovaného objemu (obr. 4.4) a míří dovnitř (opačný směr než napětí).



Obr. 4.4

Pro statický tlak platí rovnice

$$-p = \sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33}$$

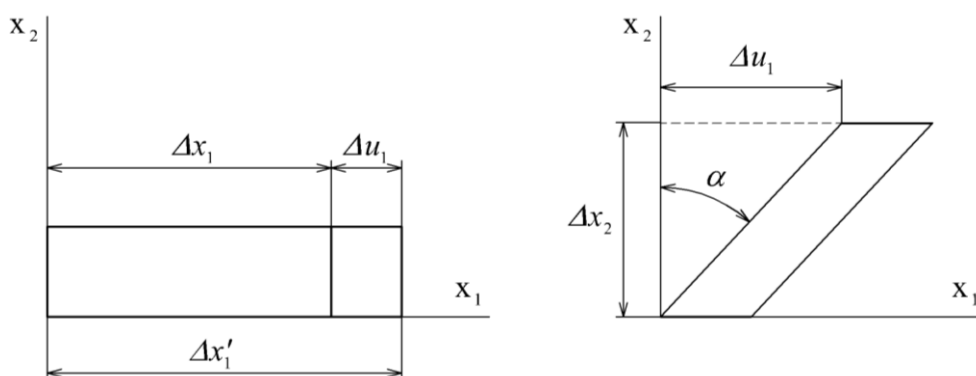
Z rovnice (4.24) vyplývá jednoduchý vztah

$$f_i = -\frac{\partial p}{\partial x_i} \quad (4.25)$$

$$\vec{f} = -\text{grad } p .$$

Nyní se budeme zabývat vznikem deformace materiálu.

V případě namáhání materiálu na tlak nebo tah dojde ke změně délky (obr. 4.5).



Obr. 4.5

Nechť elementární objem materiálu je protažen působící silou ve směru osy x_1 z původní délky Δx_1 na $\Delta x_1'$, kde $\Delta x_1' - \Delta x_1 = \Delta u_1$. Tento případ jsme již řešili při popisu kontinua. Pro relativní prodloužení ε ve směru x_1 jsme psali relaci $\varepsilon = \frac{\Delta u_1}{\Delta x_1}$, která v limitním přiblížení

přejde do tvaru $\varepsilon = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}$. Obecně lze zavést relativní prodloužení ε v kterémkoliv směru jako

$\varepsilon_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$. Známý tvar Hookova zákona $p = E \varepsilon$, kde E je Youngův modul pružnosti v tahu, můžeme nyní přepsat do tvaru

$$\sigma_{11} = E \frac{\partial u_1}{\partial x_1}$$

a obecně

$$\sigma_{ii} = E \frac{\partial u_i}{\partial x_i} . \quad (4.26)$$

Podobné vztahy bychom mohli napsat pro tečná napětí a smykovou deformaci, a to

$$\sigma_{ik} = G \frac{\partial u_k}{\partial x_i}, \quad (4.27)$$

kde G je modul pružnosti ve smyku.

4.4 Objemové síly

Kromě povrchových sil, které jsou silami krátkého dosahu, uplatňují se v kontinuu objemové síly, které působí současně na celý objem. Jsou to síly dlouhého dosahu. Mezi tyto síly patří například gravitační síly.

Objemové síly popisujeme jako silové pole vektorem \vec{F} v každém bodě prostoru a čase $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, t)$. Na element kontinua ΔV hmotnosti Δm s polohovým vektorem \vec{r} působí v čase t síla $\Delta \vec{F}(\vec{r}, t)$. Často je výhodnější popisovat silové pole **intenzitou pole** \vec{K} , pro kterou platí

$$\vec{K}(\vec{r}, t) = \lim_{\Delta m \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{F}(\vec{r}, t)}{\Delta m}, \quad (4.28)$$

silou vztaženou na jednotku hmotnosti. Vztáhneme-li sílu k jednotkovému objemu, dostaneme hustotu síly. Pro **hustotu síly** $\vec{f}(\vec{r}, t)$ platí definiční vztah

$$\vec{f}_0(\vec{r}, t) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{F}(\vec{r}, t)}{\Delta V},$$

kde indexem 0 vyznačujeme, že se jedná o hustotu objemových sil (na rozdíl od povrchových).

Hustotu síly jsme již zavedli vztahem (4.21) pro povrchové síly. Jestliže si uvědomíme, že podle (4.2) je $dm = \rho dV$, pak po dosazení do vztahu (4.28) dostaneme relaci mezi hustotou objemové síly a intenzitou pole ve tvaru

$$\vec{f}_0 = \rho \vec{K}. \quad (4.29)$$

Když aplikujeme vztahy mezi hustotou síly a intenzitou na tíhové pole a uvědomíme si, že intenzita tíhového pole $\vec{K} = \vec{g}$, pak platí pro hustotu síly

$$\vec{f}_0 = \rho \vec{g}. \quad (4.30)$$

Jestliže má být tuhé (deformovatelné) těleso v rovnováze, musí být nulová výslednice vnějších sil a i výsledný moment sil.

Proto s použitím rovnice (4.24) pro povrchové síly a rovnice (4.30) pro objemové síly dostáváme jako podmínku rovnováhy tři složkové rovnice

$$\sum_k \frac{\partial \sigma_{ki}}{\partial x_k} + f_{i0} = 0, \quad k = 1, 2, 3. \quad (4.31)$$

Z druhé podmínky rovnováhy (výsledný moment sil je nulový) plyne, že tenzor napětí je symetrický tenzor. Tuto podmínku ale nebudeme řešit, neboť matematický aparát, který je na řešení potřeba, neodpovídá rozsahu těchto skript.

4.5 Příklady ke kap. 4

Příklad 4.1

Do prázdné svislé šachty 900 m hluboké máme spustit ocelové lano tak, aby se právě dotýkalo dna. Hustota oceli je $\rho = 8 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, modul pružnosti použité oceli je $E = 2 \cdot 10^{11} \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$, mez pevnosti oceli $\sigma_m = 3 \cdot 10^8 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$.

Vypočítejte:

- jakou délku lana musíme zvolit, aby se po protažení právě dotklo dna,
- jakou maximální délku může mít lano, aby nedošlo k jeho přetržení při spuštění do šachty.

Řešení:

- a) Prodloužení lana se řídí Hookovým zákonem. Pro prodloužení části lana dy vzdálené od horního konce lana o y vlivem váhy zbývající části lana platí vztah

$$d(\Delta l) = \frac{1}{E} \frac{(l_0 - y) S \rho g}{S} dy, \text{ kde } S \text{ je průřez lana.}$$

$$\text{Pro celkové prodloužení platí } \Delta l = \frac{1}{E} \int_0^{l_0} (l_0 - y) \rho g dy = \frac{1}{2} \frac{\rho g l_0^2}{E}.$$

$$\Delta l = l - l_0$$

$$\frac{1}{2} \frac{\rho g l_0^2}{E} = l - l_0 \Rightarrow \frac{\rho g}{2E} l_0^2 + l_0 - l = 0, \text{ řešení této kvadratické rovnice má tvar}$$

$$l_0 = -\frac{E}{\rho g} + \sqrt{\left(\frac{E}{\rho g}\right)^2 + \frac{2El}{\rho g}}, \text{ po dosazení získáme výsledek}$$

$$l_0 = -\frac{2 \cdot 10^{11}}{8 \cdot 10^3 \cdot 9,81} + \sqrt{\left(\frac{2 \cdot 10^{11}}{8 \cdot 10^3 \cdot 9,81}\right)^2 + \frac{2 \cdot 2 \cdot 10^{11}}{8 \cdot 10^3 \cdot 9,81}} = 899,841 \text{ m}$$

Musíme zvolit délku lana o 15,9 cm menší, než je hloubka šachty.

- b) Pro mez pevnosti materiálu lana platí vztah $\sigma_m = \frac{G}{S} = \frac{S l_m \rho g}{S} = \rho l_m g$,

$$l_m = \frac{\sigma_m}{\rho g} = \frac{3 \cdot 10^8}{8 \cdot 10^3 \cdot 9,81} = 3822,6 \text{ m}.$$

5. Vlnění

5.1 Elastické vlny, vlnová rovnice

Jestliže vychýlíme určitý element kontinua (hmotný bod) z rovnovážné polohy (například úderem), bude se vzniklé elastické napětí snažit o návrat bodu nazpět. Uvažujme pro jednoduchost jednorozměrný případ bodové řady, v které rozkmitáme právě první bod. Rozruch se bude šířit dál řadou určitou rychlostí, takže jednotlivé elementy bodové řady budou kmitat s určitým zpožděním. Prostředím se začne šířit **elastická vlna**. Budeme pro jednoduchost předpokládat (ačkoliv tato podmínka je ve skutečnosti velice zřídka přesně splněna), že jednotlivé body budou vykonávat harmonické kmity. Jestliže výchylky bodů budou probíhat ve směru šíření rozruchu, body se budou zhušťovat a zředovat, což bude doprovázeno změnou tlaku v prostředí. Říkáme, že vznikne **podélné vlnění**. Hmotné body se mohou vychylovat z rovnovážné polohy nejen ve směru šíření rozruchu, ale také ve směru na něj kolmém. Vlnění, charakterizované výchylkami, které se dějí napříč směru šíření, se nazývá **příčné vlnění**. Jednotlivé elementy pružného prostředí jsou v takovém případě namáhány na smyk.

Výchylky hmotných bodů jsou obecně funkcí času a polohy hmotného bodu (elementu), a pro okamžitou výchylku libovolného bodu můžeme obecně psát, že $u = u(\vec{r}, t)$. Okamžitá výchylka hmotného bodu bude záviset na jeho vzdálenosti od místa buzení rozruchu a na okamžiku, v kterém budeme výchylku zaznamenávat. Jestliže se vlnění například šíří ve směru osy x_1 s výchylkou rovněž ve směru osy x_1 , pak okamžitá výchylka i -tého elementu bodové řady je funkcí $u_i = u_i(x_i, t)$. Pohyb prvního bodu bodové řady, který začal kmitat v okamžiku $t = 0$, můžeme popsat rovnicí

$$u_1(x_1 = 0) = u_{01} \sin \omega t, \quad (5.1)$$

kde u_{01} je maximální výchylka (amplituda výchylky) kmitu.

Výchylky se šíří podél osy x_1 bodovou řadou tak, že do bodu ve vzdálenosti x_i dorazí za čas t_i . Pro tento bod můžeme rovnici (5.1) upravit do tvaru

$$u_1(x_i) = u_{01} \sin \omega(t - t_i), \quad (5.2)$$

kde $t_i = \frac{x_i}{c}$, c je rychlost, kterou se šíří fáze vlnění. O fázové rychlosti c budeme předpokládat, že je konstantní. Po dosazení za t_i můžeme rovnici (5.2) přepsat do tvaru

$$u_1(x_i) = u_{01} \sin \omega \left(t - \frac{x_i}{c} \right)$$

a pro bod ve vzdálenosti x_1 v obecném tvaru

$$u_1(x_1) = u_{01} \sin \omega \left(t - \frac{x_1}{c} \right). \quad (5.3)$$

Analogickou rovnicí, pouze se změnou znaménka členu $\frac{x_1}{c}$ v argumentu funkce z minus na plus bychom mohli zapsat výchylku bodu x_1 , jestliže by se rozruch šířil v záporném směru osy x_1 . Periodicita vzhledem k proměnné x_1 v rovnici (5.3) udává, že v bodové řadě se dva body vychýlí se stejnou výchylkou ve stejný okamžik, jestliže jsou vzdáleny o délku $x_1 = \lambda$, kde λ je vlnová délka vlnění. (Tato podmínka je splněna i pro jakýkoliv celočíselný násobek vlnové délky.) Čas, za který se vlnění rozšíří do vzdálenosti rovné jedné vlnové délce, je perioda vlnění T . Pro T platí vztah

$$T = \frac{1}{f}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f,$$

kde f je frekvence vlnění.

Po dosazení do vztahu (5.3) dostaneme další vyjádření pro okamžitou výchylku ve tvaru

$$u_1 = u_{01} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_1}{\lambda} \right). \quad (5.4)$$

Nyní si musíme uvědomit, že u_1 jsou okamžité výchylky bodů z jejich rovnovážných poloh, které odpovídají posunu bodů kontinua při jeho deformaci a pokusíme se sestavit **pohybovou rovnici pro element kontinua**. Rovnice bude vycházet ze závislosti okamžité výchylky u na poloze elementu a čase.

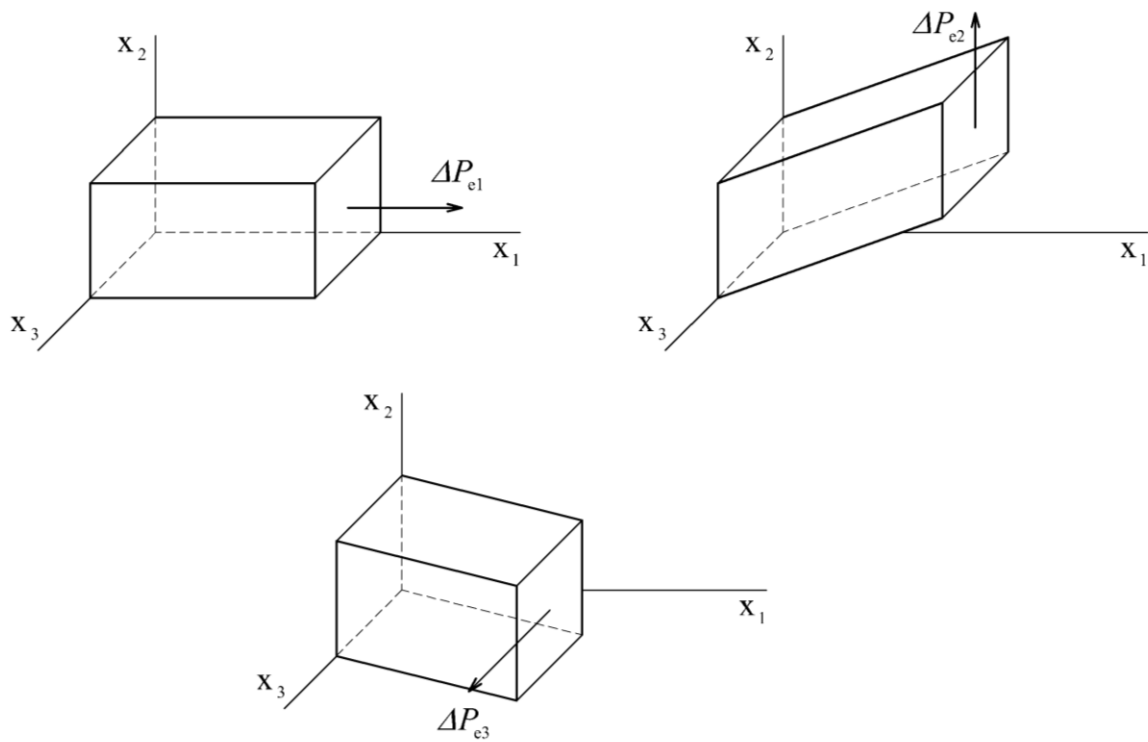
Pro objemový element ΔV o hmotnosti Δm lze psát pohybovou rovnici ve tvaru

$$\Delta m \vec{a} = \Delta \vec{P}_e, \quad (5.5)$$

kde $\Delta \vec{P}_e$ označili vnitřní povrchovou sílu působící elastické napětí. Analogicky k vztahu (4.33) platí pro hustotu prostředí relace

$$\rho \vec{a} = \vec{f}_e, \quad (5.6)$$

kde \vec{f}_e jsme označili hustotu vnitřní povrchové síly působící elastické napětí, ρ je hustota, \vec{a} je zrychlení určitého bodu kontinua odpovídající působení této síly. Vyberme si pro jednoduchost případ, kdy síla působí na plošku ΔS_1 kolmou na směr x_1 . Pro vzájemnou souvislost hustoty vnitřní povrchové síly f_e a složky napětí jsme odvodili vztah (4.24) v předchozí kapitole. Musíme si pouze uvědomit, které složky elastických napětí je třeba uvažovat. Normálová složka síly ve směru osy x_1 (obr. 5.1) se snaží element ΔV protáhnout ve směru této osy. Vzniklou situaci lze popsat vztahem (4.26), který uvádí relaci mezi relativním prodloužením a vzniklým napětím. Tečné síly způsobují smykovou deformaci, která je obecně popsána vztahem (4.27). Příklady účinku normálové a tečných složek síly působící v různých směrech je schématicky znázorněn na obr. 5.1.



Obr. 5.1

Pro jednotlivé směry budou platit pro vnitřní napětí vztahy

$$\sigma_{11} = E \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \quad \sigma_{12} = G \frac{\partial u_2}{\partial x_1}, \quad \sigma_{13} = G \frac{\partial u_3}{\partial x_1}. \quad (5.7)$$

Použijeme-li relaci (4.24) mezi vnitřním napětím a hustotou síly, dostaneme vztahy pro jednotlivé složky hustoty elastické síly

$$f_{e1} = \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1}, \quad f_{e2} = \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1}, \quad f_{e3} = \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} \quad (5.8)$$

a po dosazení ze vztahu (5.7) za napětí dostaneme následující vztahy pro složky hustoty ve tvaru

$$f_{e1} = E \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2}, \quad f_{e2} = G \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2}, \quad f_{e3} = G \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2}. \quad (5.9)$$

Dosadíme-li získané výrazy za složky hustoty síly do pohybové rovnice (5.6) a pro velikost zrychlení využijeme vztah $a = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ (konvektivní zrychlení zanedbáváme), můžeme napsat tři pohybové rovnice (složkové)

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} &= \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} &= \frac{\rho}{G} \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} &= \frac{\rho}{G} \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} .\end{aligned}\tag{5.10}$$

Rovnice tohoto typu nazýváme **vlnové rovnice**. Řešením takových rovnic (i pro další směry) jsou okamžité výchylky dané vztahem

$$u_i = u_0 \sin \omega \left(t - \frac{x_j}{c_i} \right) ,$$

kde c_i je rychlost šíření podélných, eventuálně příčných vln prostředím. Jestliže předpokládáme šíření rozruchu, jak vyplývá z tvaru vlnové rovnice, ve směru osy x_1 a dosadíme řešení pro u_1 do první z rovnic (5.10), vyplyne pro rychlost c_1 šíření podélné vlny relace

$$c_1 = \sqrt{\frac{E}{\rho}} .\tag{5.11}$$

Rychlosti příčných vln, které označíme c_2, c_3 odpovídají výchylkám příčného vlnění ve směrech os x_2, x_3 šířících se ve směru osy x_1 jsou

$$c_2 \equiv c_3 = \sqrt{\frac{G}{\rho}} .\tag{5.12}$$

Protože pro všechny materiály platí, že hodnota modulu E je větší než hodnota modulu G , je **rychlost podélných vln větší než rychlost příčných vln**. V tekutinách je $G = 0$ (nezachovávají tvar i bez působení síly), a proto se v nich šíří pouze podélné vlny. Pohybová rovnice pro tekutinu, vzhledem k jejím odlišným vlastnostem, bude na pravé straně rovnice obsahovat namísto modulu pružnosti E modul objemové pružnosti K . Na této materiálové konstantě bude také záviset rychlost vlnění podélných vln v tekutinách. Elastické vlny s frekvencí v intervalu 20 až 20 000 kmitů za sekundu vnímáme jako zvuk.

Na začátku tohoto odstavce jsme jako důvod vzniku rozruchu, který způsobil rozkmitání hmotných elementů kontinua, uvedli náraz. Zabývali jsme se tedy vznikem mechanického vlnění v materiálu. Pro určitý případ silového působení jsme napsali pohybovou rovnici a zjistili jsme, že jejím řešením je právě harmonická vlna. **Pohybovou rovnici jsme proto označili jako vlnovou rovnici**. Vlnová rovnice má však mnohem obecnější význam. Každá veličina, která vyhovuje vlnové rovnici, má **vlnový charakter**. Může to být například teplota, pak bychom pracovali s teplotními vlnami, nebo vektor intenzity elektrického pole spolu s vektorem magnetické indukce, a dostali bychom elektromagnetické vlny.

5.2 Zdroje a vznik vlnění

Zatím jsme se jako modelovou představou zabývali jednorozměrným případem, kdy se vlnění šířilo v bodové řadě. Ve skutečnosti vždy půjde o případy složitější. Například po vhození oblázku na vodní hladinu se rozruch šíří po hladině všemi směry a vznikají více méně kruhové vlny. Jejich vznik můžeme v soulase s úvahami v minulém odstavci vysvětlit pomocí změny tlaku nejdříve v místě vhození předmětu a posléze i v jeho okolí. Voda je v centru rozruchu stlačena dolů, což vzhledem k téměř nulové stlačitelnosti vyvolá v bezprostředním okolí malé zvednutí okolí. Vnější síla, tíha, se snaží vychýlené elementy kapaliny uvést do původního stavu, což vyvolá postupně pohyb kapaliny nahoru a dolů. Kmitavý pohyb zasahuje pouze povrchovou vrstvu vody. Vlnění se šíří při povrchu.

Jestliže je bodový zdroj rozruchu (vibrací) umístěn v prostoru, dojde ke vzniku prostorového vlnění. Bude-li rychlost šíření vlnění ve všech směrech stejná, vzniknou kulové vlny, protože v kterémkoliv okamžiku tvoří množina bodů, kam se v prostoru rozšíří rozruch, kulovou plochu. Podmínku stejné velikosti rychlosti šíření vlnění ve všech směrech a všech bodech splňuje **homogenní a izotropní prostředí**.

Plochu, kam se vlnění v určitém časovém okamžiku rozšíří, označujeme jako **čelo vlnoplochy**. Podle **Huygensova principu** můžeme každý bod vlnoplochy považovat za **elementární zdroj vlnění**, kolem něhož můžeme vytvářet další jednotlivé vlnoplochy. Místa, množina bodů, kam vlnění dospěje za další časový okamžik, je nová vlnoplocha, tvořená obálkou jednotlivých elementárních vlnoploch. Teprve později Fresnel svým studiem interferenčních obrazců vysvětlil, proč se podle Huygensova principu uvažuje pouze vnější obálka vlnoploch. Poznamenejme, že pro velkou vzdálenost od bodového zdroje se část původně kulové vlnoplochy stane rovinnou. Můžeme tedy v dostatečné vzdálenosti od bodového zdroje hovořit o šíření **rovinné vlny**.

5.3 Vlastnosti vlnění

Pro určitý bod kontinua, o kterém opět předpokládáme, že koná kmitavý harmonický pohyb, můžeme obecnou rovnici (5.4) pro okamžitou výchylku psát také ve tvaru, kterým jsme v kap. 2 popisovali okamžitou výchylku bodu na pružině, konajícího kmitavý pohyb. Uvažujme pohyb ve směru osy x_1 , pak platí obě vyjádření

$$u_1 = u_{01} \sin(\omega t + \varphi_0)$$
$$u_1 = u_{01} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_1}{\lambda} \right).$$

Porovnáme-li oba vztahy pro okamžitou výchylku, dostaneme relaci mezi fázovým posunem vůči počátku a vlnovou délkou

$$\varphi_0 = -\frac{2\pi}{\lambda} x_1 = -kx_1, \quad (5.13)$$

kde $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ je **vlnové číslo**. Rovnici (5.13) lze dále upravit do tvaru

$$u_1 = u_{01} \sin(\omega t - kx_1) . \quad (5.14)$$

Jestliže vybereme dva body kmitající se stejnou frekvencí a stejnou amplitudou, pak pro jejich výchylky označené u_{11} a u_{21} , můžeme psát

$$\begin{aligned} u_{11} &= u_{01} \sin(\omega t + \varphi_1) \\ u_{21} &= u_{01} \sin(\omega t + \varphi_2) . \end{aligned}$$

Tyto dva body mají v určitém časovém okamžiku rozdíl fází

$$\begin{aligned} \varphi_2 - \varphi_1 &= \frac{\omega}{c}(x_{11} - x_{12}) \\ \varphi_2 - \varphi_1 &= \frac{2\pi}{\lambda}(x_{11} - x_{12}) . \end{aligned} \quad (5.15)$$

Jsou-li tyto dva body vzdáleny právě o vlnovou délku, pak jejich fázový rozdíl je 2π a body kmitají se stejnou výchylkou co do velikosti i směru. Říkáme, že jsou **ve fázi**. Je-li fázový rozdíl π , jsou **v opačné fázi**. Jejich výchylky jsou sice stejně velké, ale opačného směru.

5.4 Dopplerův jev

Dopplerův jev zahrnuje skutečnost velmi dobře známou z praktického života, že frekvence (kmitočet) vlnového děje, kterou zachytí pozorovatel, není totožná s frekvencí vlnění emitovaného zdrojem vlnění, jestliže zdroj vlnění a příjemce se navzájem pohybují.

Zdroj vlnění je v klidu, pozorovatel se pohybuje.

Předpokládejme, že nehybný zdroj vysílá vlnění s frekvencí f_0 , které se šíří směrem k pozorovateli rychlostí c . Pokud je pozorovatel v klidu, je frekvence přijímaných kmitů shodná s frekvencí vysílaných kmitů. Platí, že

$$f_0 = \frac{c}{\lambda_0} .$$

Jestliže se pozorovatel pohybuje směrem ke zdroji rychlostí o velikosti v_p , pak rychlost, kterou k němu dospějí jednotlivé vlnoplochy, se zvětší na $c + v_p$ a příjemce zachytí za časovou jednotku větší počet kmitů, než kdyby se nacházel ve stavu klidu. Pro frekvenci vnímanou pozorovatelem platí relace

$$f_p = \frac{c + v_p}{\lambda} . \quad (5.16)$$

Jestliže se pozorovatel přibližuje ke zdroji vlnění, registruje **vyšší frekvenci**. Jestliže se vzdaluje, je **frekvence nižší**.

Zdroj vlnění se pohybuje, pozorovatel je v klidu

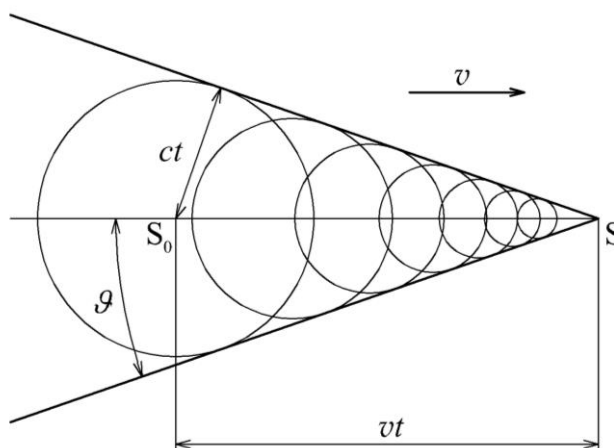
Jestliže se zdroj pohybuje rychlostí o velikosti v_z například směrem k pozorovateli, pak vysílaná vlna urazí za periodu T nikoliv vlnovou délku λ_0 , ale tuto vlnovou délku zmenšenou o dráhu, kterou urazí zdroj vlnění za dobu T . Pro vlnovou délku bude platit

$$\lambda = \lambda_0 - v_z T = \lambda_0 - \frac{v_z}{f_0} . \quad (5.17)$$

Pozorovatel, k němuž se **zdroj přibližuje**, registruje **vyšší frekvenci**. Jestliže se **zdroj vzdaluje, je registrovaná frekvence nižší**. Shrňme-li oba případy, získáme spojením předchozích vztahů rovnici pro frekvenci přijímanou pozorovatelem, jestliže se **pohybuje zdroj i pozorovatel směrem k sobě** ve tvaru

$$f_p = \frac{c + v_p}{c - v_z} f_0 . \quad (5.18)$$

Při odvozování posuvu při Dopplerově jevu se mlčky předpokládá, že rychlost zdroje nebo příjemce je malá proti rychlosti šíření vlnění. Jestliže se však zdroj pohybuje větší rychlostí než je rychlost vlnění, pak se neobjeví žádné vlny před zdrojem, ale všechny se soustředí do kuželu za pohybujícím se zdrojem. K tomuto jevu dojde, jestliže například urychlená nabitá částice se pohybuje prostředím rychleji než je rychlost světla v daném prostředí. Pohyb urychlené částice je totiž doprovázen vznikem elektromagnetického vlnění (pro vhodně zvolené prostředí může být ve viditelné oblasti). Toto emitované záření, které ve tvaru kuželu následuje částici, se nazývá podle svého objevitele **Čerenkovovo**.



Obr. 5.2

Analogický, podstatně známější, je případ rázových vln. Jestliže rychlost zdroje v je větší než rychlost vlnění c , bude se vlnění opět opožďovat za zdrojem. Poměr $\frac{v}{c}$ se nazývá **Machovo číslo**. Vysvětlení (obr. 5.2) je následující. V okamžiku $t=0$ se zdroj vlnění nachází v bodě S_0 . Za čas t urazí zdroj dráhu vt a dosáhne bod S . Za tuto dobu dosáhlo čelo vlnoplochy se středem v S_0 do vzdálenosti ct . V bodě S je vlnění právě generováno, a vlnoplocha má proto

nulový poloměr. Obálka vlnoploch vytvořená čely vln v jednotlivých časových okamžicích je kuželová plocha, která charakterizuje vytvořenou rázovou vlnu a platí, že

$$\sin \vartheta = \frac{c}{v} .$$

Z praxe je známo, že rázovou vlnu vyvolá například letadlo pohybující se nadzvukovou rychlostí a tato vlna se projeví silným třeskem. Je to způsobeno tím, že rázová vlna přenáší velké množství energie koncentrované do zmíněné kuželové plochy, což je spojeno s okamžitými změnami tlaku.

5.5 Interference a princip superpozice

V kontinuu se mohou současně šířit různá vlnění z různých zdrojů. Jestliže se v určitém místě setkají dvě vlny, složí se v jednu výslednou vlnu tak, že hmotný element bude kmitat s výchylkou vzniklou složením výchylek příslušejícím jednotlivým vlnám. Tento princip je nazýván **princip superpozice** a platí zcela obecně pro různé typy vlnění, příčné, podélné, povrchové na vodní hladině atd. Je třeba poznamenat, že platnost principu superpozice je podmíněna splněním důležité podmínky lineárního vztahu mezi působící silou a výchylkou (posunutím hmotného elementu).

Aplikujme nyní princip superpozice na dvě vlnění šířící se ve směru osy x_1 se stejnou frekvencí a amplitudou výchylky, ale různou fází. Superpozici více vln v tomtéž místě prostoru nazýváme **interference**.

Interference vlnění stejných frekvencí, stejné amplitudy výchylky, lišících se fází.

Okamžité výchylky kmitajících bodů v bodové řadě popíšeme rovnicemi

$$\begin{aligned} u_1 &= u_0 \sin(\omega t - kx_1) \\ u_2 &= u_0 \sin(\omega t - kx_1 - \Phi) . \end{aligned} \quad (5.19)$$

S využitím principu superpozice můžeme pro výslednou výchylku kteréhokoliv hmotného bodu v bodové řadě napsat vztah

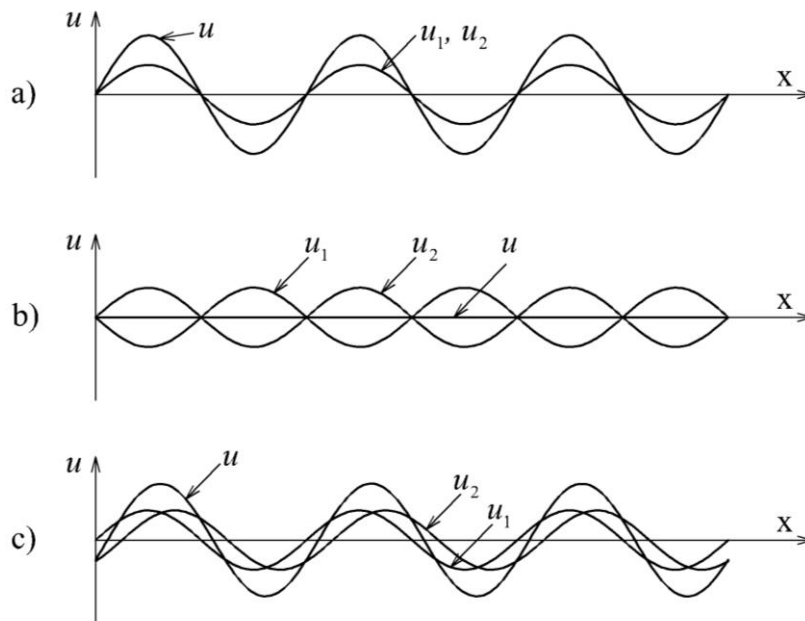
$$u = u_1 + u_2 .$$

Použijeme-li jednoduchý matematický vztah pro součet goniometrických funkcí, dostaneme po dosazení za u_1 a za u_2 výraz

$$u = 2u_0 \cos \frac{\Phi}{2} \sin \left(\omega t - kx_1 - \frac{\Phi}{2} \right) . \quad (5.20)$$

Výsledkem superpozice je vlnění se stejnou frekvencí a vlnovou délkou, jakou mělo původní vlnění, ale s amplitudou výchylky, která závisí na hodnotě fázového posuvu $\frac{\Phi}{2}$. Jestliže

$\Phi = 0$, pak $\cos \frac{\Phi}{2} = 1$ a amplituda výchylky výsledného vlnění bude největší (obr. 5.3 a). Vlny jsou **ve fázi**. V tomto případě je amplituda výchylky výsledného vlnění v každém místě (pro každý element bodové řady) dvojnásobná.



Obr. 5.3

Tento výsledek můžeme zapsat obecněji, že $\left| \cos \frac{\Phi}{2} \right| = 1$, jestliže $\Phi = 0, 2\pi, 4\pi$, nebo $\Phi = 2k\pi$, kde $k = 0, 1, 2$.

Je-li naopak $\cos \frac{\Phi}{2} = 0$, je $\Phi = \pi, 3\pi$, $\Phi = (2k+1)\pi$, je výsledná amplituda výchylky nulová (obr. 5.3 b). Říkáme, že vlny mají **opačnou fázi**.

Leží-li fázový posuv Φ mezi hodnotami 0 až π , nabývá amplituda výchylky výsledného vlnění hodnot $2u_0$ až 0 (obr. 5.5 c).

Fázový rozdíl mezi dvěma vlněními v určitém bodě můžeme interpretovat také pomocí rozdílu délek drah, které vlnění urazila. Jestliže dráhový rozdíl mezi dvěma vlněními je v určitém místě roven vlnové délce nebo jejímu celočíselnému násobku, jsou vlnění ve fázi, a to odpovídá fázovému rozdílu $0, 2\pi, \dots$. Jestliže je dráhový rozdíl roven polovině vlnové délky, nebo jejím lichým celočíselným násobkům, je rozdíl fází $\pi, 3\pi$ a vlny jsou v opačné fázi. Mezi dráhovým rozdílem Δx_1 a fázovým rozdílem $\Delta \Phi$ platí relace

$$\Delta \Phi = 2\pi \frac{\Delta x_1}{\lambda}, \quad (5.21)$$

což je vztah, který jsme v poněkud odlišné formě dostali v minulém odstavci pro fázový rozdíl dvou kmitajících bodů v bodové řadě.

Interference vlnění postupujících proti sobě. Vznik stojatého vlnění.

Zvláštním případem interference je **stojaté vlnění**, které vznikne složením dvou vln se stejnou amplitudou a frekvencí šířících se proti sobě.

Představme si lano, upevněné na obou koncích, které rozkmitáme. Vlnění nejdříve postupuje (například v kladném směru osy x_1), odráží se na pevném konci a šíří se nazpět se stejnou amplitudou výchylky, frekvencí a vlnovou délkou. Okamžité výchylky bodů původního a odraženého vlnění můžeme popsat vztahy

$$u_1 = u_0 \sin(\omega t - kx_1)$$

$$u_2 = u_0 \sin(\omega t + kx_1)$$

a výsledné vlnění vzniklé superpozicí má okamžitou výchylku u danou relací

$$u = u_1 + u_2 = 2u_0 \cos kx_1 \sin \omega t . \quad (5.22)$$

Pravá strana rovnice (5.22) popisuje okamžitou výchylku vlnění, které se podle svého průběhu nazývá **stojaté vlnění**. Každý bod v bodové řadě vykonává harmonický pohyb se stejnou frekvencí jako původní vlnění a amplitudou výchylky $2u_0 \cos kx_1$. Na rozdíl od postupného vlnění je velikost amplitudy výchylky různá pro různá x_1 , ale s časem se v daném bodě nemění.

Jestliže se budeme zabývat výrazem (5.22) pro velikost okamžité výchylky, je $\cos = 0$ pro liché násobky $\frac{\pi}{2}$, a proto poloha elementů bodové řady, které jsou trvale v klidu (amplituda výchylky je nulová) vyhovuje podmínce

$$kx_1 = \frac{2\pi}{\lambda} x_1 = (2n+1) \frac{\pi}{2} , \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (5.23)$$

Tato místa nazýváme **uzly**. Jsou od sebe vzdálena, jak vyplývá ze vztahu (5.23), o $\frac{\lambda}{2}$.

Podobně pro místa s maximální hodnotou amplitudy výchylky nabývá fce \cos maximální hodnoty a platí relace

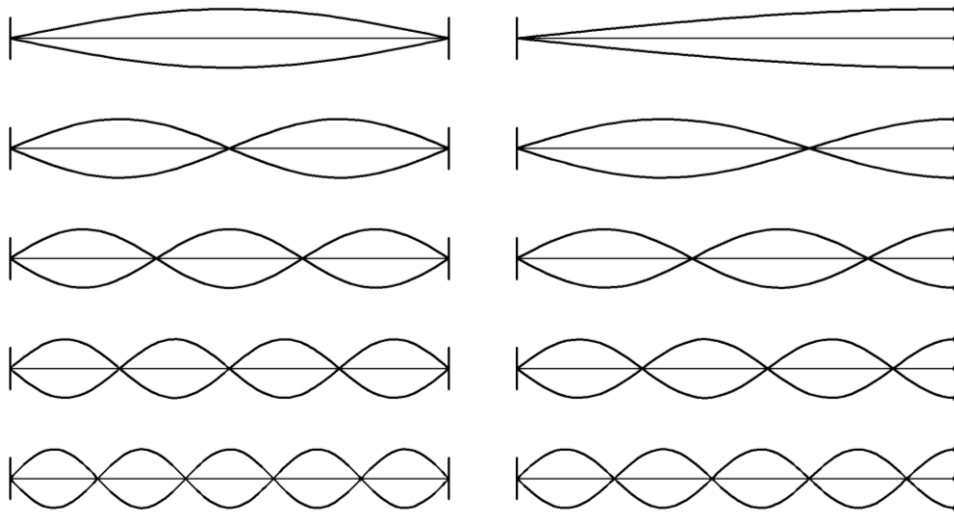
$$kx_1 = n\pi , \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (5.24)$$

Místa s maximální amplitudou výchylky se nazývají **kmitny**. Jejich vzdálenost je opět $\frac{\lambda}{2}$.

Vzdálenost sousedního uzlu a kmitny je $\frac{\lambda}{4}$.

Nejčastěji vzniká stojaté vlnění jako výsledek interference vlny postupující k nějaké překážce a vlny, která se od této překážky odrazí. Projeví se jako **chvění materiálu**.

Vznikne-li stojaté vlnění na struně, jejíž oba konce jsou upevněny, musí být na obou koncích uzly, a na celé délce L struny musí být celistvý násobek půlvln, obr. 5.4 a.



Obr. 5.4 a

Obr. 5.4 b

Pro počet půlvln platí relace

$$n \frac{\lambda}{2} = L \quad , \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.25)$$

Pro frekvence f_n , které se mohou na struně realizovat, lze psát vztah

$$f_n = n \frac{c}{2L} = n f_1 \quad , \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (5.26)$$

kde $f_1 = \frac{c}{2L}$ je nejnižší frekvence stojaté vlny, která může na struně vzniknout. Frekvence f_1 se nazývá **základní harmonická**, další frekvence jsou **vyšší harmonické**. Jestliže druhý konec struny není upevněn, dojde na něm ke změně výchylky na opačnou, obr. 5.4 b, fáze vlny se nemění.

Podmínka pro realizaci stojatého vlnění v tomto případě má tvar

$$n \frac{\lambda}{4} = L \quad , \quad n = 1, 3, 5, \dots \quad (5.27)$$

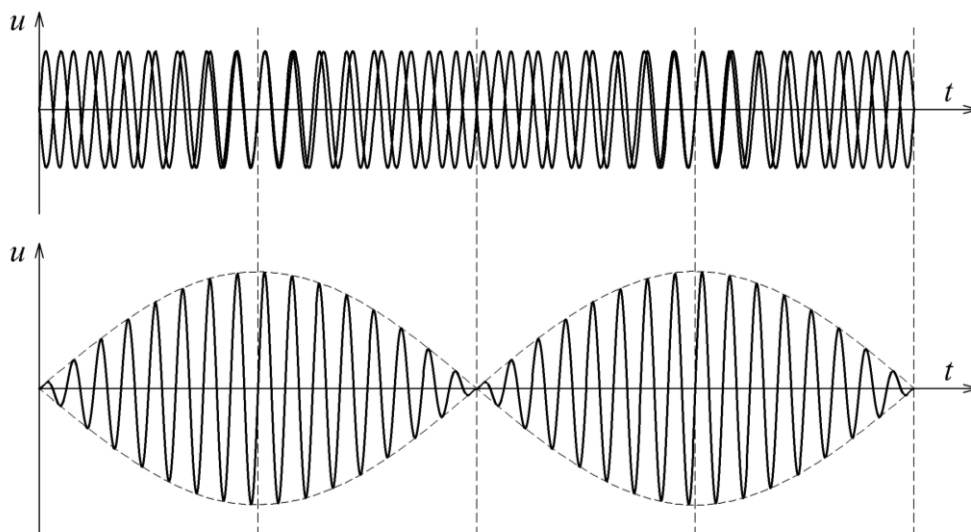
$$f_n = n f_1 = n \frac{c}{4L} \quad (5.28)$$

Frekvence f_1 je opět základní harmonická a pro vyšší harmonickou f_n platí vztah (5.28).

Interference vlnění s blízkými frekvencemi

Uvažujme dvě vlnění šířící se jedním směrem podél téže bodové řady stejnou rychlostí, se stejnou amplitudou výchylky, pouze s málo se odlišujícími frekvencemi. Pozorovatel v určitém místě registruje v čase se měnící interferenční obraz, protože vlnění jsou střídavě, a

to s jistou periodou, ve fázi a mimo fázi. Průběh interferenčního jevu je na obr. 5.5. Říkáme, že vznikají **rázy** (pro akustické vlnění záněje).



Obr. 5.5

Počet rázů za 1 s, nazývaný rázová frekvence, závisí na rozdílu frekvencí obou vlnění a je roven rozdílu těchto frekvencí.

Existenci rázů lze prakticky využít při ladění hudebních nástrojů, například klavíru, kdy z frekvencí rázů můžeme snadno zjistit, eventuálně zkorigovat rozdíl mezi frekvencemi laděného tónu a frekvencí referenčního tónu.

5.6 Energie a intenzita harmonických vln

Při šíření elastických vln dochází k deformaci materiálu. Na realizaci deformace se vykoná práce a tato práce je ekvivalentní mechanické energii, kterou přenáší vlna. Obvykle se přenos energie charakterizuje veličinou **intenzita vlnění**, což je střední hodnota mechanické energie přenesené vlněním za jednotku času jednotkovou plochou kolmo na směr šíření vlny.

Pro intenzitu harmonické vlny platí vztah

$$I = \frac{1}{2} \rho \omega^2 c u_0^2, \quad (5.29)$$

kde všechny veličiny byly již v textu zavedeny. Odvození tohoto vztahu si můžeme přiblížit, jestliže si uvědomíme, jak jsme na začátku tohoto odstavce definovali slovně intenzitu vlnění. Pro intenzitu I můžeme napsat definiční vztah

$$I = \frac{1}{S} \frac{dW}{dt},$$

kde $\frac{dW}{dt}$ je výkon přenášený vlněním, S je plocha, kterou se šíří vlnění. Přírůstek energie související s jejím přenosem v kontinuu (představme si strunu, jejíž průřez je S) můžeme vyjádřit pomocí dalších veličin vztahem

$$\Delta W = wSc\Delta t ,$$

kde w je střední hustota energie příslušející jednotkovému objemu struny, $Sc\Delta t$ představuje objem, do kterého se za dobu Δt rozšíří vlnění, jestliže se šíří rychlostí c . Intenzitu vlnění můžeme pomocí hustoty energie vyjádřit vztahem

$$I = wc . \quad (5.30)$$

Pro střední hodnotu kinetické energie hmotného elementu Δm struny vykonávající harmonický pohyb lze psát $\Delta W = \frac{1}{2} \Delta m \omega^2 u_0^2$, kde hmotnost Δm vyjádříme pomocí hustoty jako $\rho \Delta V$. Použijeme-li nyní definiční vztah pro hustotu energie, který říká, že

$$w = \frac{dW}{dV}$$

a dosadíme za ΔW , je hustota energie určena vztahem

$$w = \frac{1}{2} \frac{\Delta m \omega^2 u_0^2}{\Delta V} = \frac{1}{2} \frac{\rho \Delta V \omega^2 u_0^2}{\Delta V}$$

$$w = \frac{1}{2} \rho \omega^2 u_0^2 .$$

Jestliže tento výraz pro hustotu energie w dosadíme do vztahu (5.30), obdržíme relaci (5.29), která je platná pro všechny druhy harmonických vln. Platí i pro zvukové vlny, jestliže u_0 budeme považovat za **amplitudu akustické výchylky**. Dále zavedeme pro zvukové vlny veličinu **akustická rychlost** v definovanou pomocí okamžité výchylky u akustické vlny, $v = \frac{\partial u}{\partial t}$ a její amplitudu v_0 označíme jako **amplitudu akustické rychlosti**. Platí pro ni vztah

$$v_0 = \omega u_0 . \quad (5.31)$$

Dále můžeme pro šíření akustických vln v tekutinách zavést **akustický tlak** p_a , který je rovněž proměnný v čase a je závislý na vzdálenosti od zdroje akustických vln. S použitím poznatků o deformacích v tekutinách můžeme vztah (5.29) přepsat do tvaru

$$I = \frac{1}{2} v_0^2 \rho c = \frac{1}{2} \frac{p_0^2}{\rho c} , \quad (5.32)$$

kde p_0 je **amplituda akustického tlaku** p_a .

Lidské ucho je schopné registrovat zvuk od hodnoty intenzity rovné asi $10^{-12} \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}$. Obor slyšitelnosti je dán mezemi intervalu slyšitelných frekvencí, to je přibližně od 20 Hz až 20 kHz, a omezením intenzity zvuku zdola (práh slyšitelnosti) i shora (práh bolesti). Tyto prahové hodnoty jsou závislé na frekvenci. Pro tón o frekvenci 1 kHz (referenční tón) jsou prahové hodnoty intenzity $1\cdot 10^{-12} \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}$ a $1 \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}$.

Hladina intenzity zvuku L_I je přibližnou mírou intenzity zvukového vjemu. Jednotkou je decibel (dB) a je pro intenzitu I definována vztahem

$$L_I = 10 \log \frac{I}{I_0}, \quad (5.33)$$

kde I_0 je práh slyšitelnosti.

Veličina hladina intenzity zvuku je přibližnou mírou intenzity zvukového vjemu pouze pro referenční tón o frekvenci 1 kHz. Tóny jiných frekvencí jsou však při stejné intenzitě zvuku a tedy stejné hladině intenzity zvuku vnímány člověkem jako zvuky odlišných hlasitostí. Pro stanovení intenzivnosti fyziologického vjemu zvuku byla změřena soustava křivek stejných hladin hlasitosti, která umožňuje přiřadit při známé frekvenci k známé hodnotě hladiny intenzity L_I hladinu hlasitosti zvuku L_H , která se měří v jednotkách phon.

5.7 Příklady ke kap. 5

Příklad 5.1

Ultrazvukový piezoelektrický generátor s křemenným krystalem délky $d = 9 \text{ mm}$ upevněným uprostřed, má oba konce volné.

Vypočítejte:

- rychlost podélné akustické vlny,
- základní frekvenci podélných kmitů.

Hustota křemene je $\rho = 2,65 \cdot 10^3 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$, modul pružnosti v tahu $E = 8 \cdot 10^{10} \text{ N}\cdot\text{m}^{-2}$.

Řešení:

- a) Pro rychlost podélné akustické vlny lze psát vztah $c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ a po dosazení

$$c = \sqrt{\frac{8 \cdot 10^{10}}{2,65 \cdot 10^3}} = 5494 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$

- b) Pro oba konce volné základní frekvence odpovídá případu, kdy na celé délce krystalu vznikne jedna půlvlna (na volných koncích jsou kmitny), proto

$$f = \frac{c}{\lambda} = \frac{c}{2d} = \frac{5494}{2 \cdot 9 \cdot 10^{-3}} = 305 \cdot 10^3 \text{ s}^{-1}$$

Příklad 5.2

Rovinná harmonická vlna s frekvencí $f = 600 \text{ s}^{-1}$ má v daném prostředí fázovou rychlost $c = 360 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

Vypočítejte:

- a) vzdálenost dvou bodů prostředí, kterým se vlna šíří, jestliže se v nich fáze liší o $\frac{\pi}{3}$,
- b) fázový rozdíl mezi dvěma výchylkami určitého bodu po uplynutí časového intervalu $\Delta t = 10^{-2}$ s.

Řešení:

- a) Mezi dráhovým Δx a fázovým rozdílem $\Delta\Phi$ dvou kmitajících bodů je relace

$$\Delta\Phi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta x \text{ a po vyjádření } \Delta x \text{ a dosazení je}$$

$$\Delta x = \frac{\lambda}{2\pi} \Delta\Phi = \frac{c}{2\pi f} \Delta\Phi = \frac{360}{2\pi \cdot 600} \cdot \frac{\pi}{3} = 0,1 \text{ m}$$

- b) Pro fázi Φ bodu kmitajícího harmonicky platí $\Phi = \omega t - kx$

a pro fázi v okamžiku $t + \Delta t$ platí pro stejný bod $\Phi + \Delta\Phi = \omega(t + \Delta t) - kx$.

Odečtením rovnic pro fáze dostaneme, že za časový interval Δt se fáze vlnění v určitém bodě změní o $\Delta\Phi = \omega\Delta t$. Po dosazení $\Delta\Phi = 2\pi f \Delta t = 2\pi \cdot 600 \cdot 0,01 = 12\pi$.

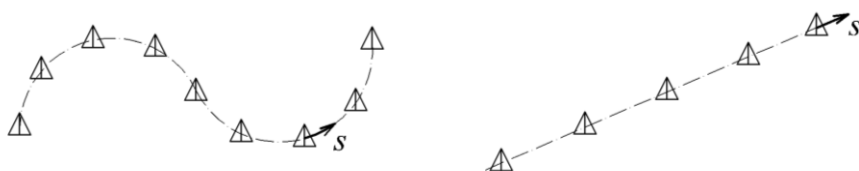
Fázový rozdíl je celistvý násobek 2π , a proto výchylky odpovídají stejné fázi.

6. Mechanika tekutin

6.1 Předmět mechaniky tekutin

Plyny a kapaliny tvoří **tekutiny**. Od pevných látek, kde jsou jednotlivé molekuly a atomy vázány na určité rovnovážné polohy, se liší tím, že hmotné elementy mohou vykonávat makroskopický pohyb, mohou „téci“. Nazýváme je proto tekutiny.

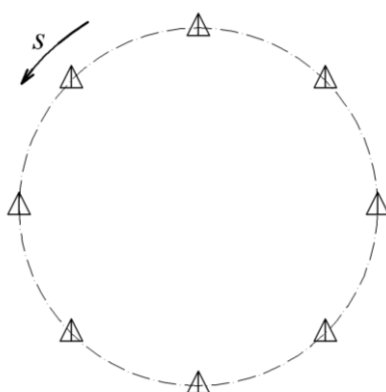
Tekutiny můžeme podle jejich vlastností dělit na **stlačitelné** a **nestlačitelné**. Za nestlačitelné obvykle považujeme kapaliny, zatímco plyny řadíme mezi stlačitelné tekutiny. Dalším kritériem pro dělení tekutin je existence **vnitřního tření (vazkosti)** v tekutině. Můžeme-li vnitřní tření zanedbat a nepočítat s ním, pracujeme s modelem **ideální tekutiny**. Mnohem složitější případ představují tekutiny, jejichž vazkost nemůžeme zanedbat. Takové tekutiny nazýváme **reálné (skutečné)**.



Obr. 6.1

Proudění ideální tekutiny může být:

- 1) **Potenciální (nevírové)** – částice se pohybují přímočaře nebo křivočaře po drahách tak, že vůči pozorovateli se neotáčejí kolem vlastní osy (obr. 6.1). Natočení částice na křivé dráze je kompenzováno stejně velkým natočením částice kolem vlastní osy, ale v opačném směru. Mezi potenciální proudění patří rovněž potenciální vír, u něhož částice krouží kolem vírového vlákna (čáry) potenciálně s výjimkou částice, která tvoří vírové vlákno (obr. 6.2).



Obr. 6.2

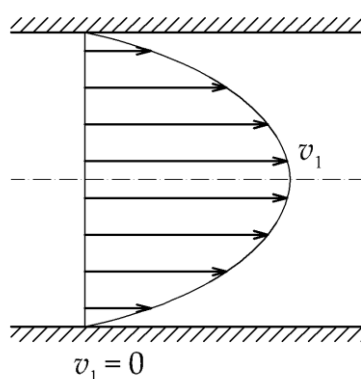
2) **Vírové proudění** – částice se vůči pozorovateli natačejí kolem vlastních os (obr. 6.3)



Obr. 6.3

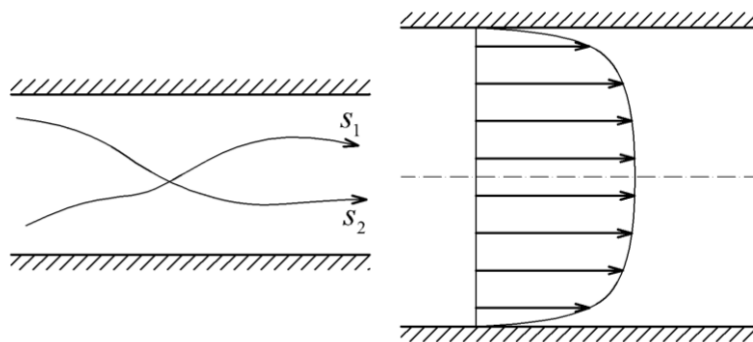
Proudění skutečných tekutin (s vnitřním třením) může být:

1) **Laminární** – částice se pohybují po vrstvách (deskách), aniž se přemísťují po průřezu. Rychlostní profil je na obr. 6.4.



Obr. 6.4

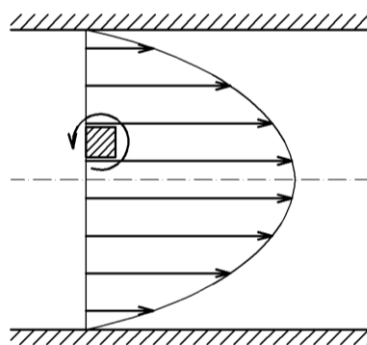
2) **Turbulentní**, kde částice mají kromě postupné rychlosti turbulentní (flukтуаční) rychlost, jíž se přemísťují po průřezu (obr. 6.5). Rychlostní profil je na obr. 6.6.



Obr. 6.5

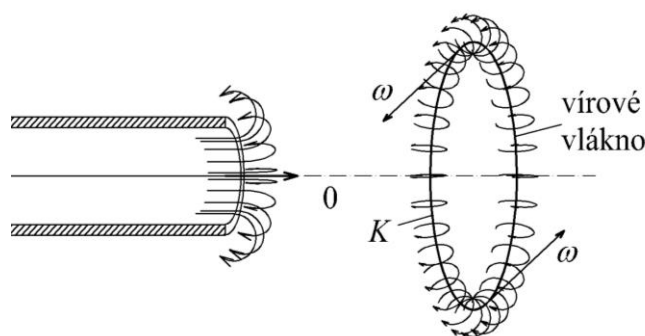
Obr. 6.6

Proudění laminární skutečné tekutiny je vírové. Lze se o tom přesvědčit snadno následující úvahou. Představme si malý objem tekutiny (obr. 6.7), jehož spodní část se pohybuje rychleji než horní, a proto tento objem má snahu otáčet se kolem osy kolmé k nákresně v naznačeném smyslu. Vírová vlákna mají tvar soustředných kružnic, jejichž středy leží na ose trubice.



Obr. 6.7

Vznik vírových prstenců můžeme dobře pozorovat, když naráz vytlačíme vhodně zbarvenou kapalinu z trubice ústící do větší nádržky naplněné vodou (obr. 6.8). Příčná osa O vírového prstence je přitom totožná s osou trubice. Na obrázku čáry s šipkami nejsou vírová vlákna, vírovým vláknem je střední kružnice K prstence. Vírové vlákno má tedy tu vlastnost, že v tečně k němu leží vektor úhlové rychlosti $\vec{\omega}$, jíž se částice kolem vírového vlákna otáčejí. Protože vír se skládá ze stejných částic tekutiny, je v jistém smyslu samostatným tělesem, které ovšem může měnit svou polohu a svůj tvar jako pružná hadice. Proto se při výtoku vytvoří vírový prstenec, který se od ústí trubice uvolní a putuje samostatně do kapaliny v nádrži.



Obr. 6.8

Pro malou kinetickou energii částic a převládající vnitřní tření v tekutině se nemohou víry uvnitř trubice zdatelně rozvinout. Proudění probíhá proto tak, jako by se skládalo z nekonečně tenkých vírových vláken tvaru soustředných kružnic.

Laminární proudění se může udržet jen do jisté kritické střední rychlosti. Při větších středních rychlostech začne převládat rušivý vliv vírů, proudění se zcela změní a proudová vlákna se začnou proplétat. Vzniká turbulentní proudění.

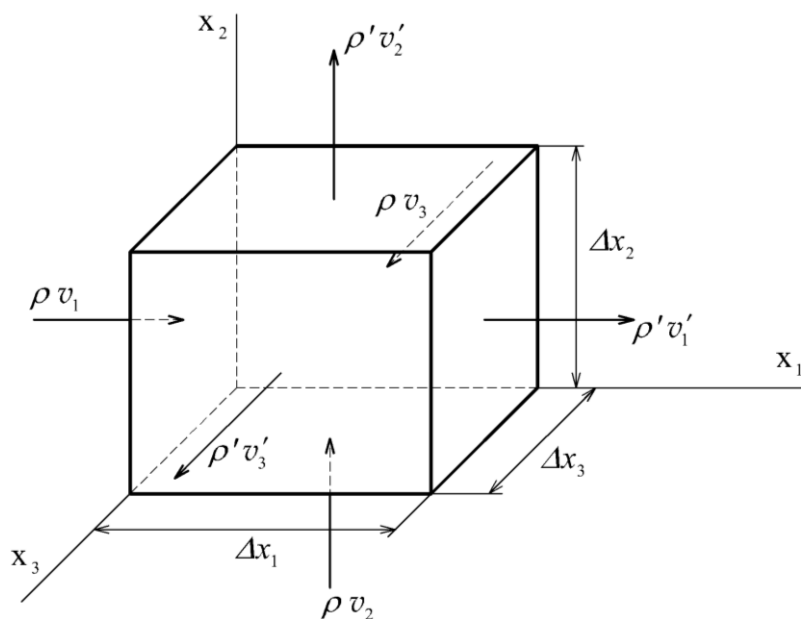
Při turbulentním proudění se zdatelně rozvinou víry v tekutině a nastává promíchávání tekutiny. Rychlost jednotlivých částic se nepravidelně mění, proudění již není ani stacionární. Přesto je však možno zjistit průměrné rozložení rychlosti v průtočném průřezu, jak je pro osový řez naznačeno na obr. 6.6. Rychlostní profil není parabolický jako při laminárním proudění, rychlost je v celé vnitřní části trubice přibližně konstantní, s výjimkou tenké vrstvy při stěně, v níž prudce stoupá, a to přibližně úměrně se vzdáleností od stěny. Střední rychlost je tedy mnohem bližší maximální rychlosti než při laminárním proudění.

Pro charakterizaci proudění se používá Reynoldsovo číslo Re . Při $Re \rightarrow \infty$ je proudění potenciální, pro velké Re je proudění turbulentní a malé Re znamená laminární proudění. Je zřejmé,

že existuje jistá, tzv. kritická hodnota Re_k , pod níž je proudění laminární a nad níž je proudění turbulentní. Z pokusů plyne, že kritickou hodnotou je $Re_k \approx 1000$. Z hodnoty Reynoldsova čísla můžeme při daných podmínkách (průměr trubice, kterou tekutina proudí) stanovit kritickou střední rychlost v_{kr} . Do této rychlosti je proudění laminární, při větší rychlosti je turbulentní.

6.2 Bilance hmotnosti

Kinematické a dynamické chování tekutin můžeme podobně jako v případě pevných látek charakterizovat některými zákony zachování. Zákony zachování, které jsme zatím formulovali (zachování hybnosti, momentu hybnosti, energie), platily pro izolovanou soustavu. Jestliže soustava není izolovaná, a její objem je otevřen pro okolní prostředí, přechází zákon zachování v **bilanční rovnici**. Kvantitativně hodnotíme, zdali množství vyšetřované tekutiny, které by pro izolovanou soustavu zůstávalo neměnné, se mohlo změnit, zvětšit nebo zmenšit. Hodnocení se provádí tak, že sledujeme, jaké množství veličiny (například hmotnosti) přibylo nebo ubylo z okolí do daného objemu ΔV přes plochu ΔS , která obklopuje objem ΔV . Situace je zobrazena na obr. 6.9.



Obr. 6.9

Zabývejme se bilancí hmotnosti v určitém objemovém elementu ΔV za předpokladu, že známe rychlost proudění \vec{v} v každém místě a okamžiku. Zvolme v tekutině nehybný elementární kvádr s objemem ΔV (obr. 6.9) tak, jako jsme to již udělali v odst. 4.2, když jsme se zabývali působení vnitřní povrchové síly v kontinuu. Orientace kvádru je zřejmá z nákresu, jeho rozměry jsou $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3$. Tekutina přitéká ploškami ΔS_i a odtéká protilehlými ploškami vzdálenými o Δx_i . Objem tekutiny, který proteče za čas Δt ploškou ΔS_i , je $v \Delta t \Delta S_i$, je-li v velikost rychlosti, kterou tekutina proudí kolmo na uvažovanou plošku.

Hmotnost, která proteče elementární ploškou za čas Δt , je

$$\Delta m = \rho \Delta V ,$$

kde ρ je hustota tekutiny v objemu ΔV .

Hmotnost tekutiny přitéklé rychlostí v_i za časový interval Δt ploškou ΔS_i můžeme stanovit jako $\rho v_i \Delta S_i \Delta t$, podobně množství odteklé protilehlou ploškou jako $\rho' v'_i \Delta S_i \Delta t$. Rozdíl mezi vyteklým a přitéklým množstvím tekutiny z objemu ΔV za časový interval Δt stanovíme vztahem

$$-\Delta m = [(\rho' v'_1 - \rho v_1) \Delta S_1 + (\rho' v'_2 - \rho v_2) \Delta S_2 + (\rho' v'_3 - \rho v_3) \Delta S_3] \Delta t .$$

Výraz v první závorce můžeme podrobněji rozepsat jako

$$-\Delta m_1 = [\rho(x_1 = \Delta x_1) v_1(x_1 = \Delta x_1) - \rho(x_1 = 0) v_1(x_1 = 0)] \Delta S_1 \Delta t .$$

Rozepsaný výraz představuje úbytek hmotnosti v objemu ΔV za časový interval Δt prouděním ve směru osy x_1 . Jestliže celý výraz pro úbytek hmotnosti $-\Delta m$ (ve všech třech směrech) vydělíme objemem ΔV a časovým intervalem Δt a provedeme limitní přiblížení

$\Delta V \rightarrow 0$ a $\Delta t \rightarrow 0$, je na levé straně rovnice $-\frac{\partial \rho}{\partial t}$ a na pravé straně můžeme upravit jednotlivé členy tak, že například pro první člen (ve směru osy x_1) dostaneme

$$\frac{\partial(\rho v_1)}{\partial x_1} .$$

Parciální derivaci píšeme proto, že ρ a v_k jsou obecně funkcí i dalších proměnných. Celou rovnici můžeme přepsat do tvaru

$$-\frac{\partial \rho}{\partial t} = \text{div } \rho \vec{v} , \quad (6.1)$$

protože

$$\text{div } \rho \vec{v} = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial(\rho v)_k}{\partial x_k} = \frac{\partial(\rho v_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(\rho v_2)}{\partial x_2} + \frac{\partial(\rho v_3)}{\partial x_3} .$$

Rovnice (6.1) se nazývá **rovnice kontinuity** a vyjadřuje skutečnost, že přírůstek hmotnosti tekutiny v elementárním objemu ΔV za elementární časový interval se rovná hmotnosti, která přitekla do tohoto objemu za stejnou dobu rychlostí \vec{v} přes plochu, kterou je objem uzavřen.

Výraz $\rho \vec{v}$ definuje velikost **toku plošné hustoty hmotnosti** \vec{j}_m . Pro \vec{j}_m platí relace

$$\vec{j}_m = \rho \vec{v} . \quad (6.2)$$

Vztah (6.2) je vektorová rovnice pro tok plošné hustoty hmotnosti. Rovnici kontinuity (6.1) v diferenciálním tvaru lze přepsat do integrálního tvaru. Při její formulaci si stačí uvědomit její slovně vyjádřený obsah a můžeme psát

$$\iiint_{\Delta V} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = \oiint_{\Delta S} \rho \vec{v} \cdot d\vec{S} = \oiint_{\Delta S} \vec{j}_m \cdot d\vec{S} ,$$

kde $d\vec{S}$ je vektor kladné normály k ploše dS .

Na levé straně rovnice integrujeme přes objem ΔV a dostáváme tak celkovou změnu hmotnosti v celém objemu ΔV a obdržíme celkové množství přitekklé tekutiny zmenšené o vyteklou tekutinu přes plochu ΔS z objemu ΔV . Obě hmotnosti, na levé i pravé straně rovnice jsou za stejný časový interval.

Přírůstek hmotnosti tekutiny v určitém objemu se rovná hmotnosti tekutiny, která do objemu přitekla, zmenšené o hmotnost tekutiny, která vytekla. Tato bilanční rovnice je zobecněním zákona zachování hmotnosti pro neizolovanou soustavu.

Přenos hmotnosti se děje výhradně prouděním, ačkoliv přenos jiných veličin se může dít i jinými způsoby, například vedením nebo zářením (radiací). Časová změna hmotnosti v nějakém objemu je způsobena konvekcí přes jeho povrch.

Je-li proudění stacionární (ustálené), pak lokální časové změny všech veličin jsou nulové, a tedy i $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ je nulová. Dosadíme-li tuto podmínku do rovnice kontinuity, vztah (6.1), dostaneme, že $\text{div } \rho \vec{v} = 0$. Bude-li tekutina ustáleně proudit trubicí o různých průřezech S_1, S_2 , můžeme využít integrální tvar rovnice kontinuity a platí

$$\rho_1 v_1 S_1 = \rho_2 v_2 S_2 . \quad (6.3)$$

Nestlačitelná je taková tekutina, která nemění svou hustotu ani s časem ani s místem. Platí pro ni vztah $\rho(\vec{r}, t) = \text{konst}$. Tuto podmínku můžeme uplatnit v relacích

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 , \quad \text{grad } \rho = 0 .$$

První podmínka říká, že tekutina může mít různou hustotu v různých místech, ale v libovolném místě zůstává neměnná. Druhá podmínka stanoví, že hustota se sice mění s časem, ale pro všechny materiálové body je tato změna stejná. Aplikujeme-li tyto dílčí poznatky v relaci (6.3), pak rovnice kontinuity pro nestlačitelnou tekutinu má tvar

$$v_1 S_1 = v_2 S_2 , \quad (6.4)$$

protože $\rho_1 = \rho_2$.

Lokální rovnice (platná v kterémkoliv bodě) pro nestlačitelnou tekutinu má tvar

$$\text{div } \vec{v} = 0 . \quad (6.5)$$

6.3 Bilance hybnosti a energie

Pro hmotný bod jsme v mechanice dospěli k jednoduchému závěru pro hybnost, který vyplývá z 2. Newtonova zákona $\vec{F} = \frac{d}{dt}(m\vec{v})$. V kap. 4 jsme zjistili, že na objemový element ΔV tekutiny s hmotností Δm mohou působit síly objemové $\Delta\vec{F}_0$, tlakové $\Delta\vec{P}_t$ a síly vazkosti $\Delta\vec{P}_v$, kterými jsme se zatím nezabývali. Pohybovou rovnici pro materiálový bod Δm můžeme napsat ve tvaru

$$\Delta m \vec{a} = \Delta\vec{F}_0 + \Delta\vec{P}_t + \Delta\vec{P}_v . \quad (6.6)$$

Vztah (6.6) vydělíme ΔV a provedeme limitní přiblížení $\Delta V \rightarrow 0$. Na pravé straně rovnice dostaneme výrazy pro hustoty sil, kterými jsme se již zabývali v kap. 4, a které charakterizují silové působení v každém bodě kontinua. Platí pro ně

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \rho$$

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{F}_0}{\Delta V} = \rho\vec{K}$$

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{P}_t}{\Delta V} = -\text{grad } p$$

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{P}_v}{\Delta V} = \vec{f}_v ,$$

kde \vec{K} je intenzita vnějších objemových sil, \vec{p} je hydrostatický tlak, \vec{f}_v jsme označili hustotu vazkých sil.

Pohybová rovnice pro vazkou tekutinu v určitém místě má tedy tvar

$$\rho\vec{a} = \rho\vec{K} - \text{grad } \vec{p} + \vec{f}_v . \quad (6.7)$$

Pro tíhové pole je intenzita $\vec{K} = \vec{g}$.

Rovnici (6.7) můžeme vyjádřit ve složkách. Rovnice pro první složku má tvar

$$\rho a_1 = \rho K_1 - \frac{\partial p}{\partial x_1} + f_{v1} .$$

Pro ideální tekutiny, kde neexistuje vnitřní tření, je tvar rovnice jednodušší

$$\rho a_1 = \rho K_1 - \frac{\partial p}{\partial x_1} .$$

Rovnice se nazývá **Eulerova pohybová rovnice** pro první složku. Její vektorový zápis zní

$$\rho \vec{a} = \rho \vec{K} - \text{grad } p . \quad (6.8)$$

Jestliže objemové síly jsou konzervativní a mají potenciál, který označíme U , pak

$$\rho \vec{a} = \rho \text{grad } U - \text{grad } p .$$

Tuto rovnici můžeme dále upravit

$$\vec{a} \cdot d\vec{r} = -dU - \frac{1}{\rho} dp . \quad (6.9)$$

Abychom mohli s touto rovnicí dále pracovat, je třeba si znovu připomenout důležitý poznatek platný v oblasti kontinua, o kterém jsme se již zmínili na začátku kap. 4. Každou časovou změnu veličiny podle vztahu (4.9) musíme v kontinuu vytvořit ze dvou složek, lokální (místní) změny a změny konvektivní spojené s pohybem kontinua.

Lokální změna odpovídá situaci, kdy sledujeme změny veličiny v nehybném bodě kontinua. Druhá, konvektivní změna veličiny, souvisí s pohybem kontinua. Je zjišťována v souřadnicové soustavě pevně spojené s pohybujícím se kontinuem, v našem případě s tekutinou, jejíž rychlost proudění je \vec{v} .

Celkovou časovou změnu veličiny $F(x_1, x_2, x_3)$ můžeme vyjádřit podle vztahu (4.9) ve tvaru

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial F}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial t} + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial F}{\partial x_k} v_k ,$$

kde jsme využili jsme známý vztah pro složky rychlosti $v_k = \frac{dx_k}{dt}$.

První člen na pravé straně rovnice odpovídá lokální časové změně veličiny a další členy konvektivní změně. Tento vztah můžeme napsat pro libovolnou veličinu. Jestliže vyjádříme zrychlení v rovnici (6.9) jako $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ a využijeme rozepsaný tvar relace (4.9), dostaneme pro veličinu \vec{a}

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_k} v_k ,$$

kde lokální derivaci $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$ jsme položili rovnou nule, protože předpokládáme ustálené proudění tekutiny.

Člen $\vec{a} \cdot d\vec{r}$ na levé straně rovnice (6.9) můžeme po dosazení za \vec{a} upravit

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot d\vec{r} &= \sum_{i=1}^3 a_i dx_i = \sum_{i=1}^3 \frac{dv_i}{dt} dx_i = \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{dx_k}{dt} dx_i \\ &= \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 \frac{\partial v_i}{\partial x_k} dx_k \frac{dx_i}{dt} = \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 \frac{\partial v_i}{\partial x_k} dx_k v_i = \sum_i dv_i v_i = d\left(\frac{1}{2}v^2\right).\end{aligned}$$

Rovnici (6.9) pak můžeme přepsat do tvaru

$$d\left(\frac{1}{2}v^2\right) + dU + \frac{1}{\rho} dp = 0. \quad (6.10)$$

Jestliže tekutina je nestlačitelná, (tento předpoklad platí pro kapaliny), ρ je konstantní a provedeme integraci podél trajektorie hmotného bodu, dostáváme jednu ze základních rovnic hydrodynamiky, **Bernoulliovu rovnici** pro ustálené proudění ideální nestlačitelné tekutiny, která má tvar

$$\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho U + p = \text{konst.} \quad (6.11)$$

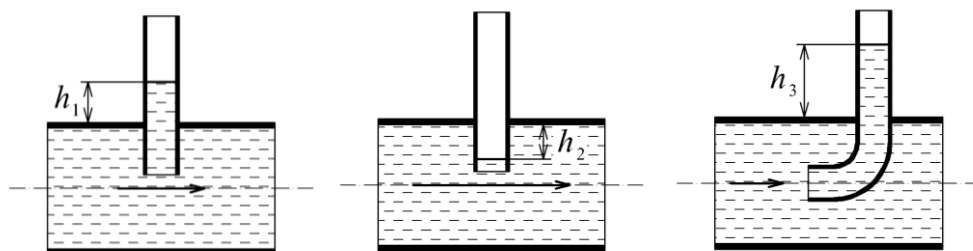
Význam členů v Bernoulliově rovnici je následující:

$\frac{1}{2}\rho v^2$ má význam hustoty kinetické energie,

ρU má význam hustoty potenciální energie $\Delta W_p = \Delta m U$,

p má význam hustoty práce tlakových sil, protože $\Delta A = \vec{F}_i \cdot \Delta\vec{r} = pS \Delta r = p\Delta V$.

Bernoulliova rovnice je bilanční rovnice pro energii. **Součet mechanické energie a práce tlakových sil je pro stacionární proudění nestlačitelné tekutiny podél trajektorie konstantní.** Trajektorie je v tomto případě totožná s proudnicí.



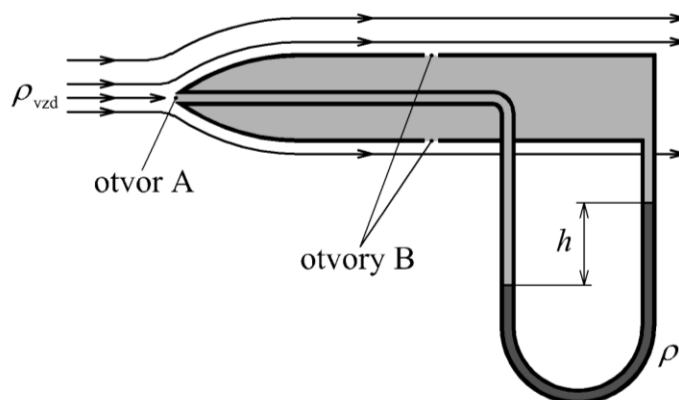
Obr. 6.10 a

Obr. 6.10 b

Obr. 6.10 c

Důsledků Bernoulliovy rovnice se využívá k měření rychlosti proudění tekutiny. Uvažujme nyní vodorovné potrubí, kterým proudí kapalina. Vložíme-li do něj přímou trubici (obr. 6.10 a) kolmo na směr proudění, vystoupí v ní kapalina do výše h_1 , jež odpovídá statickému tlaku uvnitř potrubí. V takovém případě je uvnitř potrubí přetlak proti atmosférickému tlaku. Je-li v potrubí podtlak, bude jeho velikost udávat pokles hladiny h_2 v trubici (obr. 6.10 b). Vložíme-li nyní do stejného místa v potrubí trubici se zahnutým koncem (obr. 6.10 c) tak, aby osa zahnuté části souhlasila s osou proudění a směřovala proti proudění,

vystoupí v ní hladina do výše h_3 . Taková trubice se nazývá **Pitotova**. Výše kapaliny v trubici je způsobena tlakem statickým a tlakem, ve který se přemění hustota kinetické energie kapaliny. Výraz $\frac{1}{2}\rho v^2$ v Bernoulliově rovnici se nazývá kinetický tlak p_k a pro kapaliny je roven tlaku dynamickému p_d . Dynamický tlak je definován jako rozdíl celkového tlaku a tlaku statického. Pro plyny, které jsou na rozdíl od kapalin stlačitelné, je dynamický tlak větší než kinetický tlak, neboť s rostoucím tlakem se zvyšuje hustota plynu. Platí tedy $p_d = sp_k$, kde s je opravný součinitel na stlačitelnost tekutin ($s > 1$).



Obr. 6.11

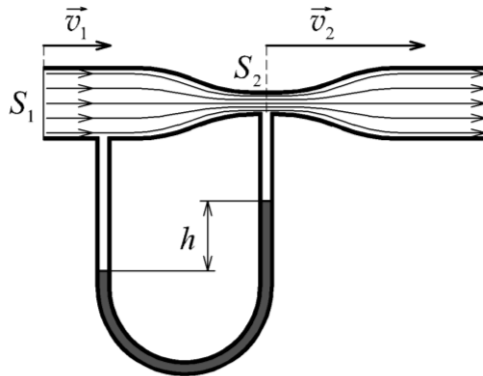
Pitotova trubice v uspořádání zobrazeném na obr. 6.11 se nazývá **Prandtlůva trubice** a užívá se k určení rychlosti letadla. Sestává z vnější trubice, na jejímž boku je větší počet malých otvorů B. Trubice je spojena s jedním koncem manometru (na obrázku je manometrem U-trubice). Druhý konec manometru je spojen s vnitřní trubicí přístroje, do které vzduch vstupuje čelním otvorem A. Pro rychlost proudění pak platí výraz

$$v = \sqrt{\frac{2\rho gh}{\rho_{\text{vzd}}}} . \quad (6.12)$$

Venturiův průtokoměr (obr. 6.12) je přístroj, který slouží k měření rychlosti proudění potrubím, a tím i k měření množství kapaliny, které trubicí protéká. Rychlost proudění se určí ze změřeného rozdílu tlaků mezi místem, kde trubice má svůj běžný průměr, a mezi zúženým místem, tzv. krčkem. V místech, kde trubice má svůj běžný průměr (obsah průřezu S_1), tedy i místě 1, kde je připojen jeden konec manometrické trubice, má kapalina rychlost v_1 . V krčku, kde je obsah průřezu S_2 , je v místě 2 připojen druhý konec manometrické trubice. Kapalina zde má vyšší rychlost v_2 . Použije-li se Bernoulliova rovnice pro vodorovnou trubicí a rovnice kontinuity, lze určit rychlost v_1 vztahem

$$v_1 = \sqrt{\frac{2S_2^2 \Delta p}{\rho(S_1^2 - S_2^2)}} , \quad (6.13)$$

kde $\Delta p = \rho_n g h$ (ρ_n je hustota kapaliny v U-trubici manometru, h je rozdíl hladin v U-trubici) a ρ je hustota proudící kapaliny.



Obr. 6.12

Příklad na použití pohybové rovnice :

Nejjednodušším případem pohybového stavu tekutiny je klid, potom podle vztahu (6.8) platí

$$0 = \rho \vec{K} - \text{grad } p . \quad (6.14)$$

Rovnice (6.14) je **základní rovnice hydrostatiky**.

Jsou-li objemové síly nulové (někdy je můžeme proti ostatním silám zanedbat), pak pohybová rovnice ideální kapaliny (6.8) má tvar

$$0 = -\text{grad } p$$

a z tohoto vztahu vyplývá, že $p(\vec{r}) = \text{konst}$. Dostali jsme vyjádření **Pascalova zákona**. Tlak je ve všech bodech kapaliny stejný.

Působí-li jako objemová síla gravitační síla, pak z rovnice (6.8) dostaneme relaci

$$0 = \rho \vec{g} - \text{grad } p .$$

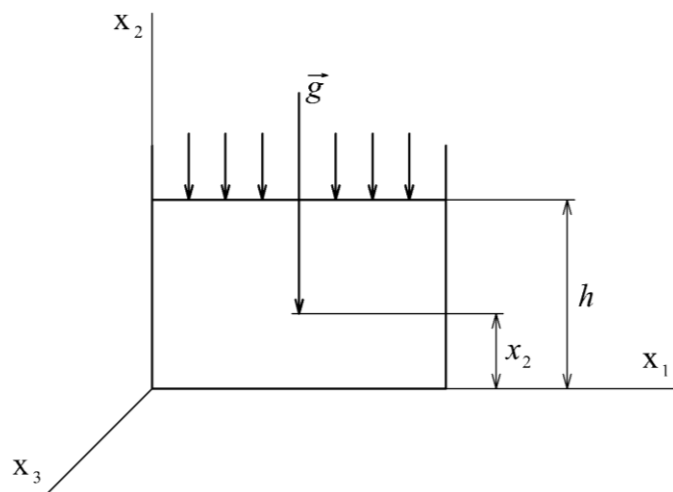
Orientujeme-li \vec{g} proti směru osy x_2 , obr. 6.13, můžeme pohybovou rovnici rozepsat do složek

$$0 = \frac{\partial p}{\partial x_1} , \quad -\rho g = \frac{\partial p}{\partial x_2} , \quad 0 = \frac{\partial p}{\partial x_3} .$$

Řešením poslední rovnice je relace

$$p = -\rho g x_2 + C ,$$

kde C je integrační konstanta, kterou určíme z okrajové podmínky.



Obr. 6.13

Protože $p = p_0$ (p je atmosférický tlak) pro $x_2 = h$, dostaneme z okrajové podmínky pro integrační konstantu C vztah

$$C = p_0 + \rho gh$$

a po dosazení do vztahu pro p

$$p = p_0 + \rho g(h - x_2) . \quad (6.15)$$

Vztah (6.15) udává hodnotu tlaku kapaliny např. na stěnu nádoby v hloubce $h - x_2$ pod hladinou. Tlak na dno nádoby pro $x_2 = 0$ je

$$p = p_0 + \rho gh .$$

Zatím jsme uvažovali nestlačitelnou kapalinu, kde $p = \text{konst.}$ Je-li tekutina stlačitelná, můžeme např. pro zemskou atmosféru předpokládat, že přibližně platí

$$\frac{p}{p_0} = \frac{\rho}{\rho_0} .$$

Hustota se s tlakem mění lineárně, což odpovídá atmosféře s konstantní teplotou (izotermický děj charakterizovaný vztahem $pV = \text{konst.}$).

Jestliže p pro zemskou atmosféru není konstantní, nebude již platit vztah (6.15), protože v integraci, kterou jsme prováděli, bude

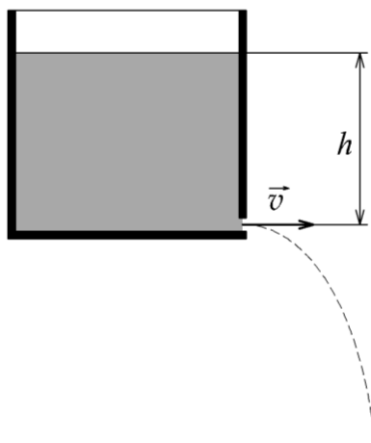
$$\rho = \rho(p) = \rho \frac{p}{p_0} ,$$

a namísto vztahu (6.15) dostaneme složitější výraz pro výpočet tlaku p

$$p = p_0 \exp\left(\frac{\rho_0}{p_0} g x_2\right).$$

Vzorec se někdy nazývá **barometrická formule** a umožňuje stanovit barometrický tlak p ve výšce x_2 nad povrchem Země.

Aplikace Bernoulliovy rovnice na výtok kapaliny otvorem



Obr. 6.14

Předpokládejme, že nádoba je naplněna kapalinou do výše h a otvorem u dna nádoby kapalina vytéká (obr. 6.14). Zanedbáme vnitřní tření a kapalinu budeme považovat za nestlačitelnou. Na hladině předpokládáme atmosférický tlak p_a a rychlost kapaliny nulovou, vně otvoru rychlost velikosti v . Pro potenciál v poli tíhových sil platí $U = g x_2$. Aplikací Bernoulliho rovnice dostaneme relaci

$$\rho g h = \frac{1}{2} \rho v^2.$$

Z této relace získáme vztah pro rychlost vytékající kapaliny, který se nazývá Torricelliho vztah

$$v = \sqrt{2gh}. \quad (6.16)$$

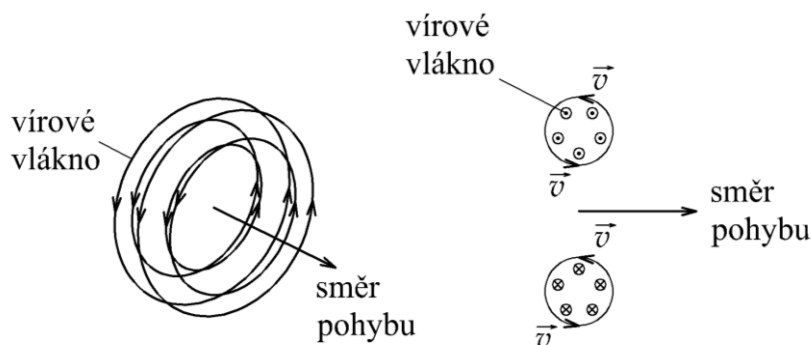
6.4 Obtékání těles

Studium obtékání tělesa tekutinou je důležité pro pochopení a vysvětlení sil působících na křídlo letadla, stejně tak pro případ automobilu pohybujícího se velkou rychlostí. Znalost sil, vznikajících při obtékání těles, se rovněž uplatňuje např. při konstrukci turbín.

Při obtékání tělesa ideální tekutinou, nevznikají žádné síly, které by na těleso působily, neboť proudnice dokonale sledují povrch tělesa. Při obtékání tělesa skutečnou tekutinou vznikají víry, které hrají důležitou roli při vzniku sil působících na těleso.

$$\vec{\Omega} = 2\vec{\omega} = \text{rot } \vec{v} \quad (6.17)$$

se nazývá **vírem rychlosti**. Podle toho, zda je vír rychlosti různý od nuly, či se rovná nule, dělíme pohyb tekutiny na dvě důležité skupiny. V prvním případě, kdy aspoň v určité části tekutiny je $\vec{\Omega} \neq 0$, nazýváme pohyb tekutiny **vířivým**, v druhém případě, kdy v každém bodě tekutiny je $\vec{\Omega} = 0$, označujeme příslušný pohyb za **nevířivý**.

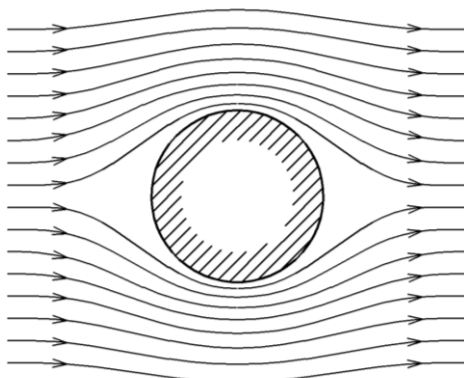


Obr. 6.15

Na obrázku 6.15 je znázorněn vírový prstenec, ve kterém jsou naznačeny vírová vlákna. Prstenec tvoří vírovou trubici. Podle druhé věty Helmholtzovy, která vyjadřuje vlastnosti vírové trubice, platí, že vírová trubice nikdy nemůže v tekutině vymizet, tj. musí buď sahat až k ohraničení tekutiny (dno, stěny, volná hladina), anebo musí být uzavřená (tj. tvoří prstencovou plochu – případ uvedený na obrázku 6.15).

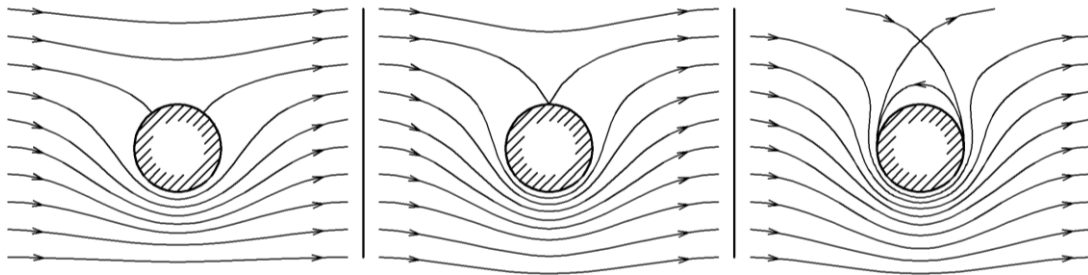
Pokud oblast není jednoduše souvislá, mohou být proudnice uzavřené křivky, a přitom nemusí v tekutině existovat vír. Říkáme potom, že cirkulace rychlosti $\Gamma \equiv \oint \vec{v} \cdot d\vec{s}$ je nenulová.

Uvažujme obtékání kruhového válce. Na obr. 6.16 je znázorněno necirkulační proudění. Vztlačková síla, působící na válec je v tomto případě rovná nule. $F_{Vx_1} = 0$, $F_{Vx_2} = 0$, F_{Vx_1} je velikost síly, která míří vodorovně, F_{Vx_2} je velikost síly, která míří svisle vzhůru.



Obr. 6.16

Dále se zaměříme na proudění cirkulační, které je znázorněno na obrázku 6.17.



Obr. 6.17

Pro toto proudění odvodil Rayleigh, že vztahová síla je nenulová. $F_{Vx_1} = 0$ ale

$$F_{Vx_2} = -\rho\Gamma v_\infty L, \quad (6.18)$$

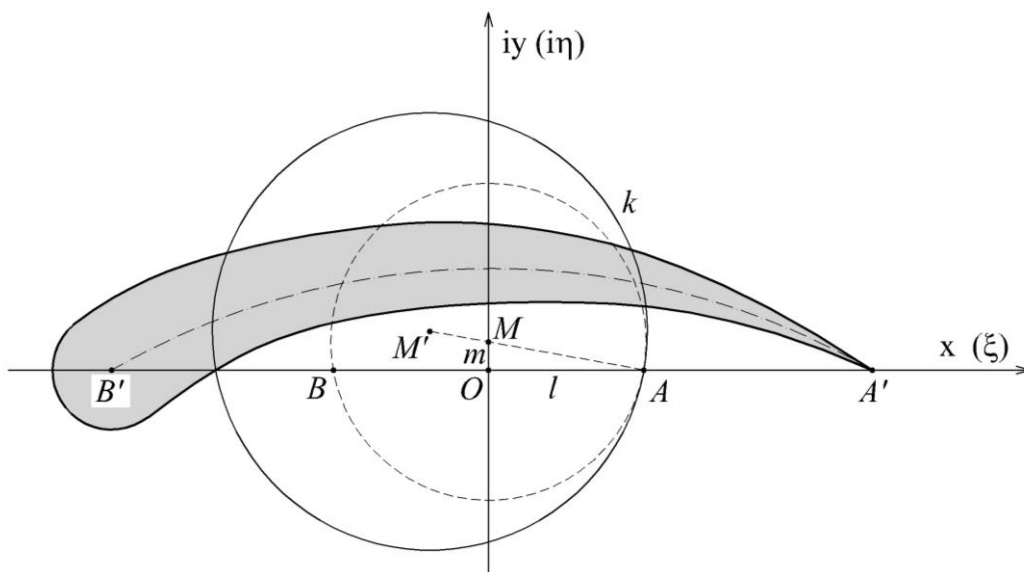
kde ρ je hustota tekutiny, v_∞ je rychlost tekutiny v „nekonečnu“, L je výška válce. Označíme-li F_{V1} sílu, která působí na jednotkovou výšku válce, lze s použitím (6.18) psát

$$F_{V1x_2} = -\rho\Gamma v_\infty. \quad (6.19)$$

Vztah (6.19) se někdy nazývá vztahem Žukovského. Zobecnění vztahu (6.19) na tvar válce, jehož průřez má tvar profilu křídla, podali Kutta a Žukovskij. Využijeme-li konformního zobrazení v rovině komplexních čísel

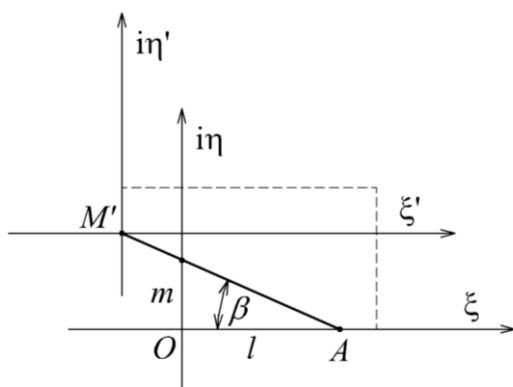
$$w = z + \frac{l}{z}, \quad (6.20)$$

kde l je kladný parametr, lze kružnice jednoduše převést na uzavřené křivky připomínající profily letadlových křídel (obr. 6.18).



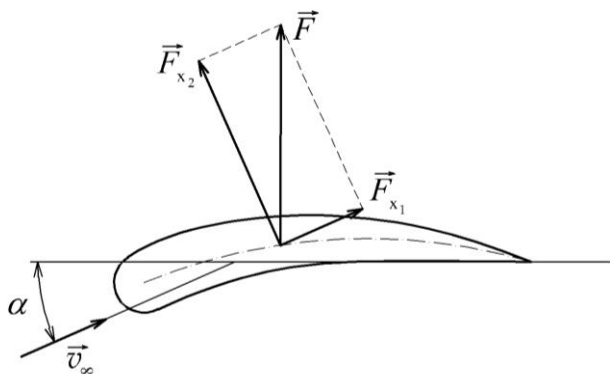
Obr. 6.18

Transformace (6.20) se nazývá Žukovského transformace. A profily křídel, které odpovídají konformnímu zobrazení, se nazývají Žukovského profily. Na obrázku 6.19 jsou překresleny význačné body, které vystupují na obr. 6.18, do dvou souřadnicových systémů v komplexní rovině.



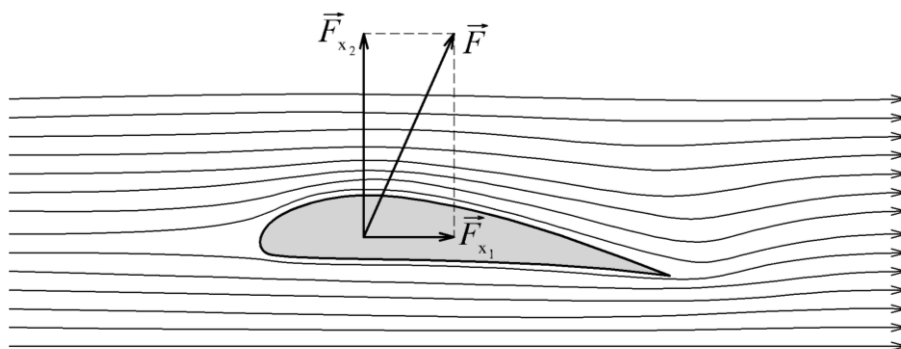
Obr. 6.19

Výslednice tlakových sil je kolmá na směr rovnoměrné rychlosti \vec{v}_∞ , obr. 6.20.



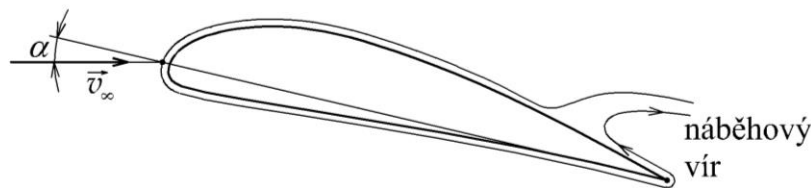
Obr. 6.20

Na obrázku 6.21 jsou mimo sil působících na křídlo také zakresleny proudnice v okolí obtékaného profilu.



Obr. 6.21

Předpokládejme, že tekutina i profil jsou v klidu, cirkulace rychlosti se tedy rovná nule. Nyní se tekutina uvede do rovnoměrného translačního pohybu resp. profil se začne pohybovat vzhledem ke klidné tekutině.



Obr. 6.22

Experimentálně je potvrzeno, že se za takových poměrů nejprve vytvoří necirkulační nevířivé obtékání profilu. Přitom je „zadní“ kritický bod zpravidla umístěn na horní větvi obrysové křivky, takže tekutina obtéká bod velkou rychlostí. S rostoucí rychlostí přichází k uplatnění (i u tekutin s malou vazkostí) síly vazkosti, a to ve velmi tenké vrstvě přiléhající k obrysu (mezní vrstvě). V mezní vrstvě se vytvářejí víry a jelikož je takový vír vázán na tytéž částice tekutiny, je proudící tekutinou strháván, odtrhne se od obrysu. Vznik víru má za následek změnu rychlostního pole.

Z Žukovského hypotézy plyne pro velikost vztlakové síly vztah

$$|\bar{F}_{v1}| = 4\pi\rho v_\infty^2 l \left(\sqrt{1 + \left(\frac{m}{l}\right)^2} + \frac{d}{l} \right) \sin(\alpha + \beta), \quad (6.21)$$

kde α je úhel náběhu (obr. 6.20, obr. 6.22), $\frac{m}{l}$ je vyklenutí profilu, $\frac{d}{l}$ je tloušťka profilu.

Význam dalších veličin vystupujících ve vztahu (6.21) je zřejmý z obrázku 6.19.

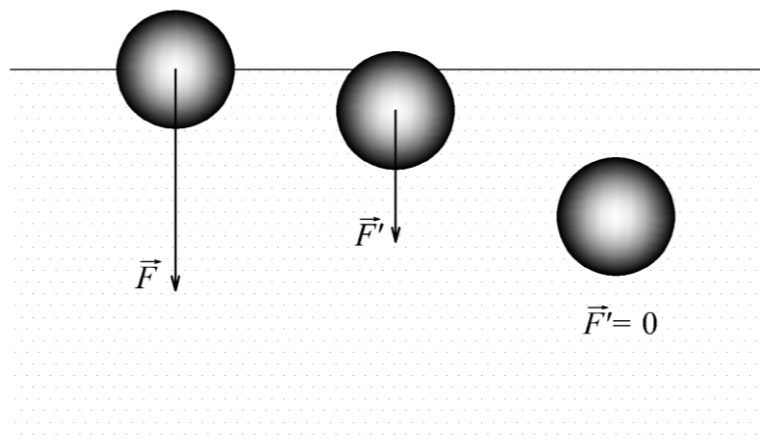
Konformní zobrazení obtékání válce pomocí Žukovského transformace umožňuje teoretické řešení obtékání křídel různých profilů. V praxi se však osvědčily profily, které jednoduchým konformním zobrazením nelze získat. Proto byla vyvinuta metoda singularit, která umožňuje teoretické řešení takovýchto profilů.

Na obr. 6.20 a obr. 6.21 je výsledná aerodynamická síla o velikosti F rozložena do směru shodného se směrem rychlosti nabíhajícího proudu \vec{v}_∞ , odporová síla $F_x = \frac{1}{2} C \rho S v_\infty^2$, C je součinitel odporu, S je půdorysná plocha křídla, a do směru kolmého k nabíhajícímu proudu, vztlaková síla $F_y = |\bar{F}_{v1}| L$.

6.5 Povrchové jevy v kapalinách

Molekuly kapaliny na sebe působí **přitažlivými (kohesními) silami**. Jestliže se molekula nachází v **povrchové vrstvě** (10^{-8} m), přitažlivé síly od okolních molekul (označeny \vec{F}' , \vec{F}'') se již nevyrovnávají (obr. 6.23) a molekula je vtahována do kapaliny. Situace v povrchové vrstvě je proto určována zcela jinou silovou bilancí, a proto vlastnosti této vrstvy jsou odlišné

od vlastností objemových. Například voda v povrchové vrstvě může dosahovat hustoty až $1\,800\text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ a chová se spíše jako elasticky tuhá látka než jako kapalina.

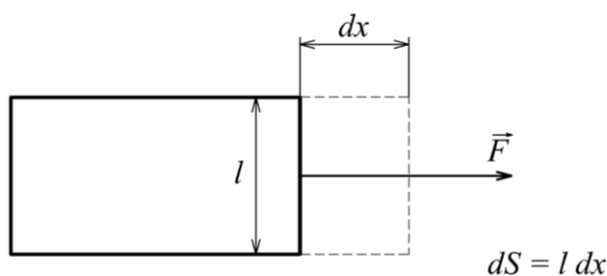


Obr. 6.23

Tloušťka povrchové vrstvy je velice malá (maximálně 10^{-7} m), a proto ji můžeme modelovat dvourozměrnou oblastí – plochou, která odděluje jedno spojité prostředí (objem) s určitými vlastnostmi od druhého (povrchová vrstva). Na této ploše se mohou určité fyzikální vlastnosti (hustota, měrný objem, měrná entropie) měnit nespojitě, skokem.

K vytvoření stabilní povrchové vrstvy je třeba mechanická práce. Kapalina se přitom snaží zaujmout povrch, který by měl co nejmenší plošný obsah. Množství práce nutné k vytvoření povrchu jednotkové velikosti je číselně rovno **povrchovému napětí** σ . Interakční síly mezi molekulami konají tedy práci dA na vytvoření plochy velikosti dS . Pro povrchové napětí platí vztah

$$\sigma = \frac{\partial A}{\partial S} . \quad (6.22)$$

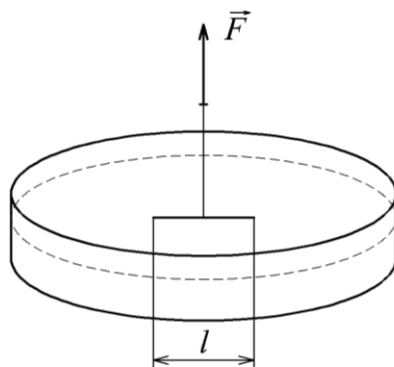


Obr. 6.24

Změnu velikosti povrchu si můžeme představit jako působení síly velikosti F (tečná síla k plošce), obr. 6.24, která posune hraniční čáru l o vzdálenost dx a vytvoří tak nový povrch $dS = l dx$. Přitom se vykoná práce $dA = F dx$. Dosazením do vztahu (6.22) dostaneme pro povrchové napětí výraz

$$\sigma = \frac{F}{l} . \quad (6.23)$$

Povrchové napětí, $[\sigma] = \text{N} \cdot \text{m}^{-1}$, je číselně rovno síle, která působí v rovině povrchu kolmo na jednotku délky. Kvantitativně je možno určit velikost síly F vytahováním drátku (obr. 6.25) z povrchu kapaliny.



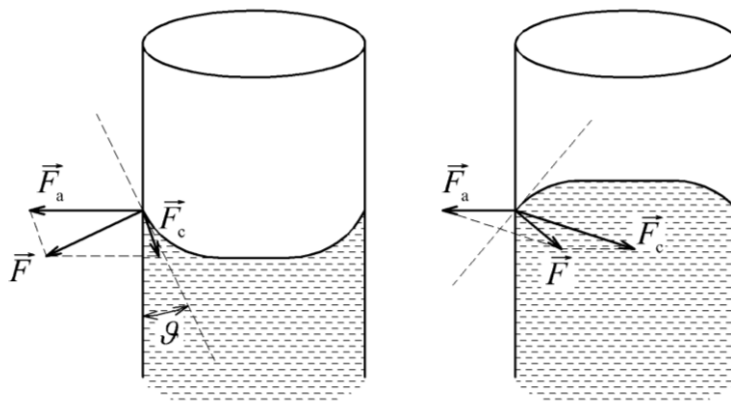
Obr. 6.25

Ukazuje se, že tato síla je úměrná dvojnásobné délce drátu $2l$ umístěného těsně pod povrchem kapaliny, protože povrchová vrstva je z obou stran drátku. Jestliže drátek má hmotnost m a velikost síly potřebné k odtržení drátku z povrchu je F , pak pro povrchové napětí v souladu se vztahem (6.23) platí

$$\sigma = \frac{F - mg}{2l} .$$

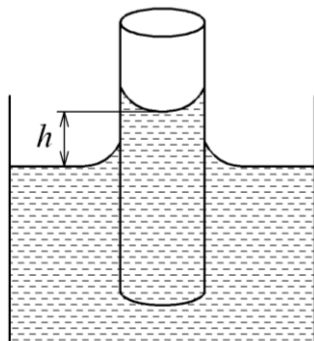
Pro vodu je σ asi $73 \text{ mN} \cdot \text{m}^{-1}$.

Při styku kapaliny se stěnou se uplatňují molekulární síly mezi kapalinou a stěnou (adhesní síly). Výsledná síla působící na rozhraní vzniká složením adhesní a kohesní síly a její směr je kolmý na tečnu k povrchu kapaliny v místě styku kapaliny se stěnou (obr. 6.26). Pro vodu a sklo je úhel ϑ mezi stěnou a tečnou k povrchu kapaliny asi $25,5^\circ$. Pro rtuť a sklo je stykový úhel asi 140° .

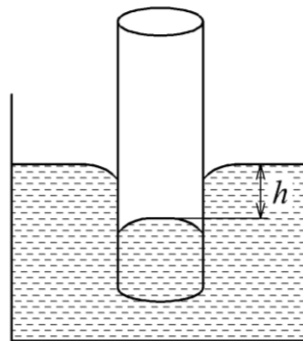


Obr. 6.26

Kapalina buď **smáčí stěnu** (síla \vec{F} směřuje ven), nebo **nesmáčí stěnu** (\vec{F} směřuje do kapaliny). Vložíme-li kapiláru do kapaliny, dojde ke **kapilární elevaci**, kapalina v kapiláře stoupne (obr. 6.27 a), nebo ke **kapilární depresi**, kapalina klesne (obr. 6.27 b). Na obrázku je změna výšky hladiny vyznačena veličinou h . V prvním případě kapalina smáčí stěny, v druhém nesmáčí. Uvedený jev je důsledkem povrchového napětí.



Obr. 6.27 a



Obr. 6.27 b

6.6 Teplotní roztažnost kapalin

Objem kapaliny s teplotou roste. Roztažnost vlivem teploty se uvažuje zpravidla při konstantním tlaku. Součinitel teplotní roztažnosti objemu γ je definován jako změna objemu ΔV připadající na jednotku původního objemu V_0 a jednotku změny teploty Δt

$$\gamma = \frac{1}{V_0} \left(\frac{\partial V}{\partial t} \right)_{p=\text{konst}} = \frac{\Delta V}{V_0} \frac{1}{\Delta t}. \quad (6.24)$$

Protože změna objemu $\Delta V = V - V_0$ je rozdíl konečného objemu $V (> V_0)$ a původního objemu V_0 , dostane se relace pro konečný objem po roztažení

$$V = V_0 (1 + \gamma \Delta t) \quad (6.25)$$

a hustota ρ kapaliny po roztažení je dána vztahem

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{V_0 (1 + \gamma \Delta t)} = \frac{\rho_0}{1 + \gamma \Delta t} \doteq \rho_0 (1 - \gamma \Delta t), \quad (6.26)$$

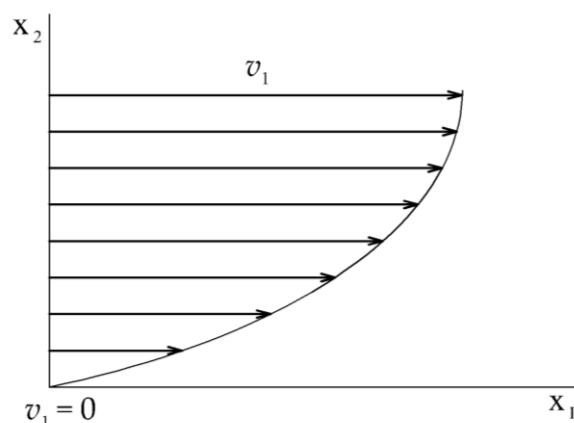
kde m je hmotnost kapaliny a ρ_0 původní hustota kapaliny.

Důležitou výjimku v kapalinách tvoří voda v teplotním intervalu $(0 - 3,98)^\circ\text{C}$, v němž se s rostoucí teplotou objem vody zmenšuje a hustota naopak zvětšuje. Tato vlastnost se nazývá **anomálie vody**. Při teplotě $3,97^\circ\text{C}$ má voda dané hmotnosti nejmenší objem, a tedy největší hustotu. V intervalu teplot vyšších než $3,98^\circ\text{C}$ se objem vody s rostoucí teplotou zvětšuje a hustota se zmenšuje.

Anomálie vody se vysvětluje tím, že led při teplotě 0 °C úplně neroztaje, takže ve vodě zůstávají drobné krystalky ledu. V nich jsou střední vzdálenosti molekul vody větší, než je tomu v kapalném skupenství. Při zvětšování teploty od 0 °C do 4 °C zbytky krystalické mřížky ledu postupně mizí, a tím se zmenšují vzdálenosti mezi molekulami vody, které tvořily krystalickou mřížku. Celkový objem vody klesá a hustota naopak roste. Změna v uspořádání molekul končí při 4 °C, při dalším zvyšování teploty se střední vzdálenosti molekul již zvětšují, objem roste a hustota vody klesá.

6.7 Viskozita

Při proudění tekutiny vznikají mezi sousedními vrstvami síly, které ovlivňují rychlost proudění. Jsou to **síly vnitřního tření** a mají směr tečný k proudící vrstvě. Jak je znázorněno na obr. 6.28, je-li vrchní vrstva kapaliny nějakým způsobem uvedena do pohybu rychlostí \vec{v} , bude se rychlost sousedních vrstev postupně zmenšovat.



Obr. 6.28

V kapalině vznikne silovým působením **vnitřní tečné napětí (vazké napětí)**, pro které podle obr. 6.28 můžeme psát vztah

$$\sigma_{v21} = \eta \frac{\partial v_1}{\partial x_2} . \quad (6.27)$$

Koeficient η se nazývá **koeficient dynamické viskozity**. Vztah (6.27) je **Newtonův zákon viskozity**. Můžeme jej zobecnit na tvar

$$\sigma_{vik} = \eta \frac{\partial v_k}{\partial x_i} . \quad (6.28)$$

Vazké napětí působící v přímce k -té osy a ploškou kolmou na i -tou osu je úměrné změně k -té souřadnice rychlosti podél i -té osy. Vztah (6.28) se nazývá **Navierův – Stokesův zákon**.

Podíl dynamické viskozity a hustoty kapaliny určuje **kinematickou viskozitu** ν , pro kterou platí

$$\nu = \frac{\eta}{\rho} . \quad (6.29)$$

Rozměr dynamické viskozity $[\eta] = \text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$, jednotka je $\text{Pa} \cdot \text{s}$, rozměr kinematické viskozity $[\nu] = \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$.

6.8 Příklady ke kap. 6

Příklad 6.1

Injekční stříkačka délky $l = 6 \text{ cm}$ má průřez pístu $S_1 = 1,1 \text{ cm}^2$ a její zúžený otvor má průřez $S_2 = 1,1 \text{ mm}^2$. Celá je naplněná kapalinou, která má hustotu $\rho = 1,41 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. Stříkačka leží ve vodorovné poloze.

Vypočítejte:

- rychlost, s jakou vytéká kapaliny ze stříkačky,
- sílu, kterou je třeba působit na píst, aby všechna kapalina vytekla za 5 s.

Řešení:

- a) Předpokládáme, že rychlost roztoku těsně u pístu je totožná s rychlostí pístu vytlačujícího roztok. Určíme ji z času t a délky stříkačky. Z rovnice kontinuity stanovíme rychlost, kterou roztok proudí v zúžené části stříkačky a zároveň vytéká ven. Platí vztahy

$$v_1 S_1 = v_2 S_2$$

$$v_2 = \frac{S_1}{S_2} \frac{l}{t} = \frac{1,1 \cdot 10^{-4}}{1,1 \cdot 10^{-6}} \cdot \frac{6 \cdot 10^{-2}}{5} = 1,2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

- b) Sílu, která působí na píst, vypočteme z Bernoulliovy rovnice $p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = \frac{1}{2} \rho v_2^2$, protože potenciální energie zůstává v obou částech stříkačky stejná. Pro velikost síly $F = p_1 S_1$ můžeme psát

$$F = \frac{\rho S_1 l^2}{2t^2} \left[\left(\frac{S_1}{S_2} \right)^2 - 1 \right] = \frac{1,41 \cdot 10^3 \cdot 1,1 \cdot 10^{-4} \cdot (6 \cdot 10^{-2})^2}{2 \cdot 5^2} \cdot \left(\left(\frac{1,1 \cdot 10^{-4}}{1,1 \cdot 10^{-6}} \right)^2 - 1 \right) = 0,112 \text{ N}$$

Příklad 6.2

Voda teče laminárně vodorovnou trubkou průřezu $S_1 = 1,1 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$, který se zúží na dvě třetiny původního. Rozdíl tlaku mezi širokou a úzkou částí trubice je 4000 Pa.

Vypočítejte:

objemový tok vody, který je definován $R = vS$.

Řešení:

Z Bernoulliovy rovnice vyplývá $p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2$, protože potenciální energie zůstává v obou částech trubky stejná. Potrubí se zužuje, musí platit, že v_2 je větší než v_1 , a proto p_1 musí být větší než p_2 . Objemový tok je v důsledku platnosti rovnice kontinuity stejně velký v široké i úzké části.

$R = v_1 S_1 = v_2 S_2$. Pro rychlosti můžeme s využitím vztahu $S_2 = \frac{2}{3} S_1$ psát

$$v_1 = \frac{R}{S_1}, \quad v_2 = \frac{R}{S_2} = \frac{3R}{2S_1}.$$

Po dosazení do Bernoulliovy rovnice a vyjádření $\Delta p = p_1 - p_2$ dostaneme vztah

$$\Delta p = \frac{1}{2} \rho \left(\frac{9R^2}{4S_1^2} - \frac{R^2}{S_1^2} \right) = \frac{5\rho R^2}{8S_1^2} \text{ a odtud}$$

$$R = S_1 \sqrt{\frac{8\Delta p}{5\rho}} = 1,1 \cdot 10^{-3} \sqrt{\frac{8 \cdot 4 \cdot 10^3}{5 \cdot 10^3}} = 2,78 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$$

Příklad 6.3

Potrubí o vnitřním průměru 2,5 cm čerpá vodu do přízemí domu rychlostí $0,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ pod tlakem $1,5 \cdot 10^5 \text{ Pa}$. Potrubí v 2. patře ve výšce 9 m má průměr 1,25 cm.

Vypočítejte:

- rychlost proudu vody ve 2. patře,
- tlak vody ve 2. patře.

Řešení:

- a) Z rovnice kontinuity stanovíme rychlost v_2 v 2. patře pomocí známé rychlosti v_1 v přízemí a známých průřezů S_1, S_2 .

$$v_1 S_1 = v_2 S_2,$$

$$v_2 = v_1 \frac{d_1^2}{d_2^2} = 0,8 \cdot \frac{2,5^2}{1,25^2} = 3,2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

- b) Z Bernoulliovy rovnice vyplývá, že

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho gh.$$

Rovnici můžeme využít pro stanovení tlaku p_2 . Platí relace

$$\begin{aligned} p_2 &= p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 \left(1 - \frac{d_1^4}{d_2^4} \right) - \rho gh = 1,5 \cdot 10^5 + \frac{1}{2} 10^3 \cdot 0,8^2 \cdot \left(1 - \frac{2,5^4}{1,25^4} \right) - 10^3 \cdot 9,81 \cdot 9 = \\ &= 1,5 \cdot 10^5 - 5,12 \cdot 10^3 - 88,29 \cdot 10^3 = (1,5 - 0,0512 - 0,8829) \cdot 10^5 = 0,57 \cdot 10^5 \text{ Pa} \end{aligned}$$

7. Termodynamika

V předchozích kapitolách jsme se zabývali mechanikou založenou na platnosti Newtonových zákonů a naznačili jsme řešení problémů týkajících se pohybu hmotného bodu, tuhého tělesa a kontinua. V této kapitole se budeme věnovat termodynamice, která úzce souvisí s pochopením pojmů jako je teplo a teplota, kterými jsme se doposud nezabývali.

Termodynamika se zabývá procesy, které probíhají v makroskopických soustavách. Je jí možno definovat jako nauku o obecných zákonitostech, jimiž se řídí transformace celkové energie makroskopických systémů v různé její formy. Pro tyto přeměny energie formuluje fyzikální zákony. Jak napovídá jméno termodynamiky, jde zejména o děje spojené s jevy jako je přenos tepla, závislost veličin na teplotě apod. Celá oblast termodynamiky je však podstatně širší, zahrnuje např. i fázové přechody, chemické rovnováhy aj. V termodynamice se obvykle nezabýváme pohybem soustavy jako celku. Naopak předpokládáme, že soustava je jako celek v klidu. V takovém případě je energie soustavy rovna součtu celkové kinetické energie tepelného pohybu jednotlivých částic (atomů, molekul) a celkové potenciální energii částic, která vyplývá z jejich vzájemného silového působení. Tato celková energie soustavy se nazývá **vnitřní energie**. Značí se obvykle U .

Ohříváme-li látku, mění se její makroskopické vlastnosti. Charakter změn, ke kterým dochází, závisí především na množství dodaného tepla, na složení látky a jejím okolí. Termodynamika se obecně zabývá tepelnými procesy v látkách všech typů, tj. pevných, kapalných a plyných. V následující kapitole se zaměříme především na procesy probíhající v plynech, kde vazby mezi jednotlivými molekulami nebo atomy jsou natolik slabé, že je můžeme zanedbat, což značně usnadní naše úvahy. Pro zjednodušení studia termodynamického chování plynů budeme pracovat s modelovou představou ideálního plynu. Fyzikální podstatu této představy objasníme v některé z dalších odstavců.

7.1 Stav systému, stavové veličiny

Zkoumáme-li určitou fyzikální soustavu (např. soustavu hmotných bodů nebo tuhé těleso), je tato soustava dokonale popsána, známe-li všechny vnější podmínky, ve kterých se soustava nachází, a všechny její vlastnosti. Vnější podmínky obvykle označujeme jako **vnější parametry a vlastnosti soustavy jako vnitřní parametry**. Souhrn vnějších podmínek a vnitřních vlastností definuje **fyzikální stav systému**. Vlastnostem systému a vnějším podmínkám můžeme přiřadit měřitelné veličiny, které nazýváme **stavové proměnné (parametry)**. Stav systému je znám, známe-li hodnoty stavových parametrů.

Každý systém, který se nachází v neměnných podmínkách, dospěje po jisté době, nazvané **relaxační**, do stavu **termodynamické rovnováhy** (rovnovážného stavu). Děje, které vedou systém do stavu rovnováhy, se nazývají **relaxační procesy**. Ve stavu termodynamické rovnováhy je systém popsán časově neproměnnými hodnotami stavových parametrů při zachování vnějších podmínek (neexistují žádné toky). Po vzniku termodynamické rovnováhy je jakákoli další změna makroskopického stavu možná pouze následkem nového vnějšího zásahu. Od rovnovážného stavu odlišujeme **stacionární stav**, při němž se makroskopické parametry rovněž s časem nemění, ale kde mohou existovat toky.

Procesy probíhající v soustavách popisujeme pomocí změn stavových parametrů. Procesy dělíme na **rovnovážné** (kvazistatické) a **nerovnovážné**. Na rovnovážný proces můžeme nahlížet jako na řadu nekonečně blízkých rovnovážných stavů. Jestliže proces prochází stavy termodynamické rovnováhy, je **vratný** (reversibilní), to znamená, že může probíhat i opačným směrem. Proces, který nemůže probíhat opačným směrem, je **nevratný** (ireversibilní). Všechny samovolné procesy probíhající v přírodě jsou nevratné. Vratný proces je pouze modelovou představou, kterou používáme jako zjednodušující přístup k řešení reálných problémů.

7.2 Teplota

Při popisu termodynamických soustav velmi často (pokud se nemění počet částic v systému apod.) vystačíme se třemi stavovými parametry: **tlakem p** , **objemem V** a **teplotou T** . Teplota vyjadřuje určitou kvalitativní vlastnost fyzikálních systémů. Při měření teploty využíváme několika fyzikálních principů s obecnou platností.

Uvedeme-li do kontaktu dvě tělesa s různou teplotou, po nějaké době se jejich teplota vyrovná. Říkáme, že soustavy jsou v **termodynamické rovnováze**. K měření teploty prvního tělesa můžeme tedy za určitých podmínek využít druhé těleso.

Jsou-li dvě soustavy (označme je 1, 2) izolované a soustava 1 je v termodynamické rovnováze s další soustavou označenou jako 3, a tato soustava je zároveň v termodynamické rovnováze se soustavou 2, pak i soustavy 1, 2 jsou v termodynamické rovnováze. Tento princip někdy označujeme jako **nultý termodynamický zákon**. Z praktického hlediska nultý princip otvírá možnost měření teploty různých těles jedním standardem.

Dále platí, že ve stavu termodynamické rovnováhy je teplota jednoznačnou funkcí jiných stavových parametrů, a můžeme ji proto měřit nepřímou, pomocí změny jiné stavové veličiny. Obvykle můžeme psát, že teplota T

$$T = T(p, V) . \quad (7.1)$$

Je-li tlak (objem) konstantní, můžeme tuto funkční závislost převést na funkci jedné proměnné

$$T = T(V), \text{ eventuálně } T = T(p) .$$

Prakticky lze snáze měřit proměnný tlak plynu při konstantním objemu než proměnný objem při konstantním tlaku, proto se tzv. plynová stupnice realizuje pomocí rozpínavosti (změny tlaku s teplotou) plynu.

$$p = p_0(1 + \gamma t) , \quad (7.2)$$

kde p_0 je tlak plynu při 0°C a γ je empiricky stanovená konstanta zhruba stejná pro všechny reálné plyny, $\gamma = \frac{1}{273,15}^\circ\text{C}^{-1}$ pro ideální plyn, a t je teplota v Celsiových stupních. Celsiova teplotní stupnice je zavedena pomocí dvou teplotních bodů, tání ledu a varu vody při normál-

ních podmínkách, tj. tlaku $1,01325 \cdot 10^5$ Pa. Jeden Celsiův stupeň je roven 1/100 rozdílu mezi zmíněnými body.

Kelvin zavedl **absolutní teplotní stupnici** (značíme T). Jestliže ve vztahu (7.2) označíme $\frac{1}{\gamma} = T_0$, pak

$$T = T_0 + t . \quad (7.3)$$

Jednotkou absolutní teploty je 1 K (kelvin), velikost stupně je stejná jako v Celsiově stupnici. Výraz (7.2) můžeme pomocí vztahu (7.3) přepsat do tvaru

$$p = \frac{p_0(T_0 + t)}{T_0} = \frac{p_0 T}{T_0} . \quad (7.4)$$

V současné době je teplotní stupnice definována pomocí jediného bodu, **trojného bodu vody**. Tato stupnice se nazývá **termodynamická** a spolu s definicí teploty pomocí tepla (z výrazu pro účinnost vratného Carnotova cyklu), která již není závislá na vlastnostech látek, vytváří **termodynamickou teplotu**. Stupeň termodynamické stupnice je definován jako 1/273,16-tá část termodynamické teploty trojného bodu vody. Značí se K.

Praktické měření teploty je založeno na mnoha různých fyzikálních principech a záleží především na tom, jaký obor teplot chceme měřit a jaké požadavky vzhledem k měření si stanovíme. Jedno z nejznámějších měření je pomocí rtuťového teploměru, kde sledujeme změnu velikosti objemu rtuti v závislosti na teplotě.

7.3 Ideální plyn

Ideální plyn charakterizují následující vlastnosti: molekuly mají rozměry zanedbatelně malé vůči vzdálenostem mezi molekulami, molekuly na sebe, kromě krátkých okamžiků vzájemných srážek, silově nepůsobí, srážky molekul jsou dokonale pružné. Skutečné plyny při obvyklých teplotách a tlacích tyto požadavky s dostatečnou přesností splňují. Pro ideální plyn lze velmi jednoduše formulovat některé zákony a popsat jejich chování.

Teplotní roztažnost ideálního plynu při konstantním tlaku byla experimentálně zjištěna Gay-Lussacem

$$\frac{V}{V_0} = \frac{T}{T_0} . \quad (7.5)$$

V_0 je objem při termodynamické teplotě T_0 zavedené v předchozím odstavci. Rovnice (7.5) s použitím Celsiovy teploty t zní

$$V = V_0(1 + \gamma t) , \quad (7.6)$$

kde V_0 je objem při teplotě $t = 0^\circ\text{C}$, γ je **teplotní součinitel objemové roztažnosti**. Má stejnou hodnotu jako součinitel ve vztahu (7.2).

Obdobný vztah pro teplotní rozpínavost ideálního plynu jsme již uvedli v předchozím odstavci jako vztah (7.2).

Pro ideální plyny platí také Boyleův–Mariottův zákon. Tlak p daného množství ideálního plynu je při stálé teplotě nepřímo úměrný jeho objemu V , což lze vyjádřit vztahem

$$pV = \text{konst} \quad (7.7)$$

při konstantní teplotě T .

7.4 Stavová rovnice, látkové množství

Spojením rovnic pro teplotní roztažnost a rozpínavost dostaneme **stavovou rovnici pro ideální plyn**.

$$\frac{pV}{T} = \frac{p_0V_0}{T_0} = \text{konst} . \quad (7.8)$$

Jestliže řešíme problémy týkající se plynů, je výhodnější z praktických důvodů pracovat nikoliv s množstvím hmotnosti, ale s množstvím, které obsahuje přesně definované množství molekul. Zavádí se proto **látkové množství**, jehož jednotkou je 1 kmol, eventuálně 1 mol. Množství 1 mol látky obsahuje právě tolik molekul, kolik je atomů v 0,012 kg uhlíku ^{12}C . Počet molekul (event. atomů) v 1 molu udává Avogadrova konstanta $N_A = 6,022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$. **Látkové množství n** soustavy tvořené N molekulami (event. atomy) je určeno vztahem

$$n = \frac{N}{N_A} . \quad (7.9)$$

Molární objem V_m je

$$V_m = \frac{V}{n} , \quad (7.10)$$

kde V je objem uvažované soustavy, $[V_m] = \text{m}^3 \cdot \text{mol}^{-1}$. Molární objem V_m je za normálního tlaku a teploty pro všechny plyny stejný $V_{m0} = 0,022414 \text{ m}^3 \cdot \text{mol}^{-1}$.

Molární hmotnost M_m

$$M_m = \frac{m}{n} , \quad (7.11)$$

kde m je hmotnost soustavy, $[M_m] = \text{kg} \cdot \text{mol}^{-1}$. Molární hmotnost souvisí jednoduše s **relativní molekulovou hmotností** (event. atomovou hmotností). **Relativní atomová hmotnost** A_r je definována

$$A_r = \frac{m_a}{m_u}, \quad (7.12)$$

kde m_a označuje klidovou hmotnost atomu a m_u je **atomová hmotnostní konstanta**, která je zavedena jako 1/12 klidové hmotnosti atomu uhlíku ^{12}C . Platí přibližně

$$m_u = 1,6606 \cdot 10^{-27} \text{ kg} . \quad (7.13)$$

Podobně jako relativní atomovou hmotnost můžeme definovat i relativní molekulovou hmotnost M_r vztahem

$$M_r = \frac{m_m}{m_u}, \quad (7.14)$$

kde m_m je klidová hmotnost molekuly.

Kromě **molárních veličin** (hmotnosti, objemu a dalších termodynamických veličin) je vhodné v některých případech zavést **měrné veličiny**, vztahené k jednotce hmotnosti.

S použitím vztahu (7.10) pro molární objem a známých hodnot pro p_0 , T_0 a V_{m0} můžeme stavovou rovnici (7.8) upravit do tvaru

$$pV = nR_m T, \quad (7.15)$$

kde $R_m = 8,314 \text{ J} \cdot \text{K} \cdot \text{mol}^{-1}$ je **molární plynová konstanta** a n je počet molů v soustavě. Dělíme-li obě strany rovnice (7.15) látkovým množstvím plynu n , dostaneme stavovou rovnici pro 1 mol ideálního plynu

$$pV_m = R_m T .$$

Stavová rovnice vyplývá z experimentálně získaných zákonitostí pro ideální plyny, ale lze ji odvodit i na základě jednoduchých předpokladů o chování ideálních plynů.

7.5 Kinetická teorie plynů

Shrneme-li poznatky o chování, složení a zákonitostech látek vyskytujících se v plynném skupenství, můžeme vyslovit následující předpoklady o ideálních plynech:

- plyny sestávají z molekul, které se vzájemně pružně srážejí,
- molekuly plynu jsou od sebe ve vzdálenostech mnohonásobně větších než jsou jejich rozměry a nepůsobí na sebe silami s výjimkou okamžiku srážek,

- jestliže nepůsobí žádná vnější síla, není preferovaný žádný směr pohybu molekul ani vektoru jejich rychlosti.

Rozměry reálných molekul jsou cca $2 \cdot 10^{-10}$ m, a proto vzhledem k jejich vzájemným vzdálenostem je můžeme zanedbat a považovat je za hmotné body. Vzájemné přitažlivé síly mezi molekulami jsou poměrně slabé a rychle klesají se vzdáleností. Můžeme tedy tvrdit, že molekuly mají pouze kinetickou energii a pohybují se prakticky nezávisle. Při svém pohybu molekuly absolvují vzájemné srážky, při kterých mění pouze směr a velikost rychlosti. Tento pohyb nazýváme **tepelný pohyb** molekul. Srážky vedou k tomu, že v plynu se vyskytují molekuly s většími i menšími rychlostmi. Můžeme hovořit o **rozdělení molekul podle rychlosti**. Budeme předpokládat, že srážky probíhají naprosto náhodně, a proto pohyb molekul ve všech směrech je stejně pravděpodobný.

Tlak plynu vysvětluje kinetická teorie pomocí nárazů molekul na stěny nádoby, v níž je plyn uzavřen. Vzájemné srážky molekul můžeme zanedbat, protože v případě pružné srážky se celková hybnost soustavy zachovává a vzhledem k soustavě nedojde k žádné změně.

Předpokládejme nádobu a v ní soubor N molekul jednoatomového plynu, který zaujímá objem V . Molekuly mají stejnou hmotnost m , a pohybují se různými rychlostmi. Ve shodě s 1. Newtonovým zákonem se molekula (protože nepůsobí žádná vnější síla) bude mezi srážkami pohybovat rovnoměrně přímočaře. Uvažujme stěnu nádoby kolmou na osu x , x -ovou složku hybnosti molekuly označme mv_x . Jestliže molekula narazí na stěnu, změní se její hybnost na $(-mv_x)$. Celková změna její hybnosti je rovna $2mv_x$. Abychom určili celkovou změnu hybnosti všech molekul za časový interval Δt , musíme ještě stanovit počet molekul, které absolvují za čas Δt srážku se stěnou. Za čas Δt dopadne na stěnu plochy S celkem $\frac{N_i}{V} Sv_{xi}\Delta t$ molekul. Součin $Sv_{xi}\Delta t$ představuje objem, který molekuly zaplní za čas Δt a N_i je počet molekul s x -ovou složkou rychlosti. Celková změna hybnosti molekul, které dopadnou za časový interval Δt na stěnu je

$$\frac{N_i}{V} Sv_{xi}\Delta t \cdot (2mv_{xi}) = 2 \frac{N_i}{V} Smv_{xi}^2\Delta t .$$

Změna hybnosti soustavy je rovna impulsu síly, kterou molekuly působí na stěnu nádoby. Z této síly je možné jednoduše určit tlak molekul na stěnu, jestliže si uvědomíme vztah mezi silou a tlakem

$$p_i = \frac{2N_i}{V} S \frac{mv_{xi}^2\Delta t}{\Delta t S} = 2N_i \frac{mv_{xi}^2}{V} .$$

Celkový tlak od všech molekul v nádobě získáme sumací přes všechny x -ové složky rychlosti v předchozím vztahu. Protože žádný směr pohybu ani rychlosti není preferován, pohybuje se v průměru polovina molekul doprava (kladný směr osy x) a polovina doleva (záporný směr). Obecný tvar vztahu pro celkový tlak p proto je

$$p = \sum_i p_i = \frac{1}{2} \sum_i 2N_i \frac{mv_{xi}^2}{V} = \frac{m}{V} \sum_i N_i v_{xi}^2 . \quad (7.16)$$

Tuto relaci můžeme přepsat do jednoduššího tvaru, jestliže zavedeme střední hodnotu z jednotlivých hodnot v_{xi}^2 . Definujeme ji vztahem

$$\overline{v_x^2} = \frac{1}{N} \sum_i N_i v_{xi}^2 \quad (7.17)$$

$\sqrt{\overline{v_x^2}}$ nazýváme **střední kvadratická rychlost** (přesněji x -ová složka střední kvadratické rychlosti). $N = \sum N_i$ je celkový počet molekul. Pro tlak lze s použitím vztahu (7.16) psát

$$p = \frac{Nm}{V} \overline{v_x^2} \quad \text{nebo} \quad pV = 2N \left(\frac{1}{2} m \overline{v_x^2} \right). \quad (7.18)$$

Pro ideální plyn platí stavová rovnice $pV = nR_m T = \frac{N}{N_A} R_m T = NkT$ a po dosazení za p ze vztahu (7.17)

$$\frac{1}{2} m \overline{v_x^2} = \frac{1}{2} kT \quad (7.19)$$

kde T je termodynamická teplota a k je Boltzmannova konstanta.

$$k = \frac{R_m}{N_A} = 1,380\,66 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} .$$

Střední kinetická energie odpovídající translačnímu pohybu molekul ve směru osy x je $\frac{1}{2} kT$.

Ekvivalentní vztah můžeme napsat pro pohyb ve směru osy y i osy z . Sečtením těchto tří výrazů obdržíme relaci pro celkovou střední energii soustavy

$$\frac{1}{2} m \overline{v^2} = \frac{3}{2} kT . \quad (7.20)$$

Ze vztahu (7.19) vyplývá, že teplota souvisí se střední kinetickou energií molekul. Čím vyšší je teplota, tím intenzivnější je tepelný pohyb molekul plynu. Vztah (7.19) mezi energií soustavy a teplotou označujeme jako **zákon rovnoměrného rozdělení energie**, tzv. **ekvipartiční teorém**.

Jednoatomové molekuly ideálního plynu, pro které jsme odvodili vztah (7.19), a které můžeme považovat za hmotné body, mají tři stupně volnosti. Každému stupni volnosti odpovídá na pravé straně rovnice, ve výrazu $\frac{3}{2} kT$, právě $\frac{1}{2} kT$. Je-li molekula dvouatomová, musíme ke stupňům volnosti odpovídajících translačnímu pohybu připočítat ještě další stupně volnosti pro rotační pohyb. Dvouatomová molekula má celkem pět stupňů volnosti, a proto rovnice (7.19)

bude mít na pravé straně součinitel $\frac{5}{2}$. Přehledně můžeme vztahy pro dvou a víceatomové molekuly, které mají šest stupňů volnosti, zapsat

$$\begin{aligned} \text{dvouatomové} & \quad W_k = \frac{5}{2} kT \\ \text{tří a víceatomové nelineární} & \quad W_k = 3kT \\ \text{tří a víceatomové lineární} & \quad W_k = \frac{5}{2} kT . \end{aligned}$$

Vztahy (7.19) a (7.20) můžeme shrnout slovy: **V rovnovážném stavu připadá na každý stupeň volnosti soustavy hodnota energie jedna polovina kT .** Ukazuje se, že vztahy (7.20) a z nich vyplývající závěry neplatí zcela přesně, protože chování molekul již nejde přesně popsat pomocí zákonů klasické fyziky.

Předchozí rovnice umožňují jednoznačně stanovit **vnitřní energii soustavy U .** Vnitřní energie byla zavedena jako součet kinetických energií všech molekul, jestliže silové působení mezi molekulami je zanedbatelné. Pro ideální plyn je potenciální energie nulová. Pro celkovou kinetickou energii lze formulovat obecný vztah zahrnující kromě teploty parametry soustavy

$$U = Ns \frac{1}{2} kT , \quad (7.21)$$

kde N je celkový počet molekul soustavy a s je počet stupňů volnosti jedné molekuly. Vztah (7.21) můžeme přepsat do tvaru

$$U = \frac{s}{2} n R_m T , \quad (7.22)$$

kde n je počet molů plynu.

Vnitřní energie je pro ideální plyn pouze funkcí teploty. Pro reálné plyny, kde nelze zanedbat interakční energii mezi molekulami, bude vnitřní energie záviset také na objemu soustavy, protože interakční síly jsou funkcí vzdáleností mezi molekulami.

7.6 Rozdělení rychlostí molekul

Střední kvadratickou rychlost tepelného pohybu molekul, kterou jsme formálně zavedli vztahem (7.17) v předchozím odstavci, můžeme jednoduše uvést do souvislosti s chováním molekul a přiřadit jí tak fyzikální význam. V experimentech s plyny pozorujeme, že existují molekuly, které mají větší rychlost, a jiné menší rychlost než je hodnota střední kvadratické rychlosti. Můžeme hovořit o **rozdělení rychlostí molekul** charakteristickém pro danou teplotu. Abychom jej mohli popsat, zavádíme **rozdělovací funkci $f(v)$.** Je definována tak, že počet dN molekul, které mají rychlost v a $v+dv$ je pomocí rozdělovací funkce možno vyjádřit

$$dN = f(v) dv . \quad (7.23)$$

Vzhledem k tomu, že počet molekul N , s kterým obvykle pracujeme, je velký, jsme oprávněni použít limitní přiblížení $dv \rightarrow 0$ a rovnice (7.23) je rovnicí pro diferenciální přírůstky. Celkový počet molekul N vyjádříme pomocí rozdělovací funkce

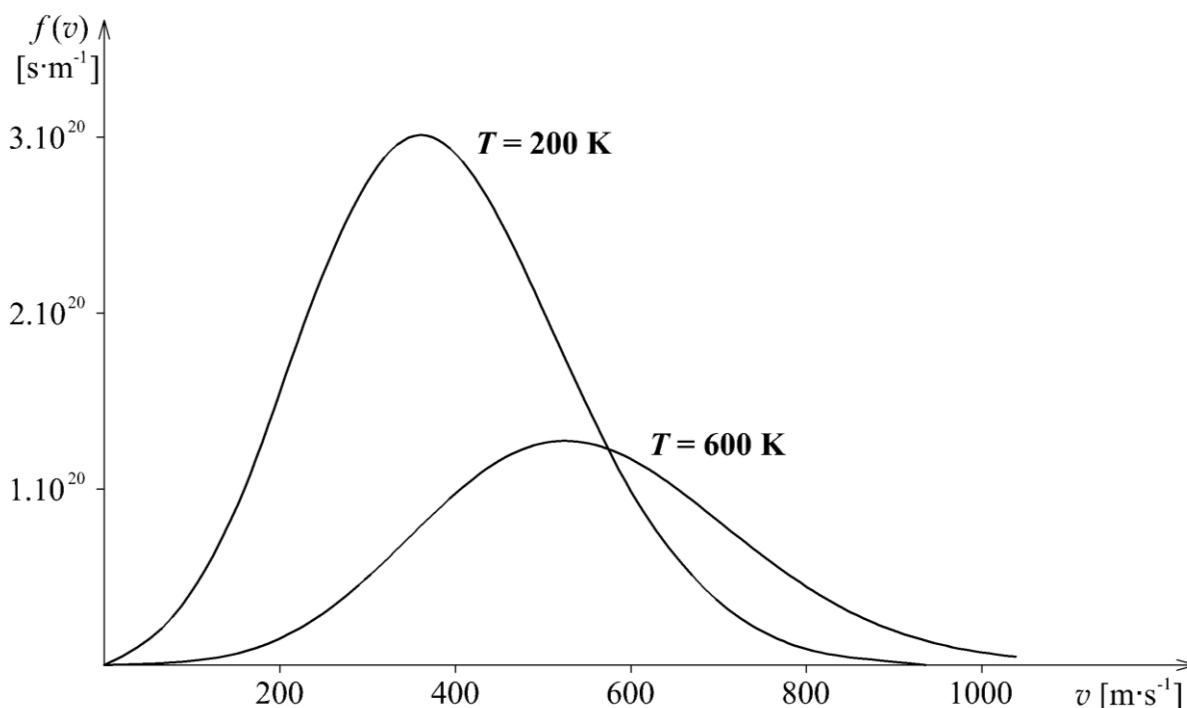
$$N = \int_0^{\infty} f(v) dv . \quad (7.24)$$

Rozdělení rychlostí pro Ar ($N = 10^{23}$ molekul) a pro dvě různé teploty, 200 K a 600 K je na obr. 7.1. Rozdělovací funkci pro rozdělení rychlostí molekul určil C. Maxwell, který při odvození uplatnil statistické zákonitosti náhodného pohybu molekul. Rozdělovací funkce má tvar

$$f(v) = Av^2 \exp\left(-\frac{\frac{1}{2}mv^2}{kT}\right) . \quad (7.25)$$

Koeficient A nezávislý na rychlosti je

$$A = \frac{4N}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m}{2kT}\right)^{\frac{3}{2}} .$$



Obr. 7.1

Hodnoty rozdělovací funkce na obr. 7.1 určují počet molekul pro jednotlivé hodnoty rychlostí. Čím je teplota plynu vyšší, tím se rozdělení posouvá k větším hodnotám rychlostí, ale zároveň je plošší. Plocha pod křivkou je rovna celkovému počtu molekul N . Pro hodnotu střední

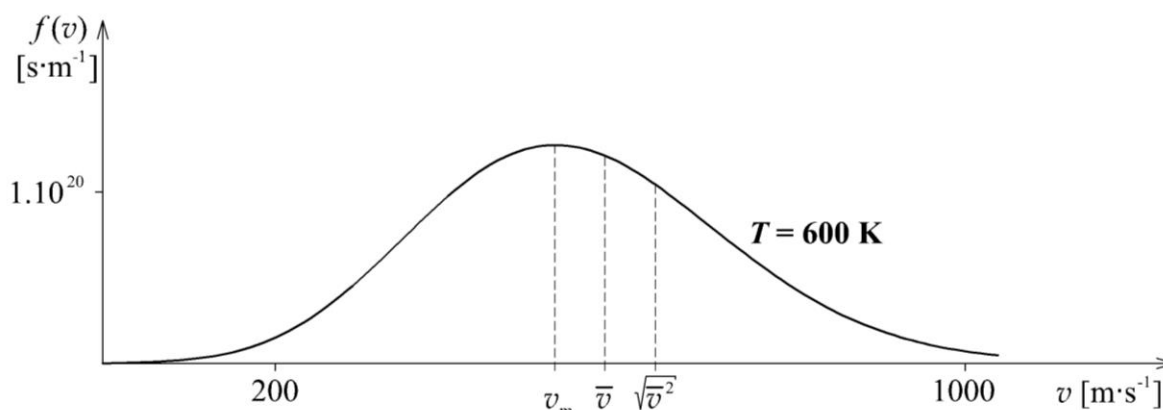
kvadratické rychlosti $\overline{v^2}$ lze pomocí matematického vyjádření Maxwellova rozdělení rychlostí odvodit vztah

$$\sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}. \quad (7.26)$$

Pohyb molekul se obvykle charakterizuje ještě dvěma dalšími rychlostmi. Je to **střední rychlost** \bar{v} zavedená jako aritmetický průměr ze všech velikostí rychlostí molekul

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}. \quad (7.27)$$

Hodnota střední rychlosti je menší než hodnota střední kvadratické rychlosti. Další charakteristickou rychlostí je **nejpravděpodobnější rychlost**, značíme v_m . Odpovídá maximu rozdělovací funkce. Pro tyto tři hodnoty rychlostí platí, že $v_m \leq \bar{v} \leq \sqrt{\overline{v^2}}$. Hodnoty těchto rychlostí jsou vyznačeny na obr. 7.2. Graf rozdělovací funkce odpovídá rozdělení znázorněnému plnou čarou na obr. 7.1, který znázorňuje rozdělení rychlostí molekul Ar při teplotě 600 K.



Obr. 7.2

7.7 Van der Waalsova rovnice

Stavová rovnice ve tvaru $pV_m = R_m T$ platí pro látkové množství 1 molu ideálního plynu. Chování reálných plynů se obvykle popisuje modifikovanou stavovou rovnicí, která se nazývá Van der Waalsova rovnice a má pro 1 mol plynu tvar

$$\left(p + \frac{a}{V_m^2}\right)(V_m - b) = R_m T \quad (7.28)$$

kde a , b jsou kladné konstanty obecně různé pro různé druhy plynů. Van der Waalsova rovnice, jak je na první pohled vidět, se od stavové rovnice pro ideální plyn liší dvěma korekčními

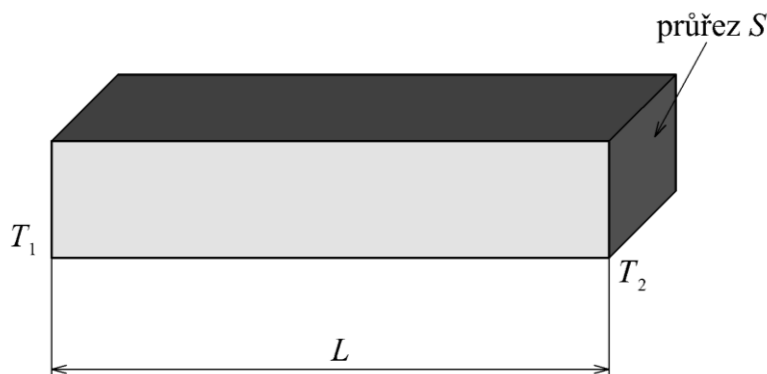
členy. První člen $\frac{a}{V_m^2}$ představuje korekci na kohezní tlak v plynu, který vzniká jako důsledek přitažlivých (kohezních) sil mezi molekulami skutečného plynu. Kohezní tlak zvyšuje tlak uvnitř plynu, takže je větší než tlak na stěnu. Druhá korekce vyjádřená členem b zohledňuje konečný objem molekul. Při svém pohybu nemohou molekuly využívat celý objem V , který mají k dispozici, protože část objemu je vždy zaplněna molekulami. Je-li plyn dostatečně řídký, jsou korekce zanedbatelné, a rovnice (7.28) přechází ve stavovou rovnici ideálního plynu. Van der Waalsova rovnice není jedinou modifikací stavové rovnice, která se používá pro skutečný plyn. Kromě dalších dvouparametrických rovnic (dvě materiálové konstanty), například rovnice Redlichova – Kwongova, se používají i stavové rovnice víceparametrické.

7.8 Tepelné procesy, přenos tepla

Jestliže chceme zvýšit teplotu vody v nádobě, vyjádříme tuto skutečnost jednoduše jako ohřátí vody. Zvýšení teploty můžeme uskutečnit například vložením horkého tělesa do vody. Jedná se o proces, při kterém dojde k přenosu energie, a tento proces probíhá mezi teplejším a chladnějším tělesem (soustavou), dokud se teploty nevyrovnají. Popsanou skutečnost můžeme formulovat obecně: Jakmile se dostanou dvě tělesa do tepelného kontaktu, bude probíhat přenos tepla dokud mezi tělesy nevznikne stav termodynamické rovnováhy. Tepelné energii budeme zkráceně říkat **teplo**, budeme jej označovat symbolem Q . Znaménkem (+,–) budeme rozlišovat, zda se jedná o teplo dodané soustavě (tělesu), nebo o odebrané teplo. Teplo jako fyzikální veličina je energie a její jednotka je 1 J (joule).

Tepelná energie je předávána z jednoho místa na druhé prostřednictvím tří procesů: **kondukce (vedení), konvekce (proudění), radiace (vyzařování)**.

Kondukce tepla. V případě kondukce se energie přenáší interakcemi molekul bez jakéhokoliv pohybu látky jako celku. Uplatňuje se především při šíření tepla v pevných látkách. Předpokládejme například tyč, jejíž jeden konec je zahříván. Jde-li o kov, pak volné elektrony, které se pohybují kovem, dostávají a předávají tepelnou energii při srážkách s atomy mřížky.



Obr. 7.3

Mějme tyč z pevné látky délky L ve směru osy x (obr. 7.3). Tyč má průřez S , jeden její konec je udržován na teplotě T_2 , která je vyšší než teplota druhého konce T_1 . Experimentálně bylo zjištěno, že mezi spádem teploty, průřezem tyče a přenosem tepla uskutečněným za malý časový interval je přímá úměrnost. Relaci lze zapsat ve tvaru

$$\frac{dQ}{dt} = -\lambda S \frac{dT}{dx}, \quad (7.29)$$

kde λ je **koeficient tepelné vodivosti**, látková konstanta charakteristická pro uvažovaný materiál. Znaménko (–) odpovídá skutečnosti, že teplo proudí od teplejšího místa ke studenějšímu. Látky s velkou hodnotou koeficientu λ jsou dobré tepelné vodiče. Vysokou tepelnou vodivost má stříbro a měď. Tepelná vodivost kapalin je malá, nejmenší koeficient tepelné vodivosti ze všech látek pak mají plyny. Proto se s výhodou používá plynů k tepelné izolaci. Nejlepším tepelným izolantem je vakuum (v němž se ovšem zase znatelněji projevuje tepelné záření).

V tabulce 7.1 jsou uvedeny hodnoty koeficientů tepelné vodivosti pro některé materiály:

Tabulka 7.1

materiál	vzduch	Al	Cu	Au	Pt	Ag	ocel	sklo	beton
λ [$\text{W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$]	0,026	237	401	318	353	429	46	0,7–0,9	0,9–1,3

Představme si tyč obklopenou vzduchem. Pláštěm tyče odchází do okolí část tepla. I pro tento případ platí relace (7.29). Důsledkem platnosti relace je, že teplota neklesá rovnoměrně s délkou tyče, ale v okolí teplejšího konce klesá rychleji než v okolí studenějšího.

Konvekce tepla. Při konvekci tepla je přenos tepla zprostředkován makroskopickým pohybem látky. Analýza praktických problémů spojená s konvekci tepla je většinou velmi obtížná. Přenášená energie je obvykle úměrná ploše tělesa, které zprostředkovává přenos do okolních těles a rozdílu teplot mezi tělesem a okolím.

Konvekce se uplatňuje především při šíření tepla v kapalinách a plynech. Pozorujeme ji při zahřívání vody v hrnci a využíváme v ústředním topení s oběhem teplé vody.

Radiace. Třetím mechanismem přenosu tepelné energie je radiace ve formě elektromagnetických vln. Pro energii P vyzařovanou z povrchu tělesa ohřátého na teplotu T za jednotku času lze psát relaci

$$P = e\sigma ST^4, \quad (7.30)$$

kde S je plocha, která vyzařuje, e je emisivita, nabývající pro různá tělesa hodnoty mezi 0 a 1, σ je univerzální konstanta. Vztah (7.30) se nazývá **Stefanův – Boltzmannův zákon**. Hodnota $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-4}$. Jestliže záření emitované nějakým tělesem dopadá na jiné těleso, část záření (energie) je odraženo, část absorbováno. Světlá tělesa větší část energie odrážejí, zatímco tmavá většinu energie pohlcují. Pro absorpci energie můžeme psát analogický vztah k vztahu (7.30).

$$P = a\sigma ST^4, \quad (7.31)$$

kde a je koeficient absorpce. Pro přenos tepla vyzařováním z tělesa o teplotě T do okolí, jehož teplota je T_0 , můžeme psát ve tvaru

$$P = e\sigma S(T^4 - T_0^4). \quad (7.32)$$

Při běžných teplotách (pod 600 °C) není tepelné záření viditelné. S rostoucí teplotou se značně zvyšuje množství emitované energie a roste podíl viditelné složky záření. Obvykle lze přenos tepla popsat jedním mechanismem jako převládajícím, ale nejsou výjimkou ani případy, kdy musíme k popisu použít dva procesy.

7.9 Teplo, práce, tepelná kapacita. První zákon termodynamiky

Experimentálně bylo zjištěno, že přírůstek, nebo úbytek tepla v systému souvisí s vykonáním ekvivalentního množství práce systémem, nebo na systému. Teplo můžeme považovat za jednu z možných forem energie a je možné najít vztah ekvivalence mezi teplem a vykonanou prací. J. P. Joule svými pokusy dospěl k důležitému závěru, že tepelná a mechanická energie se nezachovávají nezávisle na sobě, ale zachovává se součet tepelné a mechanické energie.

Množství tepla potřebné k ohřátí tělesa o 1 K definujeme jako **tepelnou kapacitu** tělesa C . Matematicky lze tuto definici zapsat přesněji pomocí malých změn tepla a teploty

$$C = \frac{dQ}{dT} . \quad (7.33)$$

Jednotka tepelné kapacity je $J \cdot K^{-1}$. Tepelná kapacita tělesa je přímo úměrná jeho hmotnosti m . Výhodnější je proto definovat **měrnou tepelnou kapacitu** c , která je pouze vlastností látky

$$c = \frac{C}{m} \quad (7.34)$$

Jednotka měrné tepelné kapacity je $J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}$. Hodnota tepelné kapacity, jak ukážeme v následujícím odstavci, záleží přitom na způsobu, jakým probíhá změna stavu soustavy, jestli se děje při zachování konstantního tlaku, nebo objemu. V prvním případě bude látku charakterizovat tepelná kapacita C_p (při stálém tlaku), v druhém případě C_V (při stálém objemu).

Molární tepelná kapacita C_m (tepelná kapacita 1 molu látky) souvisí s tepelnou kapacitou C vztahem

$$C_m = \frac{C}{n} . \quad (7.35)$$

Jednotka molární tepelné kapacity je $J \cdot mol^{-1} \cdot K^{-1}$. Opět rozlišujeme molární tepelnou kapacitu C_{mp} a C_{mV} . Tabulka 7.2 udává hodnoty měrných a molárních tepelných kapacit některých látek (ne plynů):

Tabulka 7.2

látka	hliník	měď	zlato	olovo	stříbro	zinek	rtuť	etylalkohol
c [$kJ \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}$]	0,900	0,386	0,126	0,128	0,233	0,387	0,140	2,4
C_m [$J \cdot mol^{-1} \cdot K^{-1}$]	24,3	24,5	25,6	26,4	24,9	25,2	28,3	111

Skutečnost, že třetí řádek tabulky přináší téměř shodné hodnoty molárních kapacit pro kovové materiály označujeme jako **Dulongovo – Petitovo pravidlo**. Molární tepelné kapacity pro kovy se pohybují kolem hodnoty $C_m = 24,9 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.

Jestliže studovanou soustavu adiabaticky oddělíme od okolního prostředí, nedochází k přenosu tepla. Práce, která se v takovém případě vykonává na systému, nebo systém ji vykonává, se nemůže projevit přírůstkem ani úbytkem tepla. Experimentálně lze také potvrdit, že její velikost záleží pouze na počátečním a konečném stavu systému, nikoliv na způsobu vykonání práce. Důsledkem vykonané práce může být pouze **změna vnitřní energie** $\Delta U = U_2 - U_1$. Jestliže systém není adiabaticky oddělen od okolí, záleží na cestě mezi počátečním a konečným stavem, protože systém (těleso) se může dostat například do tepelného kontaktu s okolím. Avšak, jak již víme, součet tepla Q a mechanické práce A musí zůstat konstantní. Je zvykem jako kladnou práci $(+)A$ označovat práci vykonanou systémem a $(-)A$ práci vykonanou na systému. Jakýkoliv proces můžeme tedy popsat vztahem

$$Q + (-)A = \Delta U \quad (7.36)$$

Vztah se obvykle přepisuje do tvaru

$$Q = \Delta U + A \quad (7.37)$$

a nazývá se **1. zákon termodynamiky. Teplo dodané soustavě se projeví ve vykonané práci a zvýšení vnitřní energie soustavy**. První zákon termodynamiky můžeme také formulovat jako princip neexistence perpetua mobilního prvního druhu.

Není možné sestavit zařízení, které by trvale nebo periodicky konalo práci, aniž by se mu odjinud dodávala ekvivalentní energie.

Vztah (7.37) můžeme chápat jako vyjádření zákona zachování energie pro termodynamické procesy. Pro platnost tohoto vztahu bychom ještě měli předpokládat neměnný počet částic soustavy. Rovnici (7.37) je vhodné převést do diferenciálního tvaru. Je třeba si uvědomit, že pouze veličina vnitřní energie má úplný diferenciál dU , zatímco přírůstky veličin tepla Q i práce A nelze obecně vyjádřit jako úplné diferenciály, protože jejich velikost obecně závisí na způsobu dosažení změny (Q i A nejsou stavové veličiny, ale veličiny dějové). Budeme sice psát

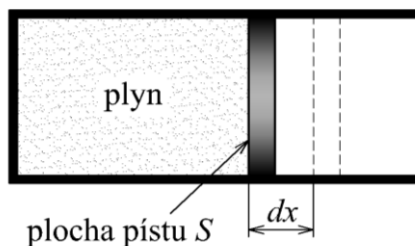
$$dQ = dU + dA \quad (7.38)$$

ale dQ , dA jsou obecně neúplné diferenciály veličin Q a W .

Práce konaná plynem. Předpokládejme válec naplněný plynem. Ve válci můžeme pohybovat pístem tak, že objem plynu se může plynule zmenšovat nebo zvětšovat. Jestliže budeme pístem pohybovat dostatečně pomalu, bude plyn procházet stavy blízkými k termodynamické rovnováze. Takový proces nazýváme **kvazistatický**. Sílu o velikosti F působící na píst plochy S (obr. 7.4) můžeme vyjádřit pomocí tlaku součinem pS . Jestliže se píst pohne ve směru osy x o dx , vykonaná práce plynem je

$$dA = F dx = pS dx = p dV \quad (7.39)$$

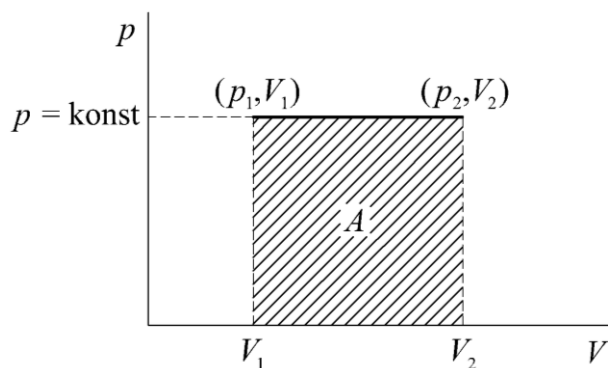
kde dV je zvětšení objemu plynu.



Obr. 7.4

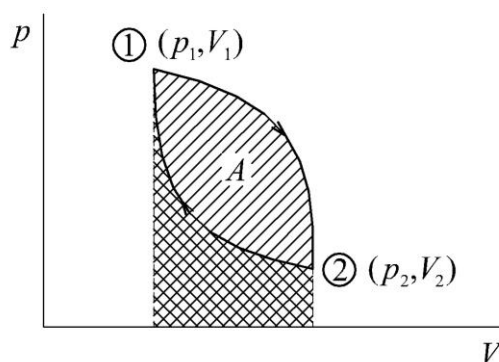
Při stlačení plynu by velikost dV byla záporná. Jestliže budeme uvažovat změnu objemu z V_1 na V_2 , vznikne problém s integrací výrazu (7.39), protože nevíme, jak se měnil během procesu tlak p , tj. není obecně znám průběh funkce $p = p(V, T)$. Závislost tlaku p na objemu V často znázorníme graficky jako **p, V diagram**.

Grafické znázornění této závislosti pro případ, kdy tlak zůstává během procesu konstantní, je na obr. 7.5. Práce vykonaná plynem při konstantní hodnotě tlaku a změně objemu z V_1 na V_2 je plocha pod křivkou od počátečního do konečného stavu systému daného objemem, neboť dA je úplný diferenciál.



Obr. 7.5

V obecném případě, kdy se mění objem i tlak a systém přechází ze stavu 1 do stavu 2, je velikost vykonané práce závislá na cestě z 1 do 2. Z obr. 7.6 vyplývá, že při změně stavu 1 do 2 cestou a nazpět do stavu 1 je vykonaná práce nenulová, i když se vracíme do výchozího stavu.



Obr. 7.6

7.10 Tepelné kapacity ideálního plynu

Jestliže je plyn ohříván při konstantním objemu, žádná práce se nekoná a všechno teplo se mění ve vnitřní energii. Jestliže naopak plyn je ohříván při konstantním tlaku, expanduje a koná práci, takže pouze část dodaného tepla se mění na vnitřní energii a tím dojde ke zvýšení teploty. Dá se proto předpokládat, že tepelná kapacita C_p bude větší než C_v .

Pro první případ, kdy je konstantní objem, se žádná práce při předání tepla dQ systému nekoná, a proto

$$C_v = \frac{(dQ)_v}{dT} = \frac{dU}{dT} . \quad (7.40)$$

Je-li tlak konstantní, potom

$$C_p = \frac{(dQ)_p}{dT} = \frac{dU}{dT} + \frac{(dA)_p}{dT} , \quad (7.41)$$

kde $(dA)_p = p dV$ je práce vykonaná při konstantním tlaku. Pro ideální plyn můžeme stavovou rovnici psát ve tvaru $pV = nR_m T$. Zdiferencováním tohoto výrazu dostaneme

$$p dV + V dp = nR_m dT .$$

Při konstantním tlaku je $dp = 0$ a dosazením do vztahu pro $(dA)_p$ obdržíme $(dA)_p = nR_m dT$. Z relace (7.41) pro C_p vyplyne

$$C_p = C_v + nR_m . \quad (7.42)$$

Tepelná kapacita při konstantním tlaku je větší než tepelná kapacita při konstantním objemu. Pro pevné látky, popřípadě kapaliny, u nichž se tepelná kapacita s teplotou mění jen málo, není třeba obvykle rozlišovat mezi C_p a C_v a používá se pouze jedna hodnota C .

Pro molární tepelné kapacity lze na základě vztahu (7.41) a definičního vztahu psát

$$C_{mp} = C_{mV} + R_m . \quad (7.43)$$

Tento vztah se nazývá **Mayerova rovnice**.

Použijeme-li nyní ekvipartiční teorém, vztah (7.22), je C_{mV}

$$C_{mV} = \frac{s}{2} R_m$$

a s použitím rovnice (7.43)

$$C_{mp} = \frac{(s+2)}{2} R_m . \quad (7.44)$$

V tabulce 7.3 jsou uvedeny molární tepelné kapacity a Poissonovy konstanty některých plynů:

Tabulka 7.3

plyn	H ₂	N ₂	O ₂	Cl ₂	Ar	CO ₂	vzduch
C_{mV} [J·mol ⁻¹ ·K ⁻¹]	20,48	20,76	27,22	21,06	12,68	22,99	20,76
C_{mp} [J·mol ⁻¹ ·K ⁻¹]	28,87	29,08	35,60	29,28	20,89	29,34	29,11
κ	1,410	1,401	1,398	1,350	1,698	1,293	1,402

7.11 Kvazistatické procesy v ideálních plynech

1. zákon termodynamiky, vztah (7.37) nebo (7.38), můžeme s použitím vztahu pro práci vykonanou plynem rozepsat do tvaru

$$Q = U_2 - U_1 + \int_1^2 p dV , \quad (7.45)$$

kde Q je teplo dodané plynu, U_2 , U_1 jsou vnitřní energie na konci a na počátku děje, člen $\int_1^2 p dV$ je práce vykonaná plynem při změně objemu z V_1 na V_2 .

Pro ideální plyn lze změnu vnitřní energie vyjádřit pomocí tepelné kapacity C_v při stálém objemu a změnou teploty, vztahem (7.40)

$$U_2 - U_1 = C_v (T_2 - T_1) , \quad (7.46)$$

kde index 1 odpovídá počátečnímu stavu soustavy a index 2 konečnému. Po dosazení vztahu (7.46) do (7.45) dostaneme pro dodané teplo

$$Q = C_v (T_2 - T_1) + \int_1^2 p dV . \quad (7.47)$$

Analogický vztah lze napsat také pro teplo dodané jednotce látkového množství

$$Q_m = C_{mV} (T_2 - T_1) + \int_1^2 p dV_m . \quad (7.48)$$

Vztahy (7.47) a (7.48) můžeme formulovat i v diferenciálním tvaru, například

$$dQ = C_v dT + p dV . \quad (7.49)$$

Kvazistatické procesy jsou jednoduše řešitelné, můžeme-li některou z veličin p , V , T považovat po dobu procesu za stálou.

Izotermický proces probíhá při konstantní teplotě. Je-li $T = \text{konst}$, vnitřní energie soustavy se nemění a

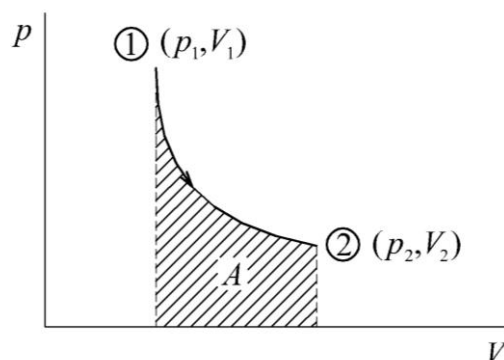
$$Q = A = \int_1^2 p dV . \quad (7.50)$$

Ze stavové rovnice pro ideální plyn vyplývá, že $p_2 = \frac{p_1 V_1}{V_2}$ (**Boyleův – Mariottův zákon**),

kde index 1 označuje počáteční stav soustavy a index 2 konečný stav. Dosadíme-li do pravé strany (7.50) za p opět ze stavové rovnice, je

$$Q = nR_m T \int_1^2 \frac{1}{V} dV = nR_m T \ln \frac{V_2}{V_1} = nR_m T \ln \frac{p_1}{p_2} , \quad (7.51)$$

kde n je látkové množství plynu.



Obr. 7.7

Diagram p, V pro tento proces je na obr. 7.7 a křivka, která jej charakterizuje, má vyjádření $pV = \text{konst}$ a nazývá se **izoterma**. Izotermický děj probíhající ve skutečnosti můžeme interpretovat například tak, že teplo dodané plynu ze zásobníku a spotřebované při expanzi plynu beze změny teploty se přemění na práci vykonanou plynem. O zásobníku musíme předpokládat, že je dostatečně veliký, takže předání tepla plynu se obejde bez snížení teploty v zásobníku.

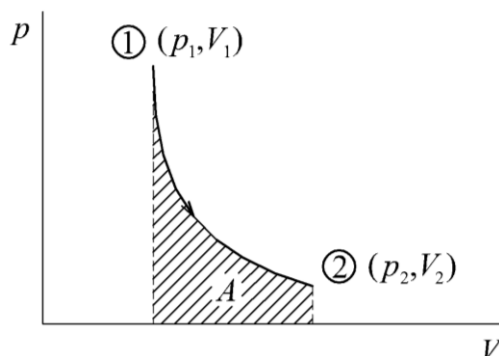
Adiabatický proces. Tento proces si můžeme například představit tak, že plyn expanduje proti pístu a vykonává práci. Válec s plynem je přitom tepelně (adiabaticky) izolován od okolí, takže nepřijímá ani neodevzdává teplo.

$$dQ = 0 .$$

Práce vykonaná plynem se projeví v úbytku vnitřní energie plynu. S použitím rovnice (7.47) dostaneme pro práci

$$A = -(U_2 - U_1) = -C_v (T_2 - T_1) . \quad (7.52)$$

Práce je rovna úbytku vnitřní energie při přechodu soustavy ze stavu 1 do stavu 2. V průběhu adiabatického děje se mění nejen tlak a objem plynu, ale také jeho teplota. Křivka charakterizující tento proces je na obr. 7.8.



Obr. 7.8

Průběh křivky je strmější než je průběh křivky v případě izotermického děje. Průběh křivky, **adiabaty**, se řídí **Poissonovým zákonem** $pV^\kappa = \text{konst}$, kde $\kappa = \frac{C_p}{C_v}$.

Izochorický děj. Probíhá při stálém objemu.

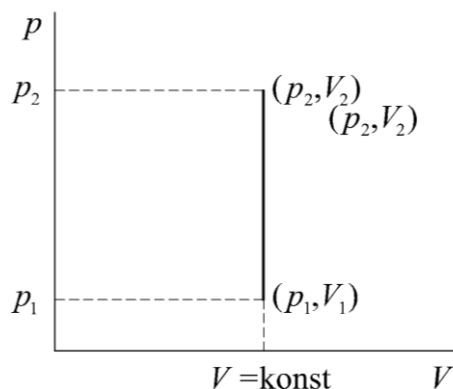
$$V = \text{konst} .$$

Práce vykonaná plynem je proto nulová. Teplo Q dodané plynu se projeví zvětšením vnitřní energie plynu. Platí vztah

$$Q = U_2 - U_1 = C_v (T_2 - T_1) , \quad (7.53)$$

kde index 1 se vztahuje k výchozímu stavu a index 2 ke konečnému stavu. Ze stavové rovnice pro ideální plyn pro izochorický děj plyne **Charlesův zákon**

$$p_2 = p_1 \frac{T_2}{T_1} .$$



Obr. 7.9

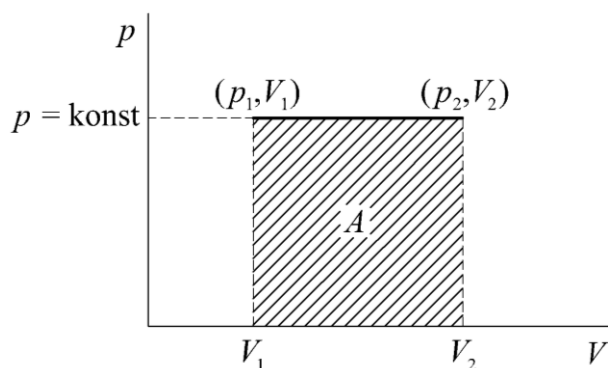
Křivka znázorňující izochorický děj je v p, V diagramu (obr. 7.9) je přímka rovnoběžná s osou p a nazývá se **izochora**.

Izobarický děj.

$$p = \text{konst} .$$

Ze stavové rovnice pro izobarický děj dostaneme, $V_2 = V_1 \frac{T_2}{T_1}$ (**Gay-Lussacův zákon**),

kde index 1 se vztahuje k počátečnímu stavu a index 2 ke konečnému stavu. Křivka charakterizující tento proces se nazývá **izobara** a je to v p, V diagramu (obr. 7.10) přímka rovnoběžná s osou V .



Obr. 7.10

Při izobarickém ději se uplatní všechny tři členy v rovnici vyjadřující 1. zákon termodynamiky

$$Q = U_2 - U_1 + p(V_2 - V_1) . \quad (7.54)$$

Při integraci $W = p \int_1^2 dV$ jsme použili podmínku, že $p = \text{konst}$. Dosazením ze stavové rovnice do vztahu (7.54) získáme pro teplo vyjádření

$$Q = C_V (T_2 - T_1) + nR_m (T_2 - T_1) .$$

Pro teplo $Q_m = \frac{Q}{n}$ dodané 1 molu látky z předchozího vztahu dostaneme

$$\frac{Q}{n} = (C_{mV} + R_m)(T_2 - T_1) = C_{mp} (T_2 - T_1) , \quad (7.55)$$

kde jsme využili platnosti dříve zmíněné Mayerovy rovnice (7.43), kterou lze volně formulovat tak, že tepelná kapacita při stálém tlaku je pro kterýkoliv ideální plyn větší než tepelná kapacita při konstantním objemu. Z hlediska energetické bilance soustavy to znamená, že při dodávání tepla plynu při konstantním objemu se veškeré teplo přemění na přírůstek vnitřní energie, zatímco při dodávání tepla při konstantním tlaku se jeho část spotřebuje na práci, kterou plyn vykoná. Pro stejné zvýšení vnitřní energie a tudíž i teploty musíme dodat soustavě větší množství tepla.

7.12 Druhý zákon termodynamiky. Entropie

1. zákon termodynamiky neklade žádná omezení na směr přenosu tepla, tj. neurčuje podmínky, za kterých může teplo přecházet z jednoho tělesa na druhé, ani na velikost práce, kterou může systém vykonat, jestliže mu je dodáno určité množství tepla. Je to způsobeno tím, že v 1. zákoně termodynamiky se explicitně nevyskytuje teplota. Ve shodě s 1. zákonem by bylo možné sestavit periodicky pracující stroj, který by nedělal nic jiného, než neustále odnámal jednomu tělesu (tepelné lázni) teplo a využíval jej ke konání práce. Protože vnitřní energie se při cyklickém procesu v daném stavu nemění, podle 1. zákona termodynamiky by mezi vykonanou prací a přijatým teplem existoval vztah $A = Q$. Mohli bychom tedy trvale odebírat teplo (například z oceánu nebo zemské pevniny) a měnit jej v práci. Takové zařízení nazval Ostwald **perpetuum mobile druhého druhu**.

2. zákon termodynamiky vyjadřuje v různých obměnách experimentální skutečnost, že je nemožné sestavit perpetuum mobile druhého druhu.

Clausiova formulace:

Je nemožné přenášet cyklickým procesem teplo z chladnějšího tělesa na teplejší, aniž se přitom jisté množství práce změní na teplo.

Kelvinova formulace:

Je nemožné cyklickým procesem odnámat jednomu tělesu (tepelné lázni, termostatu) teplo a měnit je v kladnou práci, aniž přitom přejde jisté množství tepla z tělesa teplejšího na chladnější.

Thomsonova formulace: (Thomson se stal později Lordem Kelvinem.)

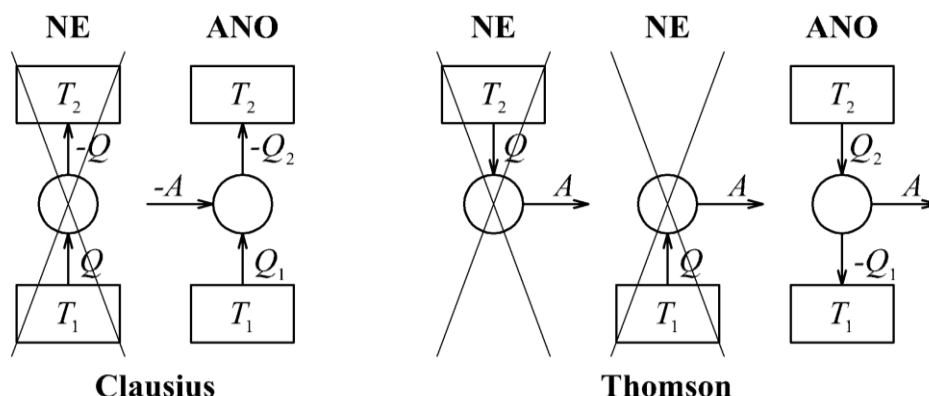
Je nemožné trvale vykonávat kladnou práci pouze tím, že bychom ochlazovali jedno těleso na teplotu nižší, než je teplota nejchladnější části okolí.

Planckova formulace:

Je nemožné sestavit periodicky pracující stroj, který by trvale vykonával kladnou mechanickou práci pouze ochlazováním jednoho tělesa, aniž přitom dochází k jiným změnám v ostatních tělesech.

Carathéodoryova formulace:

V každém okolí každého stavu teplotně homogenního systému existují stavy, k nimž se není možno libovolně přiblížit adiabatickou změnou stavových parametrů. (Existují tedy adiabaticky nedosažitelné stavy.)



Obr. 7.11

Všechny procesy, které skutečně probíhají v přírodě, jsou nevratné. Pouze za určitých podmínek se mohou přiblížit vratným procesům. Jsou to procesy probíhající jen v jednom určitém směru. Plyn se může spontánně rozpínat nikoli stlačovat. Formulace obecných principů charakterizujících přenos energie a účinnost přeměny tepla v práci se stala velmi důležitou s postupem technického rozvoje, zejména v souvislosti s objevem a využitím parního stroje. Aniž bychom se museli zabývat přesným popisem funkce takového zařízení, můžeme z termodynamického hlediska popsat jeho princip. Pracovní látka, například vodní pára, odebere určité množství tepla Q_1 teplému zásobníku, koná práci a odevzdá teplo Q_2 studenějšímu zásobníku. Pracovní látka se pak vrací do původního stavu. Děj se realizuje v uzavřených cyklech a po skončení jednoho cyklu pokračuje stejným cyklem dále. Jestliže chceme zhodnotit účinnost takového zařízení, musíme akceptovat platnost 1. zákona termodynamiky. Vnitřní energie soustavy se při uzavřeném cyklu nemůže změnit, protože termodynamický proces začíná a je ukončen stejným stavem soustavy. Vykonaná práce je proto rovna přijatému teplu zmenšenému o teplo odevzdané

$$A = Q_1 - Q_2 . \quad (7.56)$$

Pracovní látka se musí vrátit do původního stavu (teplejší zásobník), a proto je třeba k započtení dalšího cyklu za stejných podmínek dodat teplo Q_1 . **Účinnost zařízení η** můžeme definovat tak, že vykonanou práci vztáhneme k množství vynaloženého tepla

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} . \quad (7.57)$$

Ačkoliv účinnost tepelných strojů se jistě ve srovnání s dřívějšími značně zvýšila, je v principu nemožné dosáhnout 100% účinnosti. Tento experimentálně získaný poznatek je známý jako další formulace **2. zákona termodynamiky**.

Entropie. Pomocí veličiny entropie lze 2. zákon termodynamiky formulovat matematicky. Při sestavení 1. zákona termodynamiky jsme konstatovali, že přírůstek tepla není obecně úplný diferenciál. Matematicky lze dokázat, že úplný diferenciál má stavová funkce S

$$dS = \frac{dQ}{T} , \quad (7.58)$$

kde T je termodynamická teplota soustavy. Stavovou funkci S zavedenou vztahem (7.58) nazýváme **entropie**. Je to aditivní veličina, která má jednotku $J \cdot K^{-1}$. Analogicky se zavedením měrných a molárních veličin, například tepelných kapacit, můžeme zavést **měrnou a molární entropii**. Vztah (7.58), který je definičním vztahem pro entropii, či vlastně její změnu při vratném ději, můžeme považovat za matematickou formulaci 2. zákona termodynamiky. 2. zákon termodynamiky lze však vyjádřit pomocí entropie pro všechny druhy procesů, vratné i nevratné, a to ve tvaru

$$dS \geq \frac{dQ}{T} , \quad (7.59)$$

kde nerovnost platí pro nevratné a rovnost pro vratné procesy.

Při vratném přechodu ze stavu 1 do stavu 2 pro změnu entropie platí

$$S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{dQ}{T} \quad (7.60)$$

a tato změna na rozdíl od přírůstku tepla již nezávisí na integrační cestě.

Pro kvazistatický proces v ideálním plynu, během kterého je přijato elementární množství tepla dQ , můžeme, využijeme-li vyjádření 1. zákona termodynamiky, psát pro přírůstek entropie

$$dS = \frac{dQ}{T} = n \frac{C_{mV}}{T} dT + \frac{p}{T} dV = n \frac{C_{mV}}{T} dT + n \frac{R_m}{V} dV . \quad (7.61)$$

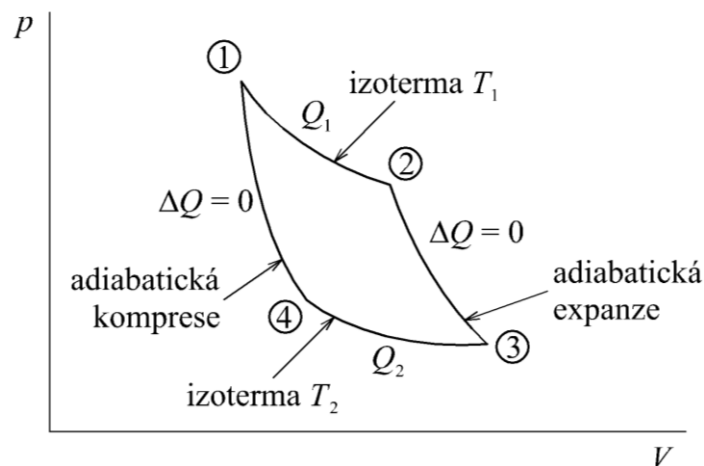
Jestliže soustava přejde ze stavu 1 do stavu 2 vratným dějem, je změna entropie

$$S_2 - S_1 = nC_{mV} \int_1^2 \frac{dT}{T} + nR_m \int_1^2 \frac{dV}{V} = nC_{mV} \ln \frac{T_2}{T_1} + nR_m \ln \frac{V_2}{V_1} \quad (7.62)$$

za předpokladu, že C_{mV} nezávisí na teplotě. Vrátili-li se soustava jakýmkoliv jiným vratným dějem ze stavu 2 zpět do stavu 1, je výsledná změna entropie rovna

$$\int_1^2 \frac{dQ}{T} + \int_2^1 \frac{dQ}{T} = \oint dS = 0 \quad (7.63)$$

Příkladem uzavřeného vratného cyklu je **Carnotův cyklus**. Grafické zobrazení Carnotova cyklu pomocí p, V diagramů je na obr. 7.12.



Obr. 7.12

Tento vratný cyklus, k jehož realizaci jsou potřebné dva zásobníky tepla a pracovní látka, byl popsán již v roce 1823. Pomocí Carnotova cyklu byla stanovena limitní hodnota pro účinnost tepelného stroje, vztah (7.57), vyjádřená pomocí teplot obou zásobníků. Výsledky, které vyplynuly ze studia Carnotova cyklu, lze shrnout do závěru, že **žádný uzavřený cyklus nedo-**

sáhne takové účinnosti jako vratný cyklus. Princip Carnotova cyklu je následující: k dispozici jsou dva zásobníky, teplý a studený, pracovní látkou je ideální plyn. Plyn má v počátečním stavu 1 teplotu T_1 teplejšího zásobníku. Izotermickou expanzí přejde do stavu 2 (po izotermě), takže vykonaná práce je rovna teplu Q_1 přijatému od teplejšího zásobníku.

V druhé části cyklu je již plyn oddělen od teplého zásobníku, dochází k adiabatické expanzi, dokud se plyn neochladí na teplotu chladného zásobníku. Ze stavu 3, v kontaktu se studeným zásobníkem je izotermicky stlačen, až dosáhne stavu 4. V této fázi cyklu je na plynu konána práce a plyn odevzdává teplo Q_2 studenému zásobníku. Nakonec je plyn adiabaticky stlačen, až jeho teplota dosáhne počáteční hodnoty, odpovídající teplotě teplejšího zásobníku.

Výsledná práce vykonaná při jednom cyklu je rovna ploše vymezené křivkami popisujícími cyklus (dvě izotermy a dvě adiabaty) a číselně je rovna teplu přijatému plynem od teplejšího zásobníku minus teplo odevzdané studenému (7.56). Pro stanovení účinnosti můžeme vyjít ze vztahu (7.57), kde $\frac{Q_2}{Q_1}$ musí být funkcí pouze teplot T_2 a T_1 zásobníků, protože účinnost všech

Carnotových cyklů pracujících mezi dvěma stejnými teplotami je stejná.

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{Q_2}{Q_1} . \quad (7.64)$$

Účinnost Carnotova cyklu lze na základě vztahu (7.57) vyjádřit

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1} \quad (7.65)$$

Relaci (7.64) můžeme dostat také ze vztahu (7.63) pro celkovou změnu entropie při kruhovém vratném procesu.

$$\frac{Q_1}{T_1} = \frac{(-Q_2)}{T_2} , \quad (7.66)$$

kde znaménko minus pro teplo Q_2 respektuje skutečnost, že se jedná o teplo odevzdané plynem.

Pro nevratnou změnu ze stavu 1 do stavu 2 nebude již změna entropie $S_2 - S_1$ rovna $\int_1^2 \frac{dQ}{T}$.

Takovou nevratnou změnu představuje například adiabatická expanze plynu do vakua. V tomto procesu je $\Delta Q = 0$ během celého procesu, takže bychom měli předpokládat i nulovou změnu entropie ΔS . Jestliže však tento nevratný proces vyhodnotíme jako vratný proces (protože jen tak jej můžeme jednoduše vyhodnotit), pro který můžeme stanovit změnu entropie, zjistíme překvapivou skutečnost, že **entropie plynu během procesu vzrostla.**

$$\Delta S = R_m \ln \frac{V_2}{V_1} , \quad (7.67)$$

kde $T_2 = T_1$, teplota se nemění a objem se změnil z V_1 na V_2 . Protože V_2 je větší než V_1 , změna entropie je kladná. Tuto skutečnost můžeme zobecnit, a proto entropie může tedy sloužit jako míra nevratnosti adiabatických procesů.

Závěr o růstu entropie je možno zobecnit pro všechny nevratné procesy v izolovaných soustavách.

V izolovaných soustavách jsou možné jen takové změny, při nichž entropie soustavy vzrůstá nebo zůstává nezměněna. Poslední případ se vztahuje k vratným změnám. Je-li nastolená rovnováha, entropie soustavy dosahuje maximální hodnoty.

Princip růstu entropie můžeme považovat za matematickou formulaci 2. zákona termodynamiky.

$$\Delta S = S_2 - S_1 \geq \int_1^2 \frac{dQ}{T}, \quad (7.68)$$

kde dQ je přírůstek tepla při nevratném ději. Při libovolném cyklickém procesu pak platí

$$\oint \frac{dQ}{T} \leq 0, \quad (7.69)$$

kde nerovnost platí pro nevratné procesy a rovnost pro vratné.

Zákon růstu entropie pro izolovanou soustavu lze interpretovat pomocí termodynamické pravděpodobnosti P určitého stavu soustavy. L. Boltzmann ukázal, že entropie souvisí s touto pravděpodobností vztahem

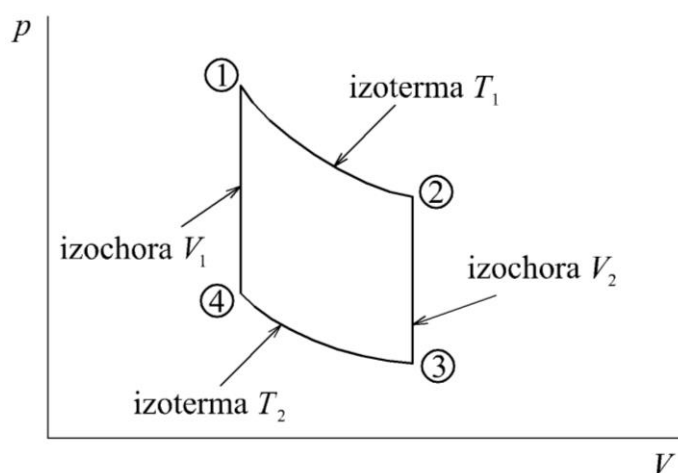
$$S = k \ln P + \text{konst}, \quad (7.70)$$

kde k je Boltzmannova konstanta. Vztah (7.70) lze chápat tak, že při vzrůstu entropie se soustava zároveň dostává do pravděpodobnějšího stavu. Logicky z této relace vyplývá snaha soustavy dostat se do rovnovážného stavu charakterizovaného maximem entropie.

Z 2. zákona termodynamiky vyplývá, že tepelná účinnost každého cyklicky pracujícího zařízení na transformaci tepla v práci je menší než 1, což bylo vyjádřeno vztahem (7.57). Z konkrétního vztahu pro účinnost Carnotova cyklu (7.65) plyne, že účinnost tohoto cyklu by mohla být rovna jedné, pokud by pro teplotu chladné lázně platilo $T_2 = 0 \text{ K}$. Pak by se veškeré teplo transformovalo v mechanickou práci. V tomto okamžiku je třeba doplnit 2. zákon o informaci o možnosti dosažení nulové termodynamické teploty. V Planckově formulaci lze takové tvrzení vyslovit následujícími slovy:

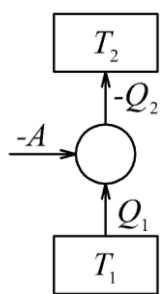
Čistou pevnou látku nelze konečným pochodem ochladit na nulovou termodynamickou teplotu. Důvodem pro toto tvrzení je fakt, že některé vlastnosti látek se v blízkosti absolutní nuly již nemění s teplotou, a že jisté fyzikální veličiny (molární tepelná kapacita, elektrický odpor apod.) jsou při velmi nízkých teplotách prakticky rovné nule. Jestliže nezávisí vlastnosti látek na teplotě, nelze ani vnějšími vlivy dosáhnout snížení teploty látky. Třetí zákon termodynamiky, jak obvykle Ernstovo – Planckovo tvrzení nazýváme, nijak neomezuje ani nestanovuje hodnotu teploty, kterou se můžeme k absolutní nule přiblížit.

Stejnou účinnost jako má stroj pracující podle Carnotova cyklu má také **Stirlingův motor**. p, V diagram cyklu Stirlingova motoru je na obr. 7.13. Cyklus se skládá z izotermické expanze, po které následuje izochorický děj, při kterém se plyn z teploty T_1 ochladí na teplotu T_2 . Dále dochází k izotermické kompresi, konečný děj je izochorický, při kterém dochází k ohřátí plynu na původní teplotu T_1 . Aby došlo k zahřátí plynu při konstantním objemu, musí se mu dodat teplo z další tepelné lázně, jejíž teplota se bude spojitě měnit mezi teplotami T_2 a T_1 . Analogický děj obráceným směrem probíhá při izochorickém ochlazování, a to z téže lázně. Motor založený na tomto principu vynalezl v roce 1816 skotský pastor Robert Stirling. Jako plyn se dříve používal vzduch, v současnost se kvůli vyšší tepelné vodivosti a menším turbulentním ztrátám používá raději helium či vodík. Současné aplikace používající Stirlingův motor směřují především ke kombinované výrobě elektrické a tepelné energie. Největší budoucnost Stirlingova motoru je zřejmě ve výrobě elektrické energie z odpadního tepla z technologických procesů a z obnovitelných zdrojů energie, jako je např. biomasa či sluneční záření.



Obr. 7.13

7.13 Idea chladničky a tepelného čerpadla



Obr. 7.14

Chladnička je stroj, který pomocí dodané práce odčerpává teplo z chladnějšího prostředí. Schéma chladničky je na obr. 7.14.

Carnotův děj, který byl vysvětlen výše, budeme provádět v obráceném směru. Začneme při pokojové teplotě T_1 , stlačujeme plyn, a abychom udrželi stálou teplotu plynu T_1 , odebereme mu postupně teplo Q_1 . Poté ho adiabaticky izolujeme a necháme vratně expandovat (tj. konat přitom práci), teplota plynu poklesne na T_2 . Odstraníme adiabatickou stěnu a studený plyn necháme dále expandovat. Plyn odebírá svému okolí teplo při teplotě T_2 (a udržuje tím své okolí studené). Po dostatečné expanzi plyn opět adiabaticky stlačíme do původního stavu. Dodáním práce jsme umožnili odebrání tepla

při teplotě T_2 nižší než teplota okolí T_1 . Za vhodnou míru účinnosti (chlazení) můžeme považovat chladicí faktor K neboli činitel chlazení, který je dán jako podíl odebraného tepla z chladnějšího prostředí a vykonané práce.

Chladicí faktor se dá vyjádřit pomocí teplot lázní následujícím vztahem

$$K = \frac{|Q_1|}{|A|} = \frac{|Q_1|}{|Q_2| - |Q_1|} = \frac{T_1}{T_2 - T_1} . \quad (7.71)$$

Pro běžné domácí chladničky je $K \doteq 5$ a běžná klimatizační zařízení (která jsou také z principu chladničkou) $K \doteq 2,5$. Chladicí faktor je tím vyšší, čím jsou teploty lázní bližší.

Tepelné čerpadlo zahřívá teplé prostředí převáděním tepla z chladnějšího prostředí. Princip je přesně stejný jako u chladničky, jen důraz klademe na něco jiného. Tepelné čerpadlo čerpá teplo z okolí domu (chladnější lázeň) a dodává ho do místnosti (teplejší lázeň). Nyní si tedy oproti původní chladničce „nevážíme chladu“, ale naopak tepla. Dodáváním práce přečerpáváme teplo z chladnější nádrže (potok, okolí) do teplejší (místnost). Schéma tepelného čerpadla je totožné se schématem chladničky. Mírou účinnosti je topný faktor K . Ten bude vždy větší než 1 a dá se určit pomocí následujícího vztahu.

$$K = \frac{|Q_2|}{|A|} = 1 + \frac{|Q_1|}{|Q_2| - |Q_1|} = \frac{T_2}{T_2 - T_1} \quad (7.72)$$

Reálná tepelná čerpadla mají oproti teoretickým topný faktor asi poloviční. I pro tepelná čerpadla je výhodné pracovat mezi lázněmi, které mají blízké teploty.

7.14 Fázové přeměny

Jestliže dodáváme určitému množství látky při konstantním tlaku teplo, výsledkem je obvykle zvýšení teploty. Někdy je však i poměrně velké množství tepla absorbováno látkou beze změny teploty. Dochází k tomu při změně **fáze**, přičemž fázi rozumíme určité skupenství nebo krystalický stav látky. Pod změnou fáze si můžeme představit například přeměnu pevné látky v kapalinu, kapalinu v plyn, nebo i přeměnu jedné krystalické formy v jinou. Absorpci nebo naopak uvolnění určitého množství tepla při opačné fázové změně je možné pochopit na základě kinetické teorie tepla. Například pro přeměnu kapalinu v plyn je nutné, aby molekuly opustily původní poměrně pevné uspořádání, čehož lze dosáhnout jedině tak, že molekuly získají dostatečné množství energie k překonání přitažlivých vazeb. Přitom jejich kinetická energie může zůstat konstantní, takže podle kinetické teorie se teplota látky nezmění.

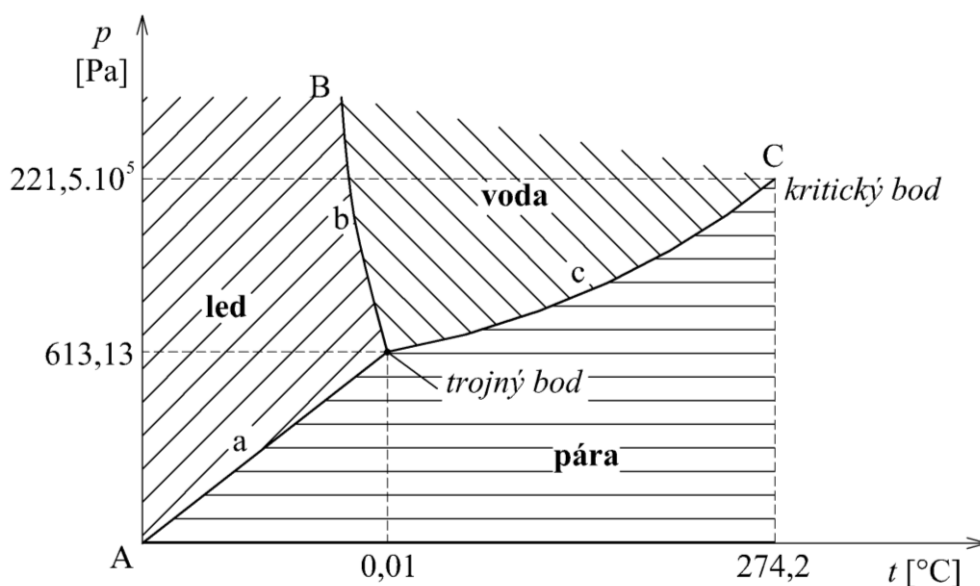
Skupenské teplo L je teplo potřebné k přeměně jedné fáze v druhou, nebo teplo, které se při této přeměně uvolní. Přeměna probíhá při stejné teplotě a tlaku. Jednotkou je 1 J. Někdy se skupenské teplo označuje jako latentní teplo.

Měrné skupenské teplo l je podíl skupenského tepla L látky a její hmotnosti.

Přeměna pevné fáze v kapalnou se nazývá **tání**, opačná přeměna je **tuhnutí**. Přeměna kapalně fáze v plynnou se nazývá **vypařování**, opačná přeměna **kondenzace**. Přeměna pevné fáze v plynnou je **sublimace**.

Pro čistou látku je teplota, při které proběhne fázová přeměna při daném tlaku, přesně definovaná. Hodnoty teploty odpovídající bodu tání ledu a varu vody se staly definičními body Celsiovy teplotní stupnice. Voda při atmosférickém tlaku mění pevné skupenství v kapalně při $0\text{ }^\circ\text{C}$ a kapalně v plynně při $100\text{ }^\circ\text{C}$.

Chování čisté látky včetně jejích skupenských přeměn můžeme charakterizovat pomocí **fázového diagramu**. Charakterizuje závislost tlaku na teplotě látky. Přitom předpokládáme, že procesy v látce probíhají kvazistaticky, tj. cestou rovnovážných stavů. Pro vodu je fázový diagram znázorněn na obr. 7.15.



Obr. 7.15

Křivka b je **křivka tání** a popisuje přechod pevného skupenství v kapalnou a naopak. Pro každou hodnotu tlaku je jednoznačně určena teplota tání. Rozhraní mezi kapalnou a plynnou fází určuje křivka **sytých par** (křivka c). Pro každou hodnotu tlaku se při dané teplotě po krátkém časovém intervalu vytvoří rovnováha mezi párou a kapalinou. Bod C křivky je **kritický bod** a nad tímto bodem již nelze rozlišit vodu a páru. Bod 0 je **trojný bod**, ve kterém mohou existovat všechny fáze současně. Pro vodu nastává trojný bod pro teplotu $273,16 \text{ K} = 0,01 \text{ °C}$ a tlak $p = 613 \text{ Pa}$. Z obr. 7.15, průběhu křivky b vyplývá, že pro vodu teplota tání se vzrůstajícím tlakem klesá. Mnohé látky se chovají opačně, tj. teplota tání s tlakem vzrůstá.

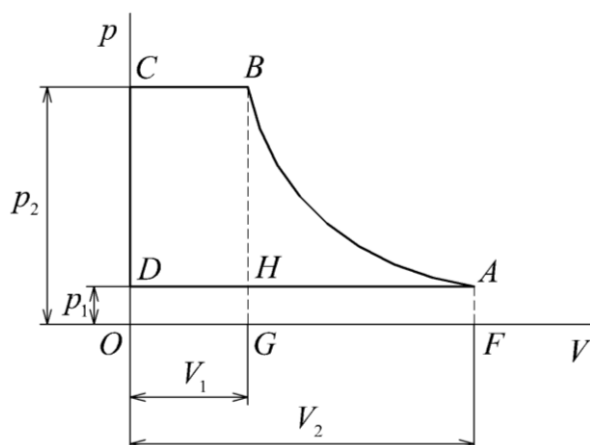
7.15 Příklady ke kap. 7

Příklad 7.1

Na obrázku 7.16 je teoretický pracovní diagram kompresoru. Část AB odpovídá izotermickému stlačení vzduchu, BC protékání vzduchu do rezervoáru kompresoru (tlak zůstává konstantní), CD okamžitému snížení tlaku ve válci kompresoru při uzavření výpustného ventilu a otevření sacího otvoru, DA sání vzduchu při atmosférickém tlaku.

Dokažte:

Celková práce kompresoru v jednom cyklu je rovna práci vykonané při izotermickém stlačení vzduchu.



Obr. 7.16

Řešení:

Vzduch můžeme považovat za ideální plyn.

Celková práce je dána součtem prací při jednotlivých dějích.

$$A = A_1 + A_2 + A_3$$

$$A_1 = \int_{V_1}^{V_2} p dV = nR_m T \ln \frac{V_2}{V_1} \text{ – izotermický děj}$$

$$A_2 = \int_{V_2}^{V_0} p dV = p_2 (V_0 - V_2) \text{ – izobarický děj}$$

$$A_3 = \int_{V_0}^{V_1} p dV = p_1 (V_1 - V_0) \text{ – izobarický děj při atmosférickém tlaku}$$

$$A = nR_m T \ln \frac{V_2}{V_1} + p_2 (V_0 - V_2) + p_1 (V_1 - V_0) = nR_m T \ln \frac{V_2}{V_1} + p_2 V_0 - p_2 V_2 + p_1 V_1 - p_1 V_0$$

1. děj je izotermický, a proto $p_1 V_1 = p_2 V_2$. Odtud pro práci A plyne

$$A = nR_m T \ln \frac{V_2}{V_1} + p_2 V_0 - p_1 V_0 = nR_m T \ln \frac{V_2}{V_1} + (p_2 - p_1) V_0$$

Objem $V_0 = 0$ (všechn vzduch je vytlačen z pístu), a tak pro celkovou práci platí

$$A = A_1 = nR_m T \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

Práce je záporná, koná ji vnější síla, ne plyn.

Příklad 7.2

Dva kilogramy vody se zahřejí z 20 °C na 100 °C a při této teplotě se přemění v páru. Měrná tepelná kapacita vody je $c_v = 4,18 \cdot 10^3 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ a měrné skupenské teplo varu vody je $l_v = 2,26 \cdot 10^6 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1}$.

Vypočítejte:

změnu entropie při tomto ději.

Řešení:

Protože entropie je aditivní veličina, lze celkovou entropii určit jako součet entropií dvou dějů: ohřátí vody k bodu varu a přeměna vody v páru.

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = \int_1^2 \frac{dQ_1}{T} + \int_2^3 \frac{dQ_2}{T} = \int_1^2 \frac{mc_v dT}{T} + \int_2^3 \frac{ml_v}{T} = mc_v \ln \frac{T_2}{T_1} + \frac{ml_v}{T_2}$$

$$T_1 = 293,15 \text{ K}, T_2 = 373,15 \text{ K}$$

$$\Delta S = 2 \cdot 4,18 \cdot 10^3 \ln \frac{373,15}{293,15} + \frac{2 \cdot 2,26 \cdot 10^6}{373,15} = 14,1 \cdot 10^3 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$$

Příklad 7.3

Válcové potrubí, kterým se vede pára, je obaleno tepelnou izolací. Vnější povrch izolace má teplotu $t_2 = 50^\circ\text{C}$ a vnitřní povrch přiléhající k potrubí má teplotu $t_1 = 120^\circ\text{C}$. Délka potrubí $L = 65 \text{ m}$. Vnější poloměr izolačního obalu je $r_2 = 65 \text{ mm}$, vnitřní $r_1 = 35 \text{ mm}$. Tepelná vodivost izolace je $\lambda = 0,058 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.

Vypočítejte:

množství tepla, které se odvede z potrubí do okolí za 24 hodin.

Řešení:

S přenosem tepla souvisí veličina tepelný tok definovaný vztahem $J = \frac{dQ}{dt}$. Tepelný tok

představuje teplo přenesené za jednotku času. Dosazením za tepelný tok ze vztahu (7.29), když uvažujeme, že teplo prochází pláštěm válce, získáme vztah

$$J = -\lambda L 2\pi r \frac{dT}{dr}.$$

Po úpravě dostaneme: $\int_{r_1}^{r_2} J \frac{dr}{r} = -\int_{T_1}^{T_2} 2\pi\lambda L dT$ a po integraci lze psát

$$J \ln \frac{r_2}{r_1} = 2\pi\lambda L (T_1 - T_2) = 2\pi\lambda L (t_1 - t_2) \Rightarrow \frac{dQ}{dt} = \frac{2\pi\lambda L (t_1 - t_2)}{\ln \frac{r_2}{r_1}}$$

Po integraci získáme hledaný výraz pro teplo

$$Q = \frac{2\pi\lambda L (t_1 - t_2)}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \tau, \text{ kde } \tau \text{ je doba, pro kterou určujeme množství odvedeného tepla. Do vý-}$$

sledného vztahu dosadíme a dostaneme

$$Q = \frac{2\pi \cdot 0,058 \cdot 65 \cdot (120 - 50) \cdot 24 \cdot 3600}{\ln \frac{65 \cdot 10^{-3}}{35 \cdot 10^{-3}}} \doteq 635 \text{ MJ}$$

8. Elektrické pole

8.1 Elektrický náboj

Existenci elektrických přitažlivých sil zaznamenali již staří Řekové, i když ještě zcela nerozlišovali mezi přitažlivými účinky elektrického a magnetického pole. Po četných dílčích objevech, které v této oblasti fyziky byly učiněny ve středověku, je třeba jmenovat zákon, který kvantitativně charakterizoval silové účinky mezi dvěma elektricky nabitými tělesy. Tento zákon byl vysloven a potvrzen experimentálně Ch. Coulombem na konci 18. stol. na základě přesného měření silových účinků pomocí torzních vah.

V devatenáctém století rozvoj vědy a techniky urychlil pochopení podstaty elektřiny a magnetizmu. Stalo se tak především prostřednictvím experimentů M. Faradaye a magnetické teorie J. C. Maxwella. Experimenty prováděné na počátku 20. stol. se zabývaly především podstatou elektrického náboje. J. J. Thomson zjistil, že všechny látky obsahují částice, které mají týž měrný elektrický náboj, tj. stejnou hodnotu poměru velikosti elektrického náboje a hmotnosti. Robert Millikan začátkem tohoto století zjistil, že elektrický náboj je kvantovaný, to znamená, že se vyskytuje pouze v celistvých násobcích základní jednotky, nazvané elementární náboj. Velikost každého elektrického náboje lze zapsat $Q = Ne$, kde N je celé číslo a e je velikost elementárního náboje. V SI soustavě jednotek je jednotkou náboje 1 C (coulomb), definovaný pomocí jednotky elektrického proudu 1 A. Úmluvou byl náboj elektronu označen jako $-e$ a náboj protonu e . Velikost elementárního elektrického náboje je

$$e = 1,602\,177\,33(49) \cdot 10^{-19} \text{ C} .$$

Studiem elektricky nabitých těles a jejich chování bylo vyvozeno několik důležitých závěrů platných pro elektrický náboj:

- zachovává se,
- je kvantovaný,
- síla mezi dvěma bodovými náboji klesá se čtvercem jejich vzdálenosti,
- velikost elektrického náboje se při pohybu nemění.

Nosiči elektrického náboje jsou volné elementární částice, například elektron, proton, pozitron a další. V každém atomu se nachází stejný počet kladně nabitých protonů a záporně nabitých elektronů, takže atom navenek se za normálních podmínek jeví jako neutrální. Látky z hlediska elektrických vlastností dělíme na vodiče, polovodiče a izolanty.

8.2 Coulombův zákon

V Coulombově zákonu jsou shrnuty poznatky o vzájemném silovém působení jednoho elektrického náboje na druhý. Velikost síly působící mezi bodovými náboji o velikosti Q_1 a Q_2 (náboji, jehož rozměry jsou malé ve srovnání se vzdáleností, ve které uvažujeme účinky náboje), je přímo úměrná součinu velikostí nábojů a nepřímo úměrná čtverci jejich vzájemné vzdálenosti r . Dále závisí na vlastnostech prostředí, v němž se náboje nacházejí. Je dána vztahem

$$F = k \frac{Q_1 Q_2}{r^2}, \quad (8.1)$$

kde k je konstanta závislá na volbě jednotek a na vlastnostech prostředí, v kterém se náboje nalézají. V SI soustavě jednotek a pro náboje umístěné ve vakuu je

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}, \quad (8.2)$$

kde ϵ_0 je elektrická konstanta (permitivita vakua). $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$. V dalším textu budeme stejnou hodnotu konstanty ϵ_0 používat i pro vzduch. Relativní chyba, které se tak při výpočtech různých veličin dopustíme, je menší než 1 %.



Obr. 8.1

Jestliže chceme Coulombův zákon (8.1) přepsat do vektorového tvaru, zavedeme vektor \vec{r} , který míří z náboje 1 do náboje 2. Vektor \vec{r}_0 je jednotkový vektor ve směru \vec{r} (obr. 8.1). Síla \vec{F}_{21} , kterou náboj Q_1 působí na náboj Q_2 , je dána pomocí vztahu

$$\vec{F}_{21} = k \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \vec{r}_0, \quad (8.3)$$

kde r je velikost vektoru \vec{r} . Obráceně sílu \vec{F}_{12} , kterou náboj Q_2 působí na náboj Q_1 dostaneme záměnou indexů 1 a 2 ve vztahu (8.3). Platí tedy $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$ v souladu s Newtonovým principem akce a reakce. Síly mezi bodovými náboji působí podél jejich spojnice – takové síly nazýváme centrální. Změní-li se znaménko součinu $Q_1 Q_2$, změní se pouze směr síly a nikoli její velikost. Kladné znaménko tohoto součinu přitom odpovídá síle odpudivé, záporné znaménko síle přitažlivé.

Jestliže na bodový náboj silově působí několik bodových nábojů, dostaneme výslednou sílu vektorovým složením jednotlivých sil působících v místě náboje (princip superpozice).

8.3 Elektrostatické pole

Podobně jako tělesa s nenulovou hmotností vytvářejí ve svém okolí gravitační pole, elektrické náboje jsou obklopeny elektrickým polem. Nehybné, statické náboje vytvářejí ve svém okolí pole **elektrostatické**. V případě gravitačního pole jsme k jeho charakterizování použili vektor **intenzity pole**.

Intenzita elektrického pole \vec{E} v určitém místě je definována vztahem

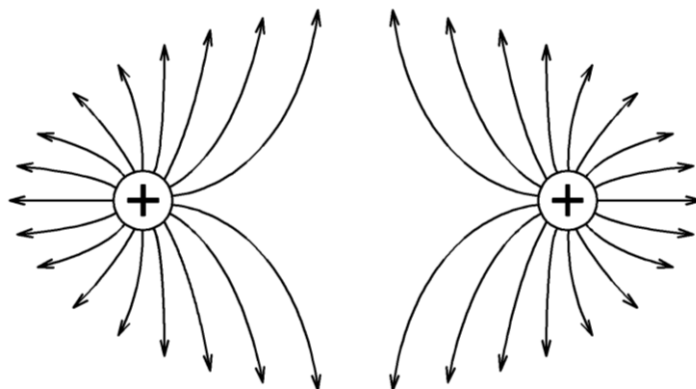
$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{Q}, \quad (8.4)$$

kde Q je náboj, na který elektrické pole silově působí silou \vec{F} .

Význam intenzity \vec{E} si můžeme přiblížit tak, že zkoumáme silové působení bodového náboje (např. velikosti Q_1) na testovací náboj Q , který umísťujeme do různých míst v okolí náboje Q_1 . Jestliže testovací náboj má jednotkovou velikost a je kladný, je síla v každém bodě právě rovna intenzitě elektrického pole vytvářeného nábojem Q_1 .

Jednotka intenzity je $\text{N} \cdot \text{C}^{-1} = \text{V} \cdot \text{m}^{-1}$.

Znalost rozložení a velikosti nábojů vytvářejících elektrostatické pole a znalost intenzity pole jako funkce prostorových souřadnic jsou ekvivalentní. Vše, co lze vyjádřit pomocí poloh a velikostí nábojů, lze vyjádřit i pomocí intenzity pole; druhý způsob je přitom elegantnější a mnohem pohodlnější.



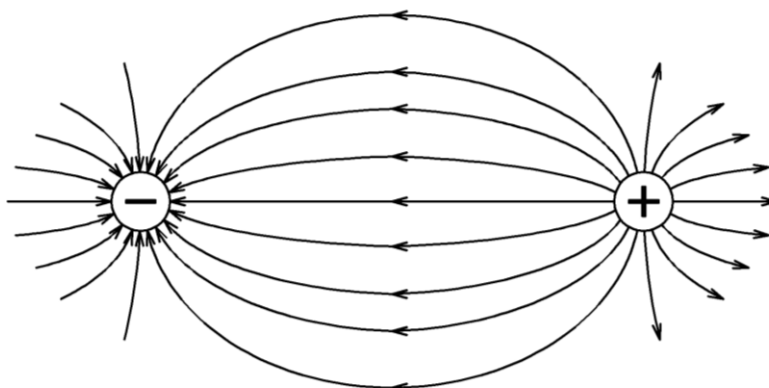
Obr. 8.2

Elektrostatické pole můžeme zobrazit pomocí siločar. Jejich počet (siločáry vycházejí z povrchu náboje) lze volit tak, aby byl úměrný velikosti náboje a tedy, v soulase se zněním Coulombova zákona, jejich hustota byla úměrná intenzitě pole (pro danou vzdálenost od náboje). Směr intenzity pole je určen v každém bodě tečnou k siločáře. Podle úmluvy vycházejí siločáry z kladného náboje a končí v záporném. Na obr. 8.2 je znázorněno pomocí siločar elektrostatické pole pro dva náboje kladně nabitě a stejné velikosti a na obr. 8.3 pro opačně nabitě a stejně velké.

Pro siločáry platí další pravidla daná zkušeností. Začínají nebo končí pouze v nábojích. Žádné dvě siločáry se neprotínají, protože v průsečíku by nebyla intenzita pole jednoznačně určena. Intenzitu elektrostatického pole vytvořeného soustavou bodových nábojů v určitém bodě A určíme podle principu superpozice, který pro tento případ platí. Výsledná intenzita pole je dána vektorovým součtem intenzit elektrostatických polí \vec{E}_i od jednotlivých nábojů v bodě A .

$$\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{Q_i}{r_i^2} \vec{r}_{i0}, \quad (8.5)$$

kde \vec{r}_{i0} je jednotkový polohový vektor uvažovaného bodu vzhledem k náboji Q_i .



Obr. 8.3

Při zkoumání elektrických sil nemáme zpravidla co činit s jednotlivými bodovými či elementárními náboji, ale s nabitými makroskopickými tělesy. Jde tedy o velké soubory nabitých částic, které jsou rozloženy v objemu, případně na povrchu tělesa, s velkou hustotou tak, že toto rozložení můžeme považovat za spojitě. Nejde zde ovšem o spojitost v matematickém smyslu, nýbrž ve smyslu fyzikálním: zvolíme-li „nekonečně malý“ (diferenciální) objem nabitěho tělesa, budeme stále předpokládat, že obsahuje velké množství elementárních nábojů, takže se neprojeví kvantování náboje.

Pro spojitě rozprostřený náboj zavádíme hustotu náboje, a to pro jednorozměrný případ **lineární hustotu náboje** τ . Předpokládáme-li, že na délkovém elementu Δl je rozložen náboj ΔQ , je lineární hustota náboje zavedena vztahem

$$\tau = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta l} = \frac{dQ}{dl} . \quad (8.6)$$

Podobně pro dvojrozměrný případ (náboj rozložen na ploše) definujeme **plošnou hustotu náboje** σ

$$\sigma = \frac{dQ}{dS} , \quad (8.7)$$

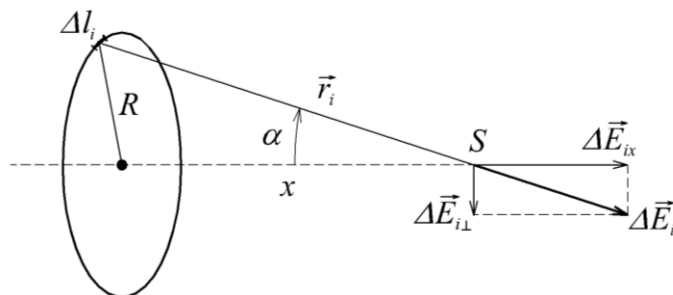
kde dQ je náboj na elementární ploše dS . Pro náboj rozložený v prostoru zavádíme **prostorovou hustotu náboje** ρ

$$\rho = \frac{dQ}{dV} , \quad (8.8)$$

kde dQ je náboj v elementárním objemu dV . Celkový náboj Q vypočteme integrací elementárního náboje dQ přes délku l , plochu S , či objem V , ve kterém je náboj rozložen.

Příklad na výpočet intenzity elektrostatického pole spojitě rozloženého náboje

Úkolem je stanovit intenzitu elektrostatického pole na ose kruhového prstence poloměru R ve vzdálenosti x od středu prstence. Prstenec je rovnoměrně nabit s celkovým nábojem Q (obr. 8.4).



Obr. 8.4

Prstenec lze rozdělit na i stejných elementů Δl_i . Každý element prstence Δl_i nese náboj velikosti ΔQ_i a v bodě S na ose prstence přispívá k výsledné intenzitě příspěvkem $\Delta \vec{E}_i$. Tento příspěvek $\Delta \vec{E}_i$ můžeme vektorově rozložit do směru kolmého k ose x $\Delta \vec{E}_{i\perp}$ a rovnoběžného s osou x $\Delta \vec{E}_{ix}$. Příspěvky kolmé k ose se zřejmě vždy pro dva vzájemně symetrické elementy prstence vyruší, takže $\sum_i \Delta \vec{E}_{i\perp} = 0$.

Pro velikost příspěvku ΔE_{ix} můžeme psát

$$\Delta E_{ix} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\Delta Q_i}{r^2} \cos \alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\Delta Q_i}{r^2} \frac{x}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \Delta Q_i \frac{x}{(x^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}}$$

kde $r^2 = x^2 + R^2$, $\cos \alpha = \frac{x}{r} = \frac{x}{(x^2 + R^2)^{\frac{1}{2}}}$.

Protože úhel α je stejný pro všechny elementy ΔQ_i a také jejich vzdálenost od bodu S je stejná, je velikost výsledné intenzity

$$E_x = \sum_i \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \Delta Q_i \frac{x}{(x^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{(x^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} \sum_i \Delta Q_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{(x^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} Q$$

a výsledná intenzita směřuje ve směru osy x .

8.4 Pohyb bodového náboje v elektrostatickém poli

Jestliže umístíme bodový náboj Q do elektrostatického pole intenzity \vec{E} , bude na něho působit stálá síla $\vec{F} = Q\vec{E}$. Pod pojmem bodový náboj si můžeme představit částici zanedbatelných

rozměrů, například elektron, proton, deuteron apod. Je-li tato částice volná, a elektrická síla bude jedinou silou, která na ni bude působit, platí pro částici pohybová rovnice ve tvaru $m\vec{a} = Q\vec{E}$. Částice se bude pohybovat pohybem rovnoměrně zrychleným se zrychlením o velikosti $a = E \frac{Q}{m}$, kde m je klidová hmotnost částice (při splnění předpokladu, že částice se pohybuje rychlostí o velikosti v mnohem menší než je rychlost světla). Známe-li velikost intenzity elektrostatického pole, můžeme ze zrychlení částice určit její měrný náboj $\frac{Q}{m}$. Tímto způsobem byl určen měrný náboj elektronu J.J.Thomsonem již v roce 1897.

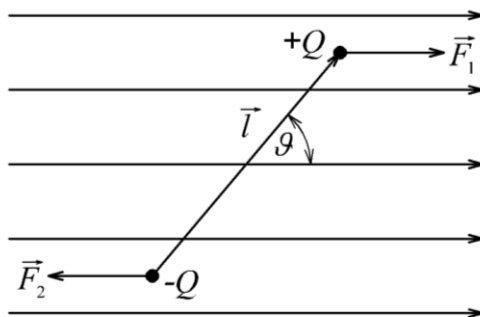
8.5 Elektrický dipól v elektrostatickém poli

Atomy a molekuly jsou elektricky neutrální, ale za určitých podmínek, například při vložení do elektrického pole, se mohou chovat jako dipóly, tj. posune se vůči sobě těžiště kladného a záporného náboje, a molekula nebo atom se začne projevovat jako dipól.

Dipól (kladný a záporný náboj stejné velikosti v určité vzdálenosti l) charakterizujeme vektorem \vec{p} , který nazýváme moment dipólu.

$$\vec{p} = Q\vec{l} \quad (8.9)$$

kde vektor \vec{l} míří od středu záporného náboje ke středu kladného (obr. 8.5). V limitě, kdy $l \rightarrow 0$ a \vec{p} zůstává konečný, vznikne bodový útvar. Nazýváme jej **bodovým elektrickým dipólem**.



Obr. 8.5

Vedle bodového náboje představuje tento dipól druhý velmi důležitý bodový útvar používaný k charakteristice reálných elektrostatických soustav. Určujeme-li potenciál a intenzitu elektrostatického pole vytvořeného dipólem, výsledné vztahy platí přesně pro bodový elektrický dipól, kdežto pro dipól, u něhož velikost vektoru \vec{l} není zanedbatelná, platí výsledné vztahy po určitém zanedbání. V homogenním elektrostatickém poli intenzity \vec{E} si můžeme chování dipólu (molekuly) přiblížit (obr. 8.5).

Na náboj $-Q$ působí síla $\vec{F}_2 = -Q\vec{E}$, na náboj Q síla $\vec{F}_1 = Q\vec{E}$. Na dipól umístěný v elektrostatickém poli působí silová dvojice, která se ho snaží pootočit do směru elektrostatického pole, tedy zmenšit úhel ϑ , aby moment silové dvojice \vec{M} byl minimální.

$$\vec{M} = \vec{l} \times Q\vec{E} = \vec{l}Q \times \vec{E} = \vec{p} \times \vec{E} , \quad (8.10)$$

kde jsme pro vyjádření momentu \vec{M} použili vztah (8.9). Vektor \vec{M} směřuje kolmo od nás. Pro složky momentu síly můžeme psát relace

$$M_x = M_y = 0, M_z = -pE \sin \vartheta .$$

Pomocí velikosti momentu silové dvojice můžeme určit práci, kterou je třeba vynaložit k pootočení dipólu o úhel $d\vartheta$. Tím dojde ke změně potenciální energie W_p dipólu v elektrickém poli o přírůstek dW_p . Pro potenciální energii je třeba nejdříve vhodným způsobem zvolit její nulovou hladinu, což v tomto případě je pro $\vartheta = 90^\circ$. Potenciální energii dipólu pro určité natočení (úhel ϑ') pak vypočteme jako práci, kterou vykonáme proti síle pole při pootočení dipólu z polohy $\vartheta' = 90^\circ$ do polohy $\vartheta' = \vartheta$. Pro potenciální energii W_p dostaneme vztah

$$W_p = -A = \int_{90^\circ}^{\vartheta} M d\vartheta' = -pE \cos \vartheta . \quad (8.11)$$

Zvětšením úhlu ϑ zvyšujeme potenciální energii dipólu v elektrostatickém poli.

$$W_p = -pE \cos \vartheta = -\vec{p} \cdot \vec{E} . \quad (8.12)$$

Je-li elektrostatické pole nehomogenní, pak kromě síly, která se snaží dipól vyrovnat do směru pole, působí ještě další síla, která závisí na orientaci dipólu. Elektrický dipól orientovaný souhlasně se směrem intenzity elektrostatického pole je vtahován do oblasti o větší intenzitě pole, dipól orientovaný nesouhlasně je z této oblasti vytlačován. Volný obecně orientovaný dipól se působením silového momentu nejprve natočí do směru pole a pak bude vtahován do oblasti o větší intenzitě. Síly působící na dipóly v elektrostatickém poli mají rozhodující roli při popisu dielektrik.

8.6 Elektrické vodiče

Již v počátcích experimentálního studia elektrických jevů bylo známo, že různé látky mají různou schopnost být zeлектроvaný a udrženy v tomto zeлектроvaném stavu. Dále bylo zjištěno, že elektrický náboj lze dotykem přenášet z jednoho tělesa na druhé, přičemž různé látky se i v tomto směru chovají různě. Látky, které jsou schopny převádět elektrický náboj, se nazývají elektrickými **vodiči**, látky, které tuto schopnost nemají, se nazývají **nevodiči (dielektriky, izolanty)**.

Všimněme si rozdílu mezi těmito dvěma druhy látek. Je-li zeлектроvaný vodič spojen vodivě se zemí, odvádí se jeho náboj ihned do země a vodič se stále jeví neelektrickým. Chceme-li na vodiči náboj udržet, musí být ze všech stran obklopen nevodiči. Říkáme, že musí být izolován. Dotkneme-li se izolovaného vodiče na některém místě nabitým tělesem, stane se ihned nabitým po celém povrchu. Dotkneme-li se naopak nabitého izolovaného vodiče v kterémkoli místě vodičem spojeným se zemí, odvedeme ihned všechny náboj do země. Jestliže se dotkneme tímto vodičem nabitého nevodivého tělesa, odvedeme do země jen náboj z místa dotyku.

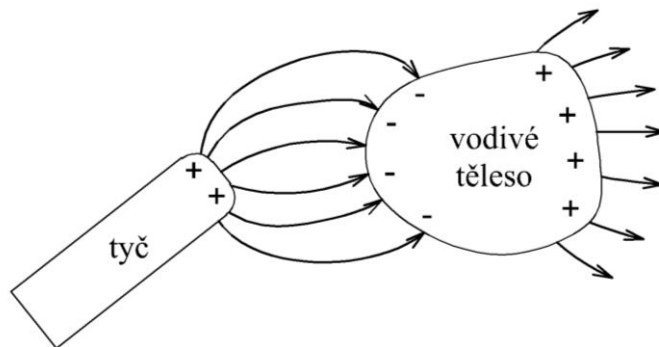
Na základě uvedeného chování vodičů usuzujeme, že nositelé elektrických nábojů se mohou volně pohybovat v celém jejich objemu. (Představiteli vodičů jsou kovy, roztoky elektrolytů, plazma.)

U nevodíčů předpokládáme, že všichni nositelé náboje jsou v nich vázáni určitými silami, takže k přenosu náboje objemem nevodíče nemůže snadno docházet. (Představiteli nevodíčů jsou sklo, slída, guma, většina umělých hmot.)

Existují také látky, které jsou podstatně hůře vodivé než vodiče, ale podstatně lépe vodivé než nevodíče. Dále jejich schopnost přenášet elektrický náboj je silně závislá na jejich chemické čistotě a vnějších podmínkách (teplotě, osvětlení, ozáření apod.). Tyto látky se nazývají **polovodiče**. Patří mezi ně některé prvky jako křemík, germanium, selen, dále krystaly GaAs, Cu_2O , CdS, PbS a další.

Chování vodičů v elektrostatickém poli

Umístíme-li vodivé těleso do elektrostatického pole jiného nabitého tělesa, zjistíme, že se na tomto vodivém tělese rovněž objeví makroskopické elektrické náboje, které pozmení průběh původního elektrostatického pole.



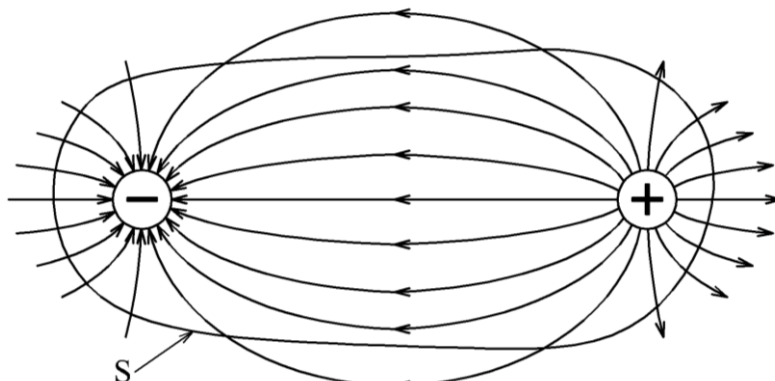
Obr. 8.6

Na obr. 8.6 je schematicky znázorněna konkrétní situace. Do blízkosti kladně nabitě tyče T je umístěno vodivé těleso K . Po ustavení rovnovážného stavu budou jeho části bližší tyči T nabitě záporně, zatímco části vzdálenější budou nabitě kladně. Celková velikost náboje izolovaného, původně nenabitěho vodivěho tělesa K zůstane ovšem nulová – kladný a záporný makroskopický náboj mají tutěž velikost. Uvedený jev spočívá v tom, že elektrostatické pole vyvolává existenci makroskopických nábojů na vodičích původně nenabitých. Tento jev se nazývá **elektrostatická indukce**.

Jev elektrostatické indukce pochopíme na základě představy o existenci volných nosičů náboje na vodiči. Vložíme-li vodič do elektrostatického pole, bude na každou částici nesoucí elektrický náboj působit síla, kterou můžeme určit ze vztahu (8.3). Jejím účinkem se začnou volní nosiče náboje přemísťovat. Tímto způsobem dojde k separaci kladných a záporných nábojů v tělese. Za předpokladu, že na nosiče náboje nepůsobí v objemu tělesa žádné další síly, musí být rovnovážné rozdělení nábojů v tělese takové, aby výsledná intenzita pole byla všude uvnitř nulová. Pokud by bylo v některé části vodiče pole nenulové, museli by se volní nosiče náboje účinkem tohoto pole přemísťovat.

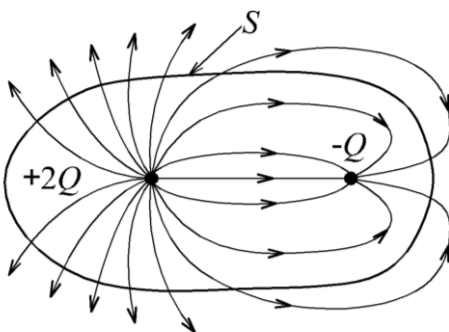
8.7 Gaussova elektrostatická věta

Ukážeme, že s pomocí Gaussovy elektrostatické věty lze poměrně snadno stanovit intenzitu pro případy elektrostatických polí vykazujících vyšší stupeň symetrie. Tento postup je jednodušší než určení intenzity pole z Coulombova zákona.



Obr. 8.7

V kvalitativní formě lze Gaussovu větu vyslovit na základě již dříve vyslovených pravidel o siločárách. Jestliže zobrazíme elektrostatické pole v okolí bodových nábojů pomocí siločar a náboje obklopíme uzavřenou plochou, pak výsledný počet siločar (vystupujících z plochy minus vstupujících) je úměrný celkovému náboji, který je uzavřen plochou. Na obr. 8.7 je pole dipólu tvořeného náboji $(-Q)$ a Q . Počet siločar (vystupujících minus vstupujících) procházejících plochou je nulový a nezávisí na volbě plochy. Na obr. 8.8 je elektrostatické pole náboje $2Q$ a $(-Q)$. Výsledný počet 8 siločar (16 pro náboj $2Q$ a 8 pro $(-Q)$) je úměrný celkovému náboji a opět nezávisí na volbě plochy.

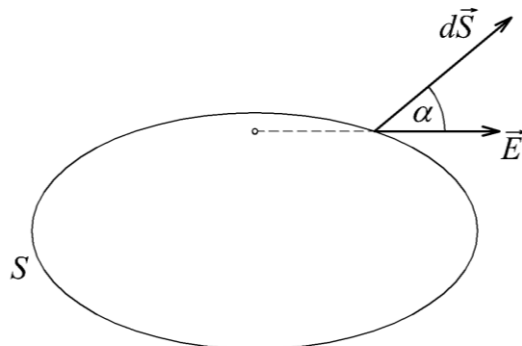


Obr. 8.8

Pro matematické vyjádření Gaussovy věty je třeba zavést veličinu tok intenzity \vec{E} plochou S . Označíme jej $N(S)$ a je definovaný

$$N(S) = \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} \quad , \quad (8.13)$$

kde $d\vec{S}$ je vektor kladné normály k elementární plošce dS (míří z plochy ven). Celkový tok vektoru intenzity \vec{E} plochou S je složen z elementárních přírůstků $dN(S) = E dS \cos \alpha$, kde $E \cos \alpha$ je průmět velikosti vektoru \vec{E} do směru kolmého k ploše dS (obr. 8.9). Pro plochu S kolmou k homogennímu poli intenzity \vec{E} je tok $N(S)$ rovný součinu ES .



Obr. 8.9

Protože intenzita je úměrná hustotě siločar (počtu siločar na jednotkovou plochu), musí být tok $N(S)$ úměrný celkovému počtu siločar procházejících plochou S . Tento závěr platí i pro obecné vyjádření toku $N(S)$ vztahem (8.13) s tím upřesněním, že některé přírůstky v integrálu budou kladné, jiné záporné, podle znaménka skalárního součinu $\vec{E} \cdot d\vec{S}$.

Jestliže vypočteme tok $N(S)$ pro bodový náboj Q umístěný ve středu kulové plochy poloměru R a tuto kulovou plochu považujeme za plochu S , pak

$$\begin{aligned} N(S) &= \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oiint_S \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^2} dS = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^2} \oiint_S dS = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^2} 4\pi R^2 = \frac{1}{\epsilon_0} Q . \end{aligned} \quad (8.14)$$

Zjistili jsme, že tok $N(S)$ je úměrný pouze náboji, nikoliv poloměru R . Počet siločar procházejících plochou S je úměrný pouze celkovému náboji, který se nalézá v objemu uzavřeném touto plochou a nezávisí na tvaru plochy. Obecně pro soustavu nábojů Q_i platí

$$N(S) = \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i Q_i \quad (8.15)$$

a to je znění **Gaussovy elektrostatické věty**. Je-li náboj v prostoru o objemu V uzavřeném plochou S rozložen spojitě, pak na pravé straně rovnice použijeme vyjádření pomocí objemové hustoty náboje

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho dV .$$

Plošný integrál na levé straně můžeme upravit pomocí věty Gaussovy – Ostrogradského na integrál objemový

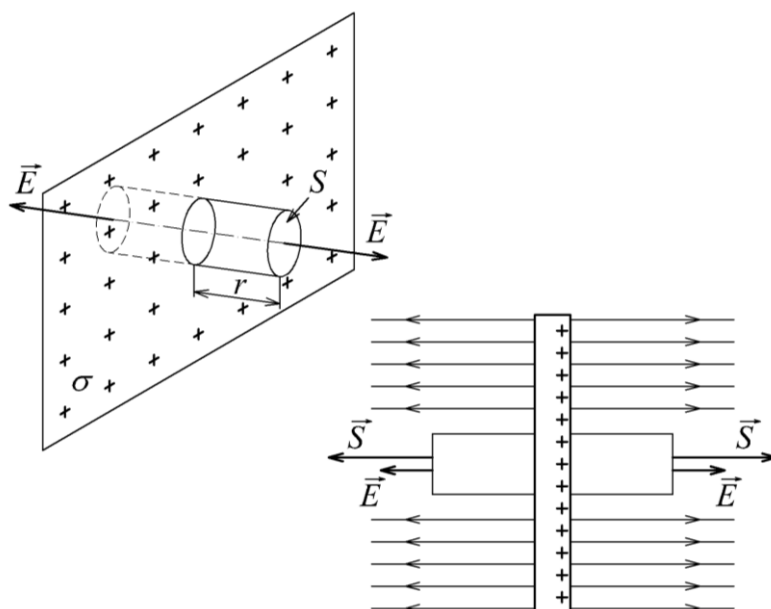
$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_V \operatorname{div} \vec{E} dV ,$$

kde na pravé straně rovnice integrujeme přes objem V , který obklopuje uzavřená plocha S . Provedeme-li tento integrální přechod a porovnáme-li integrandy na obou stranách rovnice, dostaneme diferenciální tvar Gaussovy věty

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho , \quad (8.16)$$

který umožňuje stanovit lokální hodnoty intenzity elektrického pole.

Výpočet intenzity pole nekonečně rovnoměrně nabitě roviny



Obr. 8.10

Nekonečná rovina, obr. 8.10, je nabitá rovnoměrně s plošnou hustotou náboje σ . Elektrostatické pole v okolí roviny charakterizované vektorem \vec{E} je homogenní, vektor \vec{E} je kolmý k povrchu roviny, jeho orientace je zřejmá. Jako plochu S pro integraci v Gaussově větě zvolíme válcovou plochu, jejíž orientace vyplývá z obr. 8.10.

Provedeme-li integraci $\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$ nejdříve po plášti válce, zjistíme, že tok intenzity \vec{E} je nulový, protože \vec{E} je kolmý na normálu k ploše pláště v kterémkoliv místě. Nechť podstavy válce mají každá plochu A , tok $N(S)$ oběma základnami je $N(S) = 2EA$. Podle Gaussovy věty, vztah (8.15), je

$$2EA = \sigma \frac{A}{\varepsilon_0}$$

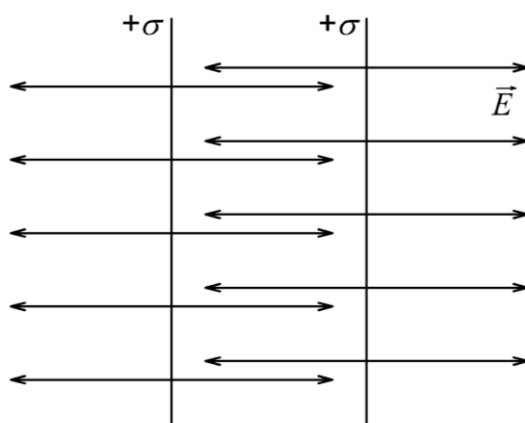
odtud vyplývá

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}, \quad (8.17)$$

kde za celkový náboj jsme dosadili součin plošné hustoty náboje a plochy vymezené válcem v nabitě rovině. Tento vztah pro intenzitu pole je možné odvodit i přímo z Coulombova zákona. Intenzita \vec{E} nekonečně rovnoměrně nabitě roviny je konstantní. Pro skutečný případ, kdy rovina není nekonečná, platí tento výsledek v oblasti dostatečně vzdálené od okraje desek.

Dvě rovnoběžné nabitě roviny

Pro dvě rovnoběžné nabitě roviny (tento výpočet se provádí při stanovení elektrostatického pole deskového kondenzátoru) použijeme pro stanovení intenzity předchozí výsledek pro jednu rovinu a uplatníme princip superpozice, abychom určili výslednou intenzitu elektrostatického pole od obou rovin. Jsou-li roviny souhlasně nabitě a plošná hustota náboje obou rovin je stejná, $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$, pak vně rovin mají intenzity \vec{E}_1 a \vec{E}_2 souhlasný směr a jejich velikosti se sčítají, naopak v mezeře mezi rovinami je pole nulové (obr. 8.11).



Obr. 8.11

Pro velikost intenzit platí

$$\text{vně rovin} \quad E = E_1 + E_2 = \frac{1}{2\varepsilon_0}(\sigma_1 + \sigma_2) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

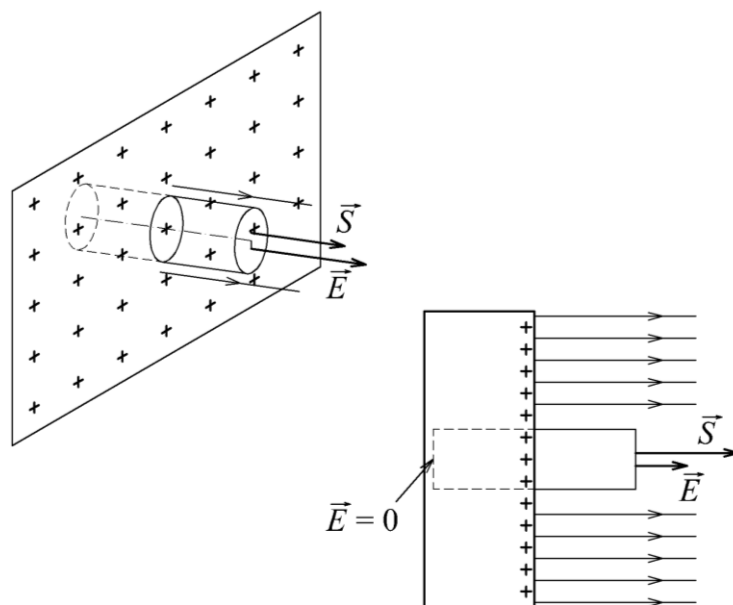
$$\text{mezi rovinami} \quad E = E_1 - E_2 = 0$$

Jsou-li roviny nabitě opačně, se stejnou hustotou σ , pak vně rovin bude pole nulové a mezi deskami je homogenní pole intenzity $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$.

S takovým uspořádáním se setkáváme u deskového kondenzátoru.

Určení intenzity elektrostatického pole na povrchu vodiče

Z Gaussovy elektrostatické věty vyplývá, že uvnitř vodiče nemohou v rovnovážném stavu existovat makroskopické náboje. Tok libovolnou uzavřenou plochou ležící uvnitř vodiče musí být vzhledem k nulovosti intenzity pole vždy nulový. Z Gaussovy věty pak plyne, že musí být nulový i náboj uzavřený v libovolné ploše ležící uvnitř vodiče. V rovnovážném stavu mohou být tedy náboje rozloženy jen na povrchu vodiče.



Obr. 8.12

Určíme nyní hodnotu intenzity elektrostatického pole v blízkosti povrchu vodiče. Zvolíme uzavřenou plochu ve tvaru velmi nízkého válce a malých podstav A , jehož osa je kolmá k povrchu vodiče a jehož jedna podstava je umístěna vně vodiče, druhá uvnitř (obr. 8.12). Vzhledem k rozměrům válce můžeme zanedbat nehomogenitu pole a nehomogenitu rozložení povrchového náboje. Uvnitř této válcové plochy je tedy uzavřen celkový náboj rovný $Q = \sigma A$, kde σ je hodnota povrchové hustoty náboje v místě válce. Tok intenzity podstavou uvnitř vodiče je nulový, tok pláštěm rovněž, neboť siločáry jsou rovnoběžné s osou válce. Zbývá tedy tok vnější podstavou vodiče rovný $N(S) = EA$. Z Gaussova zákona pak vyplývá

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} . \quad (8.18)$$

Uvedené tvrzení se někdy nazývá Coulombova věta. Pozoruhodné na něm je zejména to, že ačkoliv elektrostatické pole vně vodiče je vytvářeno celkovým rozložením nábojů na povrchu vodiče a dalších těles, je v blízkosti povrchu plně určeno lokální hodnotou hustoty náboje v daném bodě povrchu. Siločáry elektrostatického pole vcházejí zvnějšku kolmo k povrchu vodiče tam, kde je soustředěna záporná hustota náboje a vycházejí kolmo k povrchu tam, kde je soustředěna kladná hustota náboj.

Toto chování vodičů ve vnějším elektrostatickém poli má závažné praktické důsledky. Jsou-li na povrchu vodiče ostré výstupky nebo hroty, vzniká v jejich blízkosti silně nehomogenní

elektrostatické pole. Elektrické siločáry, které stále zůstávají kolmé k povrchu, zde prudce mění směr a u povrchu se zhušťují.

8.8 Potenciál elektrostatického pole

V kapitole o gravitačním poli jsme kromě vektorové veličiny – intenzity pole, zavedli skalární veličinu – **potenciál** jako další charakteristiku pole. Analogicky lze i pro elektrostatické pole, protože je polem konzervativních sil, zavést tuto veličinu. Potenciál elektrostatického pole budeme označovat φ .

Konáme-li práci proti síle elektrostatického pole, pro náboj Q a elektrostatické pole intenzity \vec{E} je $\vec{F} = Q\vec{E}$, projeví se tato práce zvýšením potenciální energie náboje. Posuneme-li náboj Q o $d\vec{l}$, je změna potenciální energie náboje v elektrostatickém poli rovna

$$dW_p = -Q\vec{E} \cdot d\vec{l} . \quad (8.19)$$

Znaménko minus vystihuje skutečnost, že se jedná o práci vnější síly, která působí proti síle pole. Jestliže náboj Q byl původně v bodě označeném 1 a změnil svoji polohu do bodu 2, celková změna potenciální energie je

$$W_{p2} - W_{p1} = \int_1^2 dW_p = -Q \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l} . \quad (8.20)$$

Potenciální energie je závislá na velikosti náboje Q , a proto zavedeme analogicky jako intenzitu \vec{E} veličinu potenciál φ tak, aby nezávisel na testovacím náboji Q , tj. položíme $Q = 1C$. Pak s použitím vztahu (8.20) pro přírůstek $d\varphi$ vyplyne vztah

$$d\varphi = \frac{dW_p}{Q} = -\vec{E} \cdot d\vec{l} . \quad (8.21)$$

Rozdíl potenciálů mezi dvěma body budeme označovat U a nazývat **elektrické napětí**. Jednotkou napětí v SI soustavě je 1 V (volt). Jestliže vztah (8.21) integrujeme, je třeba pro jednoznačné určení hodnoty potenciálu (stanovení integrační konstanty) definovat místo nulové hodnoty potenciálu. Obvykle se volí nulová hladina potenciálu i potenciální energie ve stejném místě.

Vztah (8.21) lze pomocí jednoduchých operací s vyjádřením úplných diferenciálů funkcí $\vec{E}(r)$ a $\varphi(r)$ přepsat do tvaru, který umožňuje v každém bodě elektrického pole stanovit pomocí potenciálu intenzitu elektrického pole \vec{E} . Platí relace

$$\vec{E} = -\text{grad}\varphi . \quad (8.22)$$

Se stejným vztahem pro analogické veličiny, intenzitu a potenciál gravitačního pole jsme se již setkali v kap. 2.

Elektrostatické pole je pole konzervativní. Platí tedy, že práce vykonaná po uzavřené křivce je vždy rovna nule. Přenášíme-li po takové dráze jednotkový náboj, na který působí síla rovná intenzitě pole \vec{E} , dostaneme obecný integrální vztah

$$\oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 . \quad (8.23)$$

Podle Stokesovy věty vektorové analýzy

$$\oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = \iint_S \text{rot}\vec{E} \cdot d\vec{S} = 0 , \quad (8.24)$$

kde S je libovolná plocha, která má za svou hranici křivku l . Vzhledem k tomu, že křivka l je libovolná, bude vztah (8.24) platit i pro diferenciálně malou plošku dS . Pak dostaneme diferenciální obdobu vztahu (8.23) jako

$$\text{rot}\vec{E} = 0 . \quad (8.25)$$

Elektrostatický potenciál pro pole bodového náboje

Podle vztahu (8.21) lze stanovit změnu potenciálu pomocí práce vykonané proti síle pole přenesením jednotkového náboje v poli elektrostatických sil. Elektrostatické pole je v našem případě vytvořené bodovým nábojem Q . Pole bodového náboje má ve vzdálenosti r velikost intenzity

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} .$$

Změna potenciálu $d\varphi$ při změně vzdálenosti o dr je

$$d\varphi = -\vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} dr .$$

Mezi body 1 a 2 je rozdíl potenciálu

$$\varphi_2 - \varphi_1 = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} Q \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) .$$

Jestliže definujeme, že potenciální energie i potenciál mají nulové hodnoty pro nekonečnou vzdálenost od náboje ($r_2 = \infty$), je potenciál v bodě 1 rovný $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r_1}$ a v obecné vzdálenosti r od bodového náboje Q

$$\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} . \quad (8.26)$$

Potenciál v určitém místě pole je roven práci, která je třeba vykonat proti síle pole při přemístění kladného náboje 1 C (konstantní rychlostí) z nekonečna do místa tohoto potenciálu.

Spojením bodů se stejnou hodnotou potenciálu dostaneme **ekvipotenciální plochy (hladiny)**. Pro přemístění náboje po ekvipotenciální ploše není třeba konat práci. Vyjádřením vztahu pro diferenciál $d\varphi(r)$, $\varphi = \varphi(r)$ dostaneme

$$d\varphi(r) = \frac{\partial\varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z} dz = \text{grad}\varphi \cdot d\vec{r} = -\vec{E} \cdot d\vec{r} \quad (8.27)$$

za použití vztahu (8.22). Pohybujeme-li se po ekvipotenciální ploše, je $d\varphi = 0$ a $d\vec{r}$ leží v této ploše. Pravá strana rovnice (8.27) je rovna 0, jsou-li vektory \vec{E} a $d\vec{r}$ na sebe kolmé. Proto **ekvipotenciální plochy jsou kolmé na siločáry**. Protože velikost skalárního součinu závisí na úhlu mezi vektory, lze konstatovat, že $\text{grad}\varphi$ určuje směr největšího růstu potenciálu φ .

Z nulovosti intenzity pole uvnitř vodiče plyne, že elektrostatický potenciál bude v celém objemu konstantní. Celý objem vodiče tedy tvoří ekvipotenciální objem, jeho povrch tvoří ekvipotenciální plochu. Intenzita pole je vždy kolmá k ekvipotenciální ploše, a proto bude v blízkosti vodiče vektor intenzity elektrostatického pole vždy kolmý k jeho povrchu.

Výpočet potenciálu a intenzity elektrostatického pole v okolí vodivé koule

Předpokládáme kouli poloměru R nabitou konstantní plošnou hustotou náboje σ . Naším úkolem je určit průběh potenciálu φ uvnitř a vně koule. Pro tento případ je nejjednodušší určit potenciál ze známé intenzity, kterou určíme pomocí Gaussovy věty, vztah (8.15). Za plochu, přes kterou budeme integrovat tok intenzity, vezmeme plochu koule poloměru r se středem ve středu nabité koule. Dosazením do Gaussovy věty dostaneme

$$N(S) = 4\pi r^2 E = \frac{Q}{\varepsilon_0},$$

kde Q je celkový náboj koule.

Pro body vně nabité koule je velikost intenzity $E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2},$

uvnitř $E(r) = 0,$

protože uvnitř koule je náboj nulový. Pole nabité koule má pro body $r > R$ stejný průběh jako pro bodový náboj Q , proto i průběh a velikost potenciálu budou stejné jako pro bodový náboj.

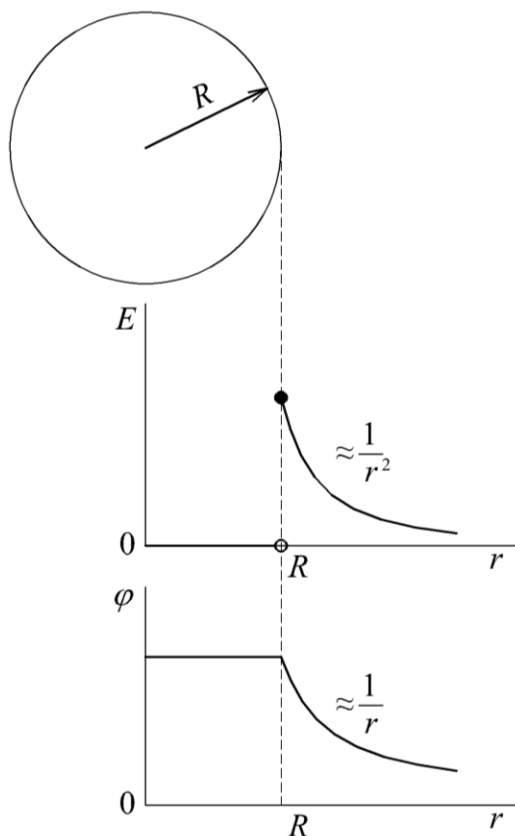
$$\varphi(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}, \quad r > R,$$

kde jsme opět položili nulovou hodnotu potenciálu v nekonečnu. Uvnitř koule je elektrické pole nulové, žádná práce by se při přemísťování náboje nekonala a potenciál je konstantní. Vzhledem k tomu, že s přibližováním k povrchu nabité koule se potenciál blíží k hodnotě

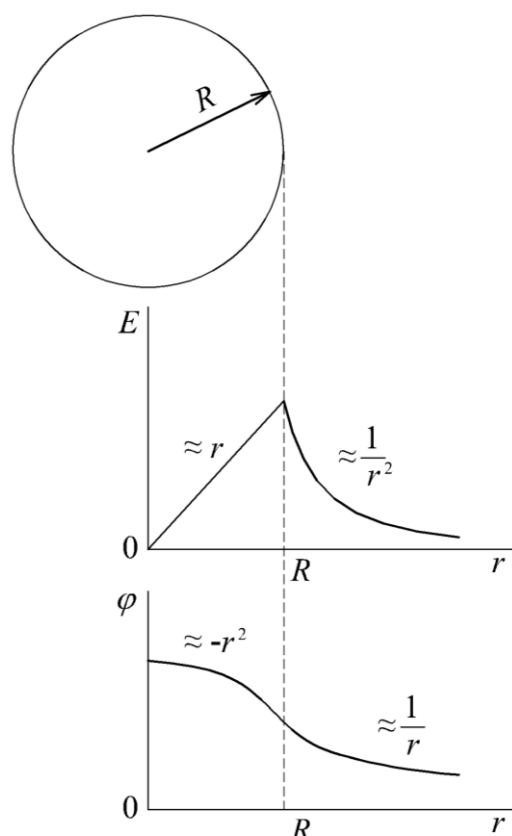
$$\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} \text{ a má-li být spojitou funkcí } r, \text{ bude uvnitř koule jeho velikost stejná a rovna } \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}.$$

Potenciál vně koule je $\varphi(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$ $r > R$,
 uvnitř $\varphi(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$ $r \leq R$.

Závislost velikosti intenzity E a potenciálu φ na r je na obr. 8.13 a.



Obr. 8.13 a



Obr. 8.13 b

Výpočet potenciálu a intenzity elektrostatického pole v okolí rovnoměrně nabité koule

Předpokládejme kouli nabitou s konstantní prostorovou hustotou náboje

$$\rho = \frac{Q}{V}, \quad V = \frac{4}{3}\pi R^3 ,$$

kde R je poloměr koule.

Pro bod vně koule můžeme použít výsledek z předchozího příkladu, protože celkový náboj koule Q je stejný. Pro bod ve vzdálenosti $r < R$ od středu použijeme pro výpočet intenzity rovněž Gaussovu větu, přičemž plochou S bude plocha koule o poloměru r ve vzdálenosti, v které počítáme intenzitu elektrického pole. Náboj, který je obsažen v objemu koule o poloměru r je Q'

$$Q' = Q \left(\frac{r}{R} \right)^3.$$

Velikost intenzity E uvnitř koule proto bude

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r}{R^3}.$$

Touto závislostí popisujeme v některých případech průběh elektrického pole v atomovém jádře, protože atomové jádro lze v určitém přiblížení považovat za rovnoměrně nabitou kouli.

Potenciál $\varphi(r)$ má pro body $r > R$ stejný průběh jako v předchozím případě pro bodový náboj, tj. ubývá s první mocninou vzdálenosti. Uvnitř nabitě koule je odlišná situace, protože velikost intenzity E není nulová, a proto potenciál nebude konstantní. Pro body uvnitř koule je rozdíl potenciálů

$$\varphi(r) - \varphi(0) = - \int_0^r \vec{E} \cdot d\vec{r} = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^r Q \frac{r}{R^3} dr = - \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} Q \frac{r^2}{R^3}.$$

Potenciál v bodě 0 nemůže být již roven nule, protože místo nulového potenciálu jsme zvolili v nekonečnu. Pro určení $\varphi(0)$ můžeme použít hodnotu potenciálu na povrchu koule

$$\varphi(R) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}.$$

Po dosazení do předchozí rovnice dostaneme

$$\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} - \varphi(0) = - \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} Q \frac{R^2}{R^3} = - \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R}$$

a

$$\varphi(0) = \frac{3}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R}.$$

Potenciál uvnitř koule tedy vyhovuje vztahu

$$\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{3Q}{2R} - \frac{Qr^2}{2R^3} \right) = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 R} \left(3 - \frac{r^2}{R^2} \right).$$

Průběh velikosti intenzity E a potenciálu φ v závislosti na vzdálenosti r od středu nabitě koule je na obr. 8.13 b.

8.9 Poissonova a Laplaceova rovnice

Vraťme se nyní k obecnému případu, kdy rozložení nábojů můžeme popsat pomocí objemové hustoty náboje $\rho(\vec{r})$. Vlastnosti elektrostatického pole jsou pak vyjádřeny parciálními diferenciálními rovnicemi (8.25) a (8.16)

$$\text{rot } \vec{E} = 0, \quad \text{div } \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho .$$

Řešení této soustavy čtyř rovnic (jedné vektorové a jedné skalární) je usnadněno zavedením potenciálu. Možnost jeho zavedení plyne právě z první z uvedených rovnic, a přejdeme-li od vektoru \vec{E} ke skalární funkci φ vztahem (8.22), bude tato první rovnice splněna automaticky. Zbývá pak řešit druhou z rovnic. Využijeme přitom vztahu, kterým se zavádí Laplaceův operátor v kartézských souřadnicích, a píšeme

$$\text{div grad } \varphi = \Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} .$$

Pro potenciál dostáváme **Poissonovu rovnici** ve tvaru

$$\Delta \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (8.28)$$

platnou všude tam, kde platí Gaussova věta v diferenciálním tvaru. V bodech, kde je objemová hustota nábojů nulová, redukuje se Poissonova rovnice na **rovnici Laplaceovu**

$$\Delta \varphi = 0 . \quad (8.29)$$

8.10 Kapacita

Jak jsme zjistili v odstavci 8.8, potenciál vodivé koule nabité nábojem Q má ve vzdálenosti r velikost $\varphi(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$. Ze vztahu vyplývá, že v kterémkoliv místě je potenciál úměrný náboji. Tato úměrnost platí pro všechny typy vodičů. Podíl náboje a potenciálu je závislý pouze na vlastnostech (geometrickém tvaru) vodiče a vlastnostech prostředí.

$$\frac{Q}{\varphi} = C . \quad (8.30)$$

Konstanta C se nazývá **kapacita vodiče**. Jednotkou kapacity je 1 F (farad). Je to kapacita vodiče, který při potenciálu 1 V má náboj 1 C. Protože 1 F je příliš velká jednotka, používají se její násobky jako 1 $\mu\text{F} = 10^{-6}$ F nebo 1 $\text{pF} = 10^{-12}$ F.

V elektrotechnice se často pracuje se součástkami s přesně určenou kapacitou, které nazýváme **kondenzátory**. Kondenzátor je tvořen dvěma opačně nabitými vodiči (jeden s nábojem Q

a druhý $-Q$). Kapacitu kondenzátoru C definujeme jako podíl kladného náboje Q a napětí mezi vodiči U

$$C = \frac{Q}{U} . \quad (8.31)$$

Pro jednoduchost zvolíme jako příklad deskový kondenzátor tvořený dvěma rovnoběžnými deskami s plochou S a vzdáleností d . Kapacitu lze stanovit pomocí Gaussovy věty (za předpokladu, že desky jsou dostatečně velké a lze zanedbat jevy na okraji desek). Pro napětí mezi deskami můžeme napsat vztah

$$U = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} d = \frac{Q}{\varepsilon_0 S} d , \quad (8.32)$$

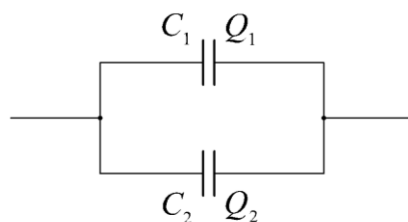
kde σ je plošná hustota náboje na deskách, $\sigma = \frac{Q}{S}$.

Pro **kapacitu deskového kondenzátoru** můžeme s použitím vztahu (8.31) psát

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d} . \quad (8.33)$$

Paralelní a sériové řazení kapacit

Na obr. 8.14 je znázorněn případ, kdy v elektrickém obvodu jsou dva kondenzátory zapojeny **paralelně**.



Obr. 8.14

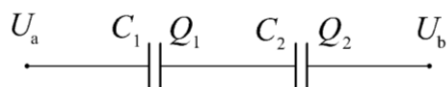
Dvě levé desky kondenzátorů a dvě pravé desky jsou spojeny dohromady na společném potenciálu. Pro výpočet výsledné kapacity soustavy si lze představit, že připojením druhého kondenzátoru se plocha zvětšila a tím se zvýšila i možnost nahromadění náboje.

$$Q = Q_1 + Q_2 = C_1 U + C_2 U = (C_1 + C_2) U ,$$

kde U je rozdíl napětí mezi deskami obou kondenzátorů a C_1, C_2 jsou kapacity kondenzátorů. Výsledná kapacita C je

$$C = \frac{Q}{U} = C_1 + C_2 . \quad (8.34)$$

Sériové zapojení kondenzátorů je na obr. 8.15.



Obr. 8.15

Potenciální rozdíl mezi levou deskou prvního kondenzátoru a pravou deskou druhého je $U = U_a - U_b$ a na obou levých deskách kondenzátorů je kladný náboj Q . Potenciální rozdíl U odpovídá součtu rozdílů napětí mezi deskami obou kondenzátorů.

$$U = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} = Q \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right).$$

Jestliže pro výslednou kapacitu C použijeme definiční vztah $C = \frac{Q}{U}$, event. $U = \frac{Q}{C}$, porováním relací pro U můžeme psát výsledný vztah pro C

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \quad (8.35)$$

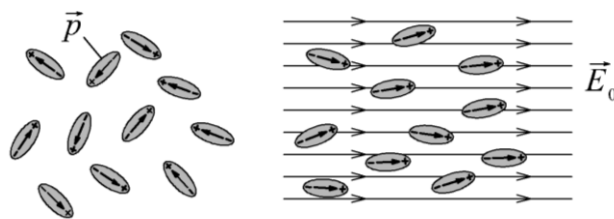
8.11 Dielektrika

M. Faraday objevil, že po vložení nevodivé látky, jako je například sklo, mezi desky kondenzátoru, kapacita kondenzátoru vzroste. Zvýšení kapacity je možné charakterizovat součinitelem, který charakterizuje dielektrické vlastnosti prostředí. Pro vysvětlení jevů v dielektriku je třeba vyjít z jeho atomární struktury.

Při makroskopickém popisu můžeme využít skutečnost, že atomy či molekuly jsou elektricky neutrální soustavy mikroskopických nábojů. Elektrostatické pole takové soustavy můžeme na vzdálenostech značně převyšujících její rozměry vyjádřit jako pole multipólových momentů různých řádů. V prvním nenulovém přiblížení se uplatní elektrický dipólový moment atomu nebo molekuly a jejich pole se bude jevit v dostatečné vzdálenosti jako pole bodového elektrického dipólu.

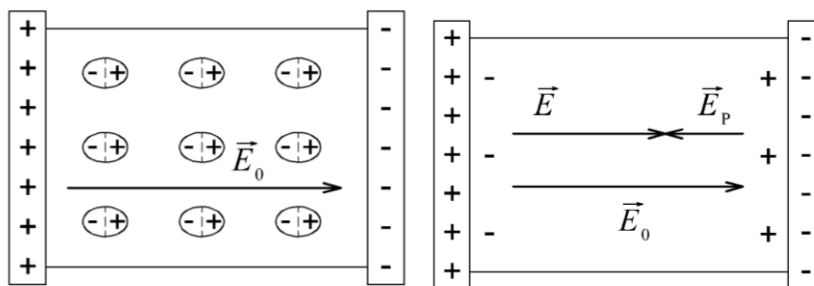
Dielektrika, jejichž molekuly mají náboje rozloženy takovým způsobem, že jako celek vykazují **vlastní** elektrický dipólový moment, patří ke skupině látek, které se nazývají **polární dielektrika** (např. molekula vody).

Dielektrika, jejichž atomy (molekuly) nemají vlastní elektrické dipólové momenty, získávají ve vnějším poli momenty indukované, orientované ve směru siločar pole. Takové látky se nazývají **nepolární dielektrika**.



Obr. 8.16

Jestliže molekuly dielektrika jsou **polární**, znamená to, že mají nenulové dipólové momenty a ty jsou za normálního stavu náhodně orientovány. V přítomnosti vnějšího elektrického pole (například vytvořeného mezi deskami kondenzátoru) se dipóly stáčí do směru pole (obr. 8.16, 8.17 a). Intenzita tohoto jevu závisí na vnějším poli a na teplotě. Výsledkem je vznik elektrostatického pole v dielektriku, které míří proti původnímu poli a tudíž jej zeslabuje (obr. 8.17 b).



Obr. 8.17 a

Obr. 8.17 b

Dokonce i v případě, kdy molekuly byly původně nepolární, vlivem vnějšího elektrického pole se z nich stanou dipóly, které se opět mohou ve vnějším poli natáčet. Jednotkový objem látky můžeme pak charakterizovat celkovým dipólovým momentem. Říkáme, že se dielektrikum **polarizovalo**. Charakteristikou uvedeného modelu je **vektor elektrické polarizace** $\vec{P}(\vec{r})$, který má význam objemové hustoty dipólového momentu v daném bodě \vec{r} . Experimentálně pozorovaný výsledný dipólový moment \vec{p}_V libovolného objemu V studovaného dielektrika pak může být vyjádřen vztahem

$$\vec{p}_V = \iiint_V \vec{P}(\vec{r}) dV .$$

Makroskopickým výsledkem polarizace dielektrika je vytvoření povrchového náboje s plošnou hustotou σ_p v blízkosti nabitých desek kondenzátoru (obr. 8.17 b).

Náboj vytvořený v dielektriku se nazývá **vázaný náboj**, protože se nemůže volně pohybovat jako náboj na deskách. Velikost intenzity elektrického pole E_p v dielektriku (předpokládáme velmi slabou vrstvu dielektrika) je pomocí plošné hustoty náboje vyjádřena

$$E_p = \frac{\sigma_p}{\epsilon_0} . \tag{8.36}$$

Výsledné pole bude mít intenzitu

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_p, \quad (8.37)$$

kde \vec{E}_0 je intenzita vnějšího elektrického pole bez dielektrika. Velikost $E_0 = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0}$, kde σ_0 je plošná hustota náboje na deskách.

Dielektrika rozdělujeme podle chování vektoru elektrické polarizace $\vec{P}(\vec{r})$. V případě **ideálně tvrdého dielektrika** předpokládáme určitou permanentní polarizaci $\vec{P}_0(\vec{r})$ v daném bodě, která již na hodnotě intenzity pole nezávisí.

V případě **ideálně měkkého dielektrika** předpokládáme lineární závislost vektoru polarizace $\vec{P}(\vec{r})$ v daném bodě na výsledné intenzitě pole \vec{E} v tomto bodě. Pro izotropní a homogenní prostředí je možno tuto závislost zapsat ve tvaru

$$\vec{P}(\vec{r}) = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}(\vec{r}), \quad (8.38)$$

kde bezrozměrná veličina χ_e je **elektrická susceptibilita prostředí**. Je to vždy kladná veličina, která však pro různé materiály může nabývat značně rozmanitých hodnot. V případě ideálně měkkého dielektrika lze psát

$$\vec{E}_0 = \epsilon_r \vec{E}, \quad (8.39)$$

kde ϵ_r je **relativní permitivita prostředí**. Hodnoty ϵ_r pro některé materiály jsou uvedeny v následující tabulce 8.1.

Tabulka 8.1

materiál	vzduch	sklo	papír	parafín	polystyren	porcelán	voda (20°C)
ϵ_r	1,00059	5,6	3,7	2,1–2,5	2,55	7	80

Zavedme nyní konstantu ϵ vztahem

$$\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r. \quad (8.40)$$

Tato konstanta se nazývá **permitivita prostředí**.

Veličina, která souvisí s intenzitou elektrického pole vztahem

$$\vec{D}(\vec{r}) = \epsilon_0 \vec{E}(\vec{r}) + \vec{P}(\vec{r}) \quad (8.41)$$

je **elektrická indukce**. Její význam pro popis elektrického pole vyplyne při zavedení **indukčního toku**, který závisí pouze na volném náboji Q^* , nikoliv na náboji v dielektriku.

$$\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q^* \quad (8.42)$$

Volný náboj je zdrojem indukčního toku. Vztah (8.42) je zároveň jednoduchým zněním Gaussovy věty pro dielektrikum. Jednotka elektrické indukce je $C \cdot m^{-2}$.

Pro ideálně měkké dielektrikum můžeme vztah (8.41) přepsat pomocí vztahů (8.38) a (8.39) na vyjádření

$$\vec{D}(\vec{r}) = \varepsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{E}(\vec{r}) . \quad (8.43)$$

Mezi relativní permitivitou ε_r a elektrickou susceptibilitou χ_e platí vztah

$$\varepsilon_r = 1 + \chi_e . \quad (8.44)$$

Pak lze vztah (8.43) přepsat na tvar

$$\vec{D}(\vec{r}) = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}(\vec{r}) = \varepsilon \vec{E}(\vec{r}) . \quad (8.45)$$

Na počátku tohoto odstavce jsme uvedli, že po vložení dielektrika mezi desky kondenzátoru dojde ke zvýšení jeho kapacity. Kromě tohoto efektu dielektrikum zabezpečuje mechanické oddělení dvou vodičů, které vzhledem k požadované kapacitě musí být v těsné vzdálenosti. Dále, elektrická pevnost, což je odolnost materiálu vzhledem k průrazu, je u dielektrik větší než pro vzduch, kde činí asi $3 \text{ kV} \cdot \text{mm}^{-1}$.

8.12 Energie elektrostatického pole

V procesu nabíjení kondenzátoru (například baterie) je třeba přenést kladný náboj ze záporně nabitého vodiče na kladný. Na počátku nabíjení je elektrické pole nulové a vodiče jsou na stejném potenciálu. Po skončení nabíjení je na jednom vodiči kladný náboj Q_0 , na druhém záporný $-Q_0$. Potenciální rozdíl mezi vodiči je $U_0 = \frac{Q_0}{C}$, kde C je kapacita. Práce dW , kterou je třeba vynaložit v průběhu nabíjení k přenesení náboje dQ z jednoho vodiče na druhý (je-li již přenesen náboj Q a potenciální rozdíl mezi vodiči je U), je rovna zvýšení potenciální energie náboje dQ o dW_p . Pro dW_p platí vztah

$$dW_p = U dQ = \frac{Q}{C} dQ .$$

Celkové zvýšení potenciální energie při nabíjení od $Q = 0$ do $Q = Q_0$ je energie, která se akumuluje v kondenzátoru

$$W_p = \int_0^{Q_0} dW_p = \int_0^{Q_0} \frac{Q}{C} dQ = \frac{1}{C} \int_0^{Q_0} Q dQ = \frac{1}{2} \frac{Q_0^2}{C} .$$

S použitím relací mezi Q , U , C můžeme získat vztahy

$$W_p = \frac{1}{2} \frac{Q_0^2}{C} = \frac{1}{2} Q_0 U_0 = \frac{1}{2} C U_0^2 . \quad (8.46)$$

V procesu nabíjení kondenzátoru se mezi deskami vytváří elektrostatické pole. Práce potřebná k nabití kondenzátoru (zanedbáme-li ztráty energie během nabíjení) je rovna práci potřebné k vytvoření pole. Uvažujme konkrétní případ deskového kondenzátoru, mezi jehož deskami se vytvoří elektrostatické pole s velikostí intenzity $E = \frac{Q}{\varepsilon_0 S}$, S je plocha desky.

Práce potřebná pro přenesení náboje dQ z jedné desky na druhou je

$$dW = Ed \, dQ ,$$

kde d je vzdálenost mezi deskami. Dosadíme-li za dQ do předchozího vztahu

$$dQ = \varepsilon_0 S \, dE ,$$

pak

$$dW = \varepsilon_0 S E d \, dE .$$

Celková práce potřebná pro vytvoření pole s velikostí intenzity od $E = 0$ do $E = E_0$ je

$$W = \varepsilon_0 S d \int_0^{E_0} E \, dE = \frac{1}{2} \varepsilon_0 S d E_0^2$$

a je rovna energii akumulované v elektrostatickém poli.

Hustota energie elektrostatického pole w , která je definovaná jako $w = \frac{dW}{dV}$ (v homogenním poli platí $w = \frac{W}{V}$), se v případě elektrostatického pole ve vakuu dá vyjádřit vztahem

$$w = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E_0^2 . \quad (8.47)$$

V látkovém prostředí vztah (8.47) přejde ve vztah

$$w = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D} , \quad (8.48)$$

který je platný i pro anizotropní prostředí, kde vektory \vec{E} a \vec{D} nemají stejný směr (vztah (8.41) v případě ideálně tvrdého dielektrika).

8.13 Příklady ke kap. 8

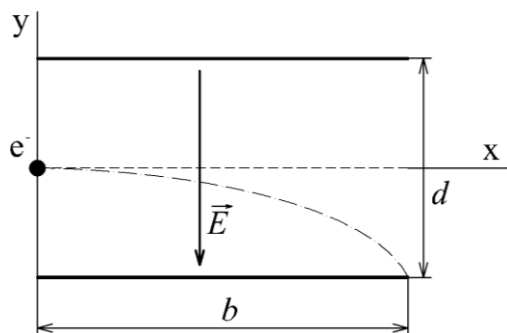
Příklad 8.1

Svazek elektronů byl urychlen spádem napětí $U_1 = 5000 \text{ V}$, letí doprostřed mezi destičky rovinného kondenzátoru, jehož rozměry jsou: délka $b = 5 \text{ cm}$ a vzdálenost destiček $d = 1 \text{ cm}$.

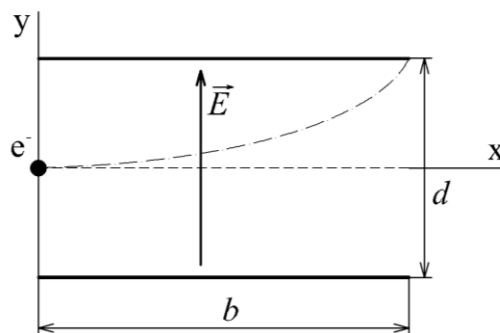
Vypočítejte:

nejmenší napětí U , které je nutno vložit na kondenzátor, aby elektrony už z něho nevyletěly?

Řešení:



Obr. 8.18 a



Obr. 8.18 b

Pohyb elektronů se odehrává pouze v rovině xy podle nákresu na obrázku 8. 18 a. Zapišeme pohybové rovnice

$$m_e a_x = 0 \Rightarrow a_x = 0$$

$$m_e a_y = eE + m_e g$$

$$m_e a_y = e \frac{U}{d} + m_e g \Rightarrow a_y = \frac{eU}{md} + g$$

$$v_x = \text{konst} = v_{x0} = \sqrt{\frac{2eU_1}{m_e}}, \text{ protože před vletnutím elektronu do kondenzátoru je urychlen}$$

napětím U_1 a platí $\frac{1}{2} m_e v^2 = eU_1$ (rychlost je pouze ve směru osy x)

$$v_y = \left(\frac{eU}{m_e d} - g \right) t, (v_{y0} = 0)$$

$$x = \sqrt{\frac{2eU_1}{m_e}} t$$

$$x = b \Rightarrow t = b \sqrt{\frac{m_e}{2eU_1}}$$

$$y = \frac{1}{2} \left(\frac{eU}{m_e d} + g \right) t^2$$

V čase $t = b \sqrt{\frac{m_e}{2eU_1}}$ musí elektron v mezním případě dosáhnout desky kondenzátoru, a tedy

$$\frac{d}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{eU}{m_e d} + g \right) b^2 \frac{m_e}{2eU_1}$$

$$d = \frac{Ub^2}{2U_1 d} + \frac{gm_e b^2}{2eU_1} \Rightarrow U = \frac{2d^2}{b^2} U_1 + \frac{gm_e d}{e}$$

Zvolíme-li na deskách kondenzátoru opačně orientované napětí U (pohyb elektronů je zobrazen na obrázku 8.18 b), konečný vztah se změní na

$$U = \frac{2d^2}{b^2} U_1 - \frac{gm_e d}{e}$$

Nejprve dosadíme do vztahu s plus

$$U = \frac{2 \cdot (1 \cdot 10^{-4})^2}{(5 \cdot 10^{-4})^2} \cdot 5 \cdot 10^3 + \frac{9,81 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 1 \cdot 10^{-4}}{1,602 \cdot 10^{-19}} = (400 + 5,57 \cdot 10^{-12}) \text{ V}$$

Je vidět, že druhý člen, který souvisí s tíhovou silou, je mnohonásobně menší než člen, který souvisí se silou elektrostatickou. Proto ho lze zanedbat a napětí, které se vloží na kondenzátor, aby elektrony kondenzátor neopustily, bude v obou případech orientace napětí stejné, $U = 400 \text{ V}$.

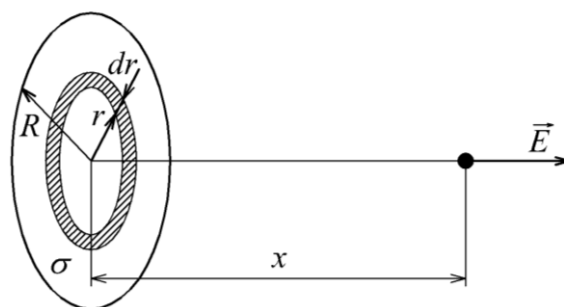
Příklad 8.2

Tenký kruhový disk o poloměru R je rovnoměrně nabit nábojem o plošné hustotě σ .

Vypočítejte:

velikost intenzity elektrického pole E na ose disku ve vzdálenosti x od jeho středu.

Řešení:



Obr. 8.19

Celý disk lze rozřezat na prstence, které mají středy ve středu disku (obr. 8.19). Pro jednotlivý prstenek můžeme využít vztah pro intenzitu elektrického pole na ose disku, který jsme již vypočetli. Náboj na disku ale není celý náboj Q , ale pouze částečný náboj dQ , a tak příspěvek k celkové intenzitě elektrického pole od jednotlivého prstence je dán výrazem

$dE = dE_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{(x^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} dQ$, kde r je vzdálenost prstence od středu disku.

$$dQ = \sigma 2\pi r dr$$

$$E = E_x = \int_0^R \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{x\sigma 2\pi r dr}{(x^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x\sigma}{2\epsilon_0} \int_0^R \frac{r dr}{(x^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x\sigma}{2\epsilon_0} \left[-\frac{1}{(x^2 + r^2)^{\frac{1}{2}}} \right]_0^R =$$

$$= \frac{x\sigma}{2\epsilon_0} \left(-\frac{1}{(x^2 + R^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{x} \right) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{x}{(x^2 + R^2)^{\frac{1}{2}}} \right)$$

Příklad 8.3

Náboj Q je rovnoměrně rozložen v objemu koule o poloměru R .

Vypočítejte:

- energií elektrického pole uvnitř koule,
- vně koule,
- v celém prostoru.

Řešení:

Energie elektrického pole je dána výrazem

$$W = \iiint_V w dV = \iiint_V \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 dV$$

Intenzita elektrického pole je konstantní v malém objemu, který je vymezen dvěma sousedními kulovými slupkami.

$$dV = 4\pi r^2 dr$$

$$a) \quad E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r}{R^3}$$

$$W = \iiint_V \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 dV = \int_0^R \frac{1}{32} \frac{Q^2 r^2}{\pi^2 \epsilon_0 R^6} 4\pi r^2 dr = \left[\frac{1}{40} \frac{Q^2 r^5}{\pi \epsilon_0 R^6} \right]_0^R = \frac{1}{40} \frac{Q^2}{\pi \epsilon_0 R}$$

$$b) \quad E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}$$

$$W = \iiint_V \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 dV = \int_R^\infty \frac{1}{32} \frac{Q^2}{\pi^2 \epsilon_0 r^4} 4\pi r^2 dr = \left[-\frac{1}{8} \frac{Q^2}{\pi \epsilon_0 r} \right]_R^\infty = \frac{1}{8} \frac{Q^2}{\pi \epsilon_0 R}$$

$$c) \quad W = \frac{1}{40} \frac{Q^2}{\pi \epsilon_0 R} + \frac{1}{8} \frac{Q^2}{\pi \epsilon_0 R} = \frac{3}{20} \frac{Q^2}{\pi \epsilon_0 R}$$

9. Ustálený elektrický proud

Dosud jsme popisovali elektrické pole, které nebylo tvořeno pohybujícími se náboji. Nyní se budeme zabývat tím, co nastane, když se elektrické náboje budou pohybovat.

9.1 Vznik a definice proudu

Elektrické proudy se vyskytují všude kolem nás. Každý jistě zná elektrický proud v elektroinstalaci, žárovkách a v elektrických spotřebičích. Elektrické proudy lze nalézt také v polovodičových součástkách kalkulaček a mobilních telefonů. Přestože jakýkoli elektrický proud je tvořen proudem pohybujících se nábojů, ne všechny pohybující se náboje vytvářejí elektrický proud.

Elektrický proud může být tvořen pohybujícími se elektrony (kovový vodič), ionty a elektromy (elektrolyty, obloukový výboj ve zředěném plynu), elektrony a dírami (polovodiče). V této kapitole budeme studovat elektrický proud v kovovém vodiči.

Umístíme-li kovový vodič do elektrického pole, uvedou se vnitřní volné elektrony do pohybu. Pohybují se tak dlouho, dokud elektrické pole vytvořené jejich přenosem nebude mít stejnou velikost a opačný směr, než má vnější elektrické pole.

Připojíme-li k vodiči zdroj elektrického napětí, budou se elektrony pohybovat stále. Usměrněný pohyb elektronů vytváří v kovovém vodiči elektrický proud.

Elektrický proud I je definován jako podíl přeneseného náboje dQ za čas dt

$$I = \frac{dQ}{dt}. \quad (9.1)$$

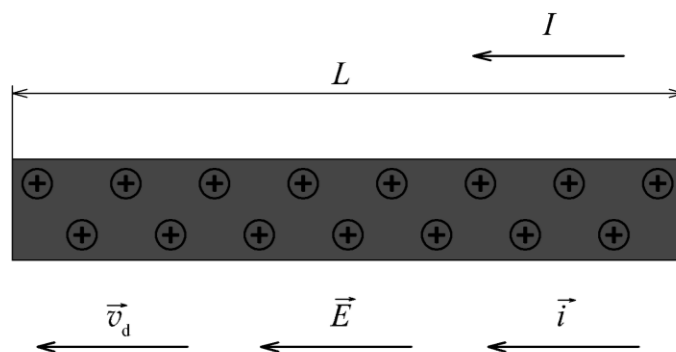
Jednotkou elektrického proudu je jeden ampér (A). Ampér je základní jednotka SI. Definicí ampéru uvedeme v kapitole týkající se magnetického pole. Proud je veličina skalární.

V některých případech nás nezajímá celkový proud, který prochází vodičem, ale zajímá nás lokální pohled. Pak studujeme tok náboje v určitém bodě uvnitř vodiče. V obecném případě nemusí být pohyb nábojů v různých místech průřezu vodiče stejný. Pro popis pohybu nosičů náboje zavedeme vektorovou veličinu **hustota proudu** \vec{i} vztahem

$$dI = \vec{i} \cdot d\vec{S}, \quad (9.2)$$

kde $|d\vec{S}|$ je plocha, kterou prochází náboj dQ a směr vektoru $d\vec{S}$ je směr kladné normály k ploše.

Jestliže vodičem neprochází žádný proud, pohybují se jeho vodivostní elektrony chaoticky a nepřevládá výsledný pohyb v žádném směru. Pokud vodičem prochází proud, pohybují se elektrony také chaoticky, ale navíc jsou unášeny **driftovou rychlostí** \vec{v}_d ve směru opačném, než je směr intenzity elektrického pole, které vyvolává jejich pohyb.



Obr. 9.1

Podle konvence bereme jako určující pohyb kladných nábojů nikoliv elektronů. Na obrázku 9.1 je znázorněn pohyb podle této konvence (kladné náboje). Předpokládejme, že všechny náboje se pohybují stejnou driftovou rychlostí \vec{v}_d a že hustota proudu \vec{i} je konstantní v celém průřezu vodiče, jehož plocha je S . Počet nosičů náboje v části vodiče o délce L je nLS , kde n je koncentrace nosičů náboje (počet nosičů náboje v jednotkovém objemu). Pokud nese každý nosič náboj e , je celkový náboj v úseku vodiče délky L

$$Q = nSLe .$$

Dobu τ , za kterou projde celkový náboj Q úsekem vodiče délky L , lze určit pomocí driftové rychlosti $\tau = \frac{L}{v_d}$. Za předpokladu rovnoměrného pohybu nosičů náboje určíme elektrický proud I procházející vodičem podle rovnice (9.1)

$$I = \frac{Q}{\tau} = \frac{nSLe}{\frac{L}{v_d}} = nSev_d .$$

Pomocí definice hustoty proudu lze psát

$$i = nev_d .$$

Stejný vztah platí mezi vektory hustota proudu a driftová rychlost

$$\vec{i} = ne\vec{v}_d . \tag{9.3}$$

9.2 Ohmův zákon

Uvažujme stacionární proud v homogenním vodiči. Elektrické pole může být příčinou přemísťování volných nábojů ve vodiči, tedy příčinou vzniku elektrického proudu. Lze tedy očekávat, že mezi velikostí intenzity elektrického pole (nebo mezi velikostí rozdílu potenciálu U) a velikostí proudu I v daném okamžiku bude existovat vztah, který bude záviset na vlastnostech užitého vodiče. Tento vztah se nazývá **Ohmův zákon v integrálním tvaru**.

Píšeme jej ve tvaru

$$U = RI, \quad (9.4)$$

kde R je elektrický odpor homogenního vodiče. Pro vodič délky l a průřezu S závisí odpor vodiče na materiálu, ze kterého je zhotoven. Tato závislost je dána výrazem

$$R = \rho \frac{l}{S}, \quad (9.5)$$

kde ρ je rezistivita (dříve měrný odpor) materiálu. Jednotka rezistivity je $\Omega \cdot \text{m}$ a její rozměr je roven $[\rho] = \text{m}^3 \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^{-3} \cdot \text{A}^{-2}$.

Pokud budeme uvažovat velmi malou část vodiče, pro napětí ΔU mezi dvěma ekvipotenciálními plochami S_1, S_2 vzdálenými od sebe o Δl platí

$$\Delta U = \varphi_1 - \varphi_2 = \vec{E} \cdot \Delta \vec{l}.$$

Proud I tekoucí vodičem lze vyjádřit pomocí hustoty proudu \vec{i} , $I = \vec{i} \cdot \vec{S}$. Dosadíme-li výrazy pro napětí a proud do vztahu (9.4) a uvážíme-li, že vektory \vec{E} a \vec{i} jsou kolmé k ploše \vec{S} , dostaneme **diferenciální tvar Ohmova zákona**

$$\vec{i} = \gamma \vec{E}, \quad (9.6)$$

kde materiálová konstanta $\gamma = \frac{1}{\rho}$ se nazývá konduktivita (měrná vodivost). Jednotka vodivosti je $\Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$ a její fyzikální rozměr $[\gamma] = \text{m}^{-3} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^3 \cdot \text{A}^2$

Materiály lze podle velikosti rezistivity rozdělit na vodiče, polovodiče a izolanty. Kovy, které jsou dobrými vodiči elektrického proudu, mají hodnotu rezistivity ($10^{-7} - 10^{-8}$) $\Omega \cdot \text{m}$. Pro izolanty je hodnota rezistivity v rozmezí ($10^6 - 10^{16}$) $\Omega \cdot \text{m}$. U polovodičů rezistivita silně závisí na čistotě materiálu a nabývá hodnot v intervalu ($10^{-6} - 10^7$) $\Omega \cdot \text{m}$. Rezistivity některých látek jsou uvedeny v tab. 9.1

Tabulka 9.1

Vodiče		Izolanty	
látka	$\rho [10^{-6} \Omega \cdot \text{m}]$	látka	$\rho [\Omega \cdot \text{m}]$
hliník	0,024	keramika	$10^9 \div 10^{15}$
konstantan	0,5	parafin	10^{16}
měď	0,015	porcelán	10^{10}
ocel	0,1	sklo	$10^{11} \div 10^{12}$
stříbro	0,015	teflon	10^{14}

Prozatím jsme uvažovali pouze vodič. Pokud pro prvek elektrického obvodu je R ve vztahu (9.4) konstantní (závislost proudu na napětí je lineární) pro jakékoli napětí a jakýkoli proud, pak se tato součástka řídí Ohmovým zákonem a nazývá se **lineární**. Existují i součástky, pro které R ve vztahu (9.4) není konstantní (např. diody) – závislost proudu na napětí není lineární. Takovým součástkám se říká **nelineární**.

Elektrický odpor lineárních prvků (řídících se Ohmovým zákonem) závisí na teplotě lineárně $R = R_0 [1 + \alpha(t - t_0)]$, α je teplotní součinitel elektrického odporu ($[\alpha] = \text{K}^{-1}$), který můžeme považovat za konstantu v širokém rozmezí teplot. R_0 je elektrický odpor při teplotě t_0 a R je odpor při teplotě t .

9.3 Elektromotorické napětí

Dosud jsme se zabývali vlastnostmi stacionárního proudu ve vodiči v souvislosti s vlastnostmi příslušného elektrického pole. Existenci stacionárního proudu jsme předpokládali a nestarali se o podmínky, za kterých stacionární proud vzniká. Věnujme se nyní této otázce.

Nechť stacionární elektrické pole je způsobeno zdrojem, který umožní mezi dvěma místy např. A, B udržovat konstantní napětí U_{AB} . Zdroje tohoto napětí jsou založeny na různých principech (dynamo, galvanický článek, akumulátor, termočlánek,...). Společným znakem zdrojů je existence mechanismu, způsobujícího ustálené přenášení nosičů elektrického náboje ve zdroji jinou silou než elektrostatičnou. Tato síla se nazývá **elektromotorická** a značí se \vec{F}^* . (Někdy se také používá termín síla vtištěná). Působení elektromotorické síly na nosiče náboje Q uvnitř zdroje lze vyjádřit pomocí intenzity elektrického pole

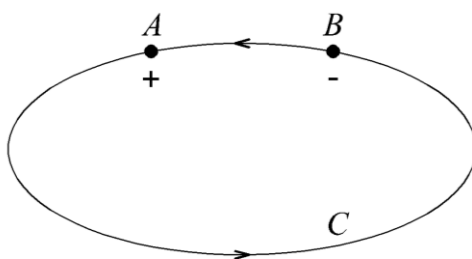
$$\vec{E}^* = \frac{\vec{F}^*}{Q}, \quad (9.7)$$

kteřá by vyvolala stejný účinek.

Uvažujme obvod (obr. 9.2), ve kterém je mezi body A, B udržováno zdrojem stálé napětí. Část obvodu je vytvořena vodičem, který spojuje svorky zdroje A (kladná), B (záporná). Pohyb volných nábojů ve vodiči je způsoben stacionárním elektrickým polem o intenzitě \vec{E}_s . Napětí mezi body A, B je dáno křivkovým integrálem

$$U_{AB} = \int_A^B \vec{E}_s \cdot d\vec{l}, \quad (9.8)$$

kde $d\vec{l}$ je část křivky tvořící obvod.



Obr. 9.2

V části obvodu B, A (zdroj) působí na volné náboje dvě elektrická pole. Elektromotorické pole o intenzitě \vec{E}^* , které způsobuje přenos nábojů z bodu B do bodu A , a stacionární elektrické pole intenzity \vec{E}_s , které je dáno rozdílem potenciálů bodů A, B . Integrál z intenzity

elektrického pole přes celou uzavřenou křivku C je možno určit jako součet integrálů přes část A, B a část B, A

$$\begin{aligned}\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} &= \int_{AB} \vec{E}_s \cdot d\vec{l} + \int_{BA} (\vec{E}_s + \vec{E}^*) \cdot d\vec{l} = \\ &= \int_{AB} \vec{E}_s \cdot d\vec{l} + \int_{BA} \vec{E}_s \cdot d\vec{l} + \int_{BA} \vec{E}^* \cdot d\vec{l} \\ \int_{AB} \vec{E}_s \cdot d\vec{l} &= - \int_{BA} \vec{E}_s \cdot d\vec{l} = U_{AB} \\ \int_{AB} \vec{E}_s \cdot d\vec{l} + \int_{BA} \vec{E}_s \cdot d\vec{l} &= \oint_C \vec{E}_s \cdot d\vec{l} = 0 .\end{aligned}\quad (9.9)$$

Elektrony se pohybují, ale v určitém objemu zůstává jejich počet konstantní. Platí tedy

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{BA} \vec{E}^* \cdot d\vec{l} . \quad (9.10)$$

Veličina

$$\mathcal{E} = \int_{BA} \vec{E}^* \cdot d\vec{l} \quad (9.11)$$

se nazývá **elektromotorické napětí zdroje**. Vyjadřuje práci elektromotorické síly \vec{F}^* vykonanou při přenášení jednotkového náboje uvnitř zdroje od záporné svorky ke kladné. Proud tekoucí obvodem závisí na odporu R vodiče mezi body A, B .

$$I = \frac{U_{AB}}{R} = \frac{1}{R} \int_{AB} \vec{E}_s \cdot d\vec{l} . \quad (9.12)$$

Uvažujeme-li vnitřní odpor zdroje R_i , platí analogický vztah k (9.12)

$$I = \frac{1}{R_i} \int_{BA} (\vec{E}_s + \vec{E}^*) \cdot d\vec{l} = \frac{1}{R_i} \int_{BA} \vec{E}_s \cdot d\vec{l} + \frac{1}{R_i} \int_{BA} \vec{E}^* \cdot d\vec{l} = -\frac{RI}{R_i} + \frac{\mathcal{E}}{R_i} . \quad (9.13)$$

Z posledního výrazu (9.13) po algebraické úpravě plyne vztah pro elektromotorické napětí

$$\mathcal{E} = (R + R_i) I . \quad (9.14)$$

Rovnice (9.14) vyjadřuje **Ohmův zákon pro uzavřený obvod**. Můžeme ji přepsat na výraz

$$\mathcal{E} = U_{AB} + R_i I , \quad (9.15)$$

kde U_{AB} je **svorkové napětí** (je to napětí na zatíženém zdroji).

9.4 Kirchhoffovy zákony

Tímto označením rozumíme dva zákony, které jsou východiskem při řešení libovolně složitých elektrických obvodů.

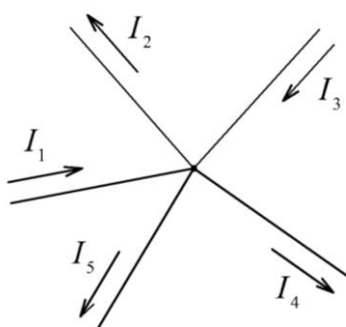
1. Kirchhoffův zákon se týká celkového proudu vytékajícího ze styčného místa několika vodičů – uzlu (obr. 9.3). Platí vztah

$$\sum_{k=1}^N I_k = 0, \quad (9.16)$$

kteřý představuje matematické vyjádření 1. Kirchhoffova zákona.

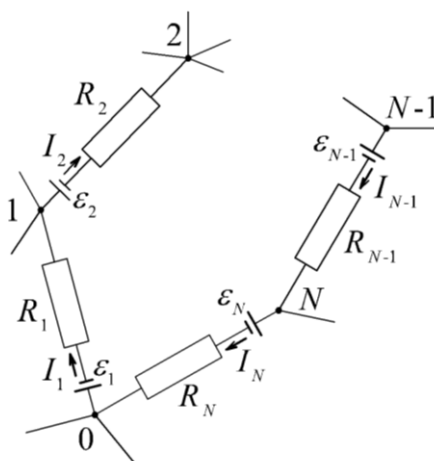
Celkový stacionární proud vytékající z libovolného uzlu je roven nule. (Součet proudů z uzlu vytékajících se rovná součtu proudů vtékajících do uzlu.)

(Je třeba znaménkem rozlišovat proudy vtékající do uzlu a vytékající z uzlu ven.)



Obr. 9.3

2. Kirchhoffův zákon je důsledkem platnosti Ohmova zákona pro libovolnou smyčku vytvořenou z vodičů libovolně složitě elektrického obvodu. Příklad takové smyčky je na obrázku 9.4.



Obr. 9.4

Platí vztah

$$\sum_{k=1}^N \mathcal{E}_k = \sum_{k=1}^N R_k I_k, \quad (9.17)$$

kteřý představuje matematické vyjádření 2. Kirchhoffova zákona.

Součet úbytků napětí na všech prvcích ve smyčce je roven celkovému elektromotorickému napětí působícímu ve smyčce.

9.5 Práce a výkon v elektrickém obvodu, Jouleův zákon

Uvažujme část vodiče, na které je potenciálový spád U . Vodičem se pohybují elektrony, které nesou náboj o velikosti dQ . Elektrony jsou elektrickým polem urychlovány a získají energii

$$dW = dQU = I dtU. \quad (9.18)$$

Elektrony interagují s mřížkou a část své energie jí předávají. Tím se zvětšuje vnitřní energie materiálu. Vodič se zahřívá a dochází k přenosu tepla z vodiče do okolí. Je to nevratný proces (**disipace energie**).

Energii potřebnou k udržování proudu I ve vodiči určuje experimentálně nalezený **Jouleův zákon**:

Ve vodiči protékaném proudem vzniká teplo (Jouleovo teplo). Tepelný výkon P vznikající ve vodiči protékaném proudem I , na němž je potenciálový spád U , určuje vztah

$$P = UI. \quad (9.19)$$

Vztah (9.19) se nazývá Jouleův zákon v **integrálním tvaru**.

Pro prvky, pro které platí Ohmův zákon, lze vztah (9.19) vyjádřit také ve tvarech

$$\begin{aligned} P &= \frac{U^2}{R} \\ P &= RI^2. \end{aligned} \quad (9.20)$$

Jouleův zákon lze psát také v **diferenciálním tvaru**

$$p = \vec{E} \cdot \vec{i}, \quad (9.21)$$

kde p je hustota výkonu $p = \frac{dP}{dV}$.

Energie dodaná látce za čas t je dána integrálem

$$W = \int_0^t P d\tau = \int_0^t UI d\tau. \quad (9.22)$$

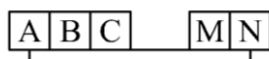
9.6 Kontaktní napětí a termoelektrické jevy v kovech

Pro elektrickou vodivost fyzikálně homogenních pevných látek je charakteristická velmi dobrá platnost Ohmova zákona až do velmi vysokých hodnot elektrického pole. Chování fyzikálně nehomogenních soustav naopak ve většině případů nelze popsat jen hodnotou elektrické vodivosti, neboť se v takových soustavách uplatňuje působení vtištěných elektromotorických sil.

Jedním z důležitých jevů tohoto druhu je existence **kontaktních napětí** mezi kovy při jejich vzájemném styku. Volta zjistil, že při dotyku dvou různých kovů vzniká mezi nimi samovolně potenciálový rozdíl. Tento potenciálový rozdíl se nazývá kontaktní napětí. Jeho velikost je závislá na druhu kovů a jejich teplotě. Tato teplotní závislost je příčinou vzniku **termoelektrických jevů**. Volta sestavil jednotlivé kovy do řady, v níž se každý kov při styku s libovolným dalším kovem nabíjí kladně. (Napětí je řádově mV). Tato řada obsahuje kovy:

+ Al, Zn, Sn, Cd, Pb, Sb, Bi, Hg, Fe, Cu, Ag, Au, Pt, Pd –

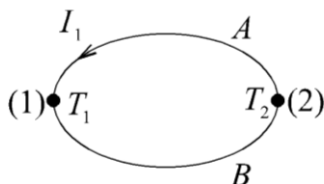
Volta dále zjistil, že velikost kontaktního napětí řady složené z většího počtu kovů (obr. 9.5) není závislá na počtu a druhu vnitřních členů řady. Závisí pouze na chemickém složení prvního a posledního kovu A, N v řadě.



Obr. 9.5

Tento jev nelze využít jako zdroj elektrického proudu, protože v uzavřeném obvodu se kontaktní napětí navzájem vyruší. Tento závěr platí, pokud je teplota obou dotyků stejná.

Uvažujme obvod (obr. 9.6) zhotovený ze dvou kovů A a B spojených v místech (1) a (2). Budou-li mít celý obvod stejnou teplotu, nepoteče obvodem proud. Budou-li se ale spoje (1) a (2) udržovat na rozdílných teplotách T_1 , T_2 , obvodem bude proud protékat. Tento jev se nazývá termoelektrický **Seebeckův jev**. Velikost protékajícího proudu je závislá na druhu obou kovů a na velikosti teplotního rozdílu obou spojů.



Obr. 9.6

Vznik Seebeckova jevu lze vysvětlit na základě teplotní závislosti kontaktního napětí.

Předpokládejme, že kontaktní napětí je funkcí teploty $U_{AB} = U_{AB}(T)$ a označme symbolem R celkový odpor obvodu. Pak je proud I tekoucí obvodem dán vztahem

$$I = \frac{U_{AB}(T_1) - U_{AB}(T_2)}{R}. \quad (9.23)$$

Celkové elektromotorické napětí \mathcal{E}_s působící v obvodu se nazývá Seebeckovým elektromotorickým napětím a je rovno rozdílu kontaktních napětí obou spojů

$$\mathcal{E}_k = U_{AB}(T_1) - U_{AB}(T_2). \quad (9.24)$$

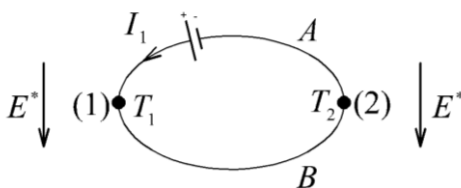
Termoelektrické napětí je pro většinu dvojic kovů relativně malé a z dodané tepelné energie se pro přímou přeměnu využívá asi 1% – 3%. Proto termočlánky nemají význam jako technické zdroje proudu, ale využívaly se a využívají se pro měření teploty.

Závislost termoelektrického napětí \mathcal{E} na teplotě (v Celsiově stupnici) je možné s dostatečnou přesností aproximovat kvadratickou závislostí

$$\mathcal{E} = \sigma_1 t + \sigma_2 t^2. \quad (9.25)$$

Parametry σ_1 , σ_2 je třeba pro každý termočlánek určit měřením.

Inverzním jevem k Seebeckovu jevu je **Peltierův jev**. Vzniká v obvodu (obr. 9.7), který je také zhotoven ze dvou různých kovů A a B, a do něhož je zařazen vnější zdroj elektromotorického napětí \mathcal{E} . Vnější zdroj vybudí v obvodu proud I a při jeho průchodu se bude teplota jednoho spoje zvyšovat a druhého snižovat. Bude-li proud procházet směrem naznačeným na obrázku 9.7, bude teplota spoje (2) vyšší než teplota spoje (1). Využití Peltierových článků je rozmanité, např. pro chlazení zesilovačů, mikroprocesorů, přenosných ledniček, chladicích boxů apod.



Obr. 9.7

Dalším termoelektrickým jevem je **Thomsonův jev**. Vzniká samovolně i v homogenním vodiči, jsou-li jeho jednotlivé části udržovány na různých teplotách. Thomsonův jev může být popsán pomocí Thomsonova elektromotorického napětí \mathcal{E}_T , které působí mezi částmi vodiče s různými teplotami T_1 , T_2 . Vyjadřuje se ve tvaru

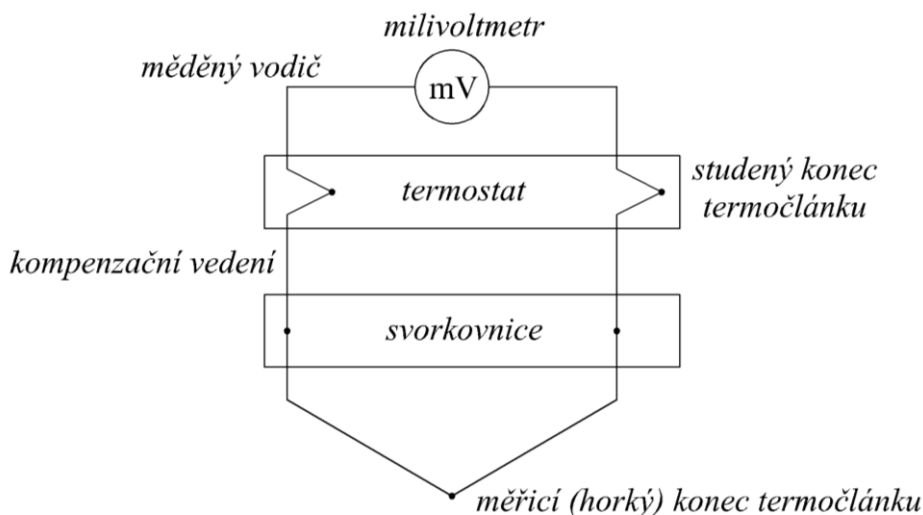
$$\mathcal{E}_T = \int_{T_1}^{T_2} \sigma_T dT. \quad (9.26)$$

Veličina σ_T se nazývá Thomsonův koeficient a závisí na typu látky.

Vznik kontaktního napětí a termoelektrických jevů je vyvolán tím, že některé volné elektrony mohou při styku dvou kovů přecházet z jednoho do druhého. Podrobná kvantitativní analýza těchto jevů vyžaduje podrobnější znalosti o elektronových stavech v kovech a je úkolem fyziky pevných látek.

Měření teploty termočlánky:

Jedna z metod měření teploty je měření pomocí termočlánku. Schéma zapojení termočlánku je na obrázku 9.8. Aktivní konec termočlánku se nazývá horký (měřicí). Druhý konec termočlánku (studený) je nutné udržovat na stálé teplotě. Výsledné termoelektrické napětí je dáno rozdílem napětí na horkém a studeném konci. V případě udržování studeného konce na konstantní teplotě pomocí termostatu bude výsledné termoelektrické napětí závislé pouze na teplotě na měřicím konci. Protože se často používají termočlánky z drahých kovů a bývá obvyklé měřit teploty „na dlouhou vzdálenost“ od místa, kde se měření vyhodnocuje, je nutné nahradit část drahých termočlánekových materiálů levnějšími. Od svorkovnice až k termostatu je vloženo tzv. kompenzační vedení (obr. 9.8). Na cestě od svorkovnice až k termostatu dlouhé někdy desítky metrů však nebývá konstantní teplota. Aby výsledné termoelektrické napětí termočlánku nebylo ovlivněno kolísáním teploty kompenzačního vedení je nutné, aby termoelektrické chování materiálu kompenzačního vedení bylo asi do teploty 100°C shodné s termoelektrickým chováním materiálů termočlánku.



Obr. 9.8

Závislost termoelektrického napětí termočlánku však není lineární (vztah (9.25)), a proto se jako termočlánky vybírají ty dvojice materiálů, které

- mají závislost termoelektrického napětí na teplotě v daném intervalu teplot co nejbližší lineární závislosti,
- mají co nejvyšší termoelektrické napětí,
- jsou fyzikálně i chemicky stabilní a odolné v daném pracovním prostředí,
- dají se zpracovat na drát potřebných rozměrů.

Vzhledem k vedení tepla má být termočlánek co nejtenčí. Průměr termočlánekových drátů je ale omezen jejich trvanlivostí – u ušlechtilých kovů bývá průměr drátu (0,1 – 0,6) mm, u ne-

ušlechtilých kovů (0,5 – 4,0) mm. S ohledem na vedení tepla má být také vhodně upravena délka termočlánu.

Termočlánek PtRh10 (platinarhodium) – Pt

je nejčastěji používaným termočlánekem pro měření vyšších teplot. Je vysoce stálý. Dlouhodobě se používá do 1300°C, krátkodobě až do 1600°C. Produkuje nízké termoelektrické napětí, proto vyžaduje citlivější zařízení pro přesné měření, které nelze používat v provozním měřítku. Používá se rovněž jako laboratorní termočlánek k cejchování jiných termočláneků.

Termočlánek NiCr10 (niklechrom) – Ni

je nejčastěji používaným termočlánekem v průmyslu. Je levný, produkuje relativně vysoké termoelektrické napětí, a proto je možné použití méně citlivých přístrojů pro jeho měření. Trvale se používá do 900°C, krátkodobě až do 1200°C. Při teplotách nad 800°C dochází v důsledku oxidace k trvalému zvýšení termoelektrického napětí asi o (1 – 2) % pro teploty (200 – 400) °C.

Termočlánek Fe – CuNi45 (konstantan)

se v průmyslu také používá velmi často, je ho však možno použít pouze do teploty 600°C. Termoelektrické napětí je jen o málo větší než u termočlánu NiCr10.

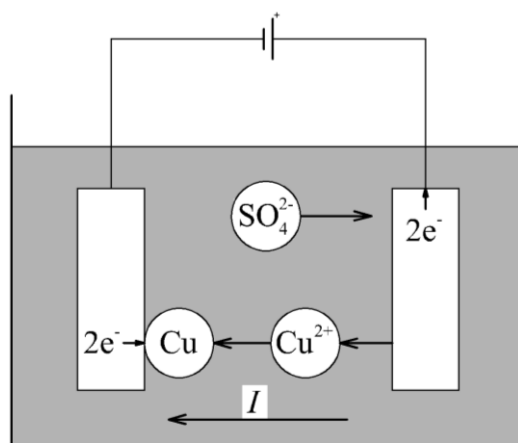
9.7 Vedení elektřiny v kapalinách

Chemicky čisté kapaliny jsou většinou velmi špatné vodiče. V některých případech stačí rozpustit nepatrné množství vhodné látky, aby vodivost vzrostla o několik řádů. Látky, jejichž roztoky vedou elektrický proud, se nazývají **elektrolyty**. (Někdy se také elektrolytem rozumí příslušný vodivý roztok.) Nosiči proudu v elektrolytech jsou ionty. Při průchodu elektrického proudu elektrolytem dochází pohybem iontů i k přenosu hmoty.

Příčinou proudu procházejícího elektrolytem je rozklad iontových vazeb molekul příměsí v prostředí molekul rozpouštědla (např. vody), které jsou také iontově vázané. Ve vodě rozpuštěná kuchyňská sůl NaCl se rozdělí na kladné ionty Na^+ a záporné Cl^- , z nichž každý má jeden elementární náboj. V roztoku modré skalice CuSO_4 se vyskytují ionty Cu^{2+} a SO_4^{2-} nesoucí každý dva elementární náboje. Ne všechny molekuly příměsí musí být rozděleny na ionty (**disociovány**).

Vložíme-li do elektrolytu dvě vodivé elektrody, na něž přivedeme elektrické napětí, vznikne v elektrolytu elektrické pole, které bude přitahovat kladné ionty (kationty) k záporné elektrodě (katodě) a záporné ionty (anionty) ke kladné elektrodě (anodě).

Ponoříme-li například do roztoku CuSO_4 dvě měděné elektrody, které mimo roztok připojíme ke zdroji elektrického napětí (obr. 9.9), pak na katodu budou přitahovány ionty Cu^{2+} , které po dotyku s elektrodou jí odeberou dva elektrony a ulpí na ní jako neutrální atomy Cu. Iont SO_4^{2-} vyloučený na anodě jí předá dva elektrony a při reakci s materiálem anody vznikne molekula CuSO_4 , která se dostává do roztoku, ve kterém se rozloží a posléze se vyloučí na katodě. Popsaný jev se nazývá **elektrolýza** a je základem galvanického pokovování.



Obr. 9.9

Faraday formuloval pro vedení proudu při elektrolýze dva zákony.

1. Faradayův zákon elektrolýzy říká, že hmotnost m látky vyloučená na elektrodě, je přímo úměrná proudu I a času t , po který proud elektrolytem prochází

$$m = AIt, \quad (9.27)$$

kde A je konstanta pro dané ionty a nazývá se **elektrochemický ekvivalent**.

Hmotnost vyloučené látky m lze také vyjádřit pomocí náboje, který se během vylučování dostal na elektrodu.

$$m = AQ. \quad (9.28)$$

Uvažujme, že se vyloučí na elektrodě 1 mol látky. Náboj, který se v tomto případě přeneše je roven $Q = N_A z e$, kde N_A je Avogadrova konstanta, e je elementární náboj a z je valence (mocnost) iontu. Pak lze vztah (9.28) psát ve tvaru

$$m = M_m = AN_A z e. \quad (9.29)$$

Odtud lze určit

$$A = \frac{M_m}{N_A z e}. \quad (9.30)$$

Součin konstant $N_A e$ se označuje F a nazývá se **Faradayova konstanta**.

$$F = 9,648 \cdot 10^4 \text{ C} \cdot \text{mol}^{-1}.$$

2. Faradayův zákon elektrolýzy: Elektrochemický ekvivalent látky vypočteme, jestliže její molární hmotnost vydělíme Faradayovou konstantou a počtem elektronů potřebných k vyloučení jedné molekuly

$$A = \frac{M_m}{zF}. \quad (9.31)$$

Látková množství různých látek vyloučených při elektrolýze týmž nábojem jsou chemicky ekvivalentní. (Mohou se navzájem nahradit v chemické sloučenině nebo se mohou beze zbytku sloučit.)

Oba zákony je možné vyjádřit jedním vztahem

$$m = \frac{M_m}{zF} It. \quad (9.32)$$

9.8 Vedení elektřiny v plynech

Plyny jsou tvořeny z elektricky neutrálních atomů a molekul a za normálních podmínek elektrický proud nevedou. Vodivost je umožněna **ionizací** plynu, při níž se z atomů a molekul uvolní elektrony a atomy (molekuly) se stávají kladnými ionty. Může dojít i ke vzniku záporných iontů, spojí-li se neutrální atomy nebo molekuly s volnými elektrony. Přitažlivé síly mezi kladným a záporným nábojem způsobují, že se kladné ionty rychle spojí se zápornými a volnými elektrony a vytvoří opět neutrální molekuly. Tomuto jevu opačnému k ionizaci se říká **rekombinace**. Pro udržení vodivosti musíme proto stále vytvářet ionty.

Způsoby ionizace jsou různé:

- **Vysokou teplotou.** Pokud je energie tepelného pohybu molekul dostatečně velká, může dojít k ionizaci při srážce dvou neutrálních molekul. Vysokou vodivost dosáhne plyn až při teplotě několika tisíc °C.
- **Elektrickým polem.** Pokud se v plynu již nacházejí elektricky nabitě částice, jsou elektrickým polem urychlovány a mohou získat takovou kinetickou energii, že při srážce s neutrální částicí dojde k další ionizaci.
- **Ionizujícím zářením,** které při průchodu látkou nebo plynem odevzdává svou energii a způsobuje ionizaci. Většina přístrojů pro měření ionizujícího záření je založena na měření ionizačních účinků v plynech a pevných látkách.
- **Elektromagnetickým zářením** o krátké vlnové délce (ultrafialové záření, rentgenové záření a záření gama).
- **Proudem elektronů.**

Nesamostatný výboj probíhá v plynu tehdy, je-li elektrická vodivost vyvolána vnějším ionizátorem. Je charakterizován velmi nízkou hustotou proudu a při zvyšování napětí přechází v některou formu **samostatného výboje** (doutnavý výboj, obloukový výboj).

9.9 Příklady ke kap. 9

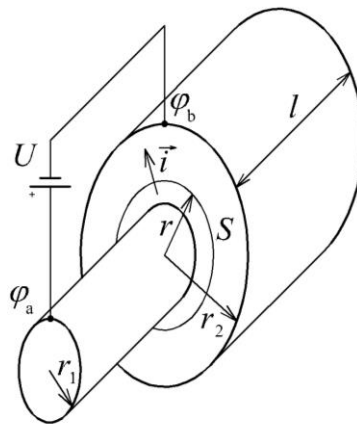
Příklad 9.1

Určete svodový odpor R koaxiálního kabelu o délce l , průměr vnitřního vodiče je r_1 a poloměr pláště je r_2 (obr. 9.10).

Řešení:

Oba vodiče koaxiálního kabelu jsou odděleny izolačním materiálem o vysoké rezistivitě ρ . Na vodiče přivedeme napětí U . Na ionizačním materiálu bude zevnitř potenciál φ_A vnitřního

vodiče a zvnějšku bude potenciál φ_B pláště. Předpokládáme, že elektrický potenciál na vnitřním vodiči podél celé délky kabelu je stejný (stejně jako potenciál na vnějším vodiči). Izolace není dokonale nevodivá, poteče jí malý svodový proud I v radiálním směru.



Obr. 9.10

Podle obr. 9.10 je poloměr vnitřního vodiče r_1 a poloměr pláště r_2 . Vzhledem k válcové symetrii poteče v izolačním materiálu kabelu elektrický proud s hustotou proudu \vec{i} směřující v každém bodě radiálně od osy kabelu k plášti. Uvažujme válcovou plochu S o poloměru r souosou s osou symetrie kabelu. Z důvodu symetrie bude velikost hustoty i na této ploše všude stejně velká a protože směr \vec{i} je na celé ploše ve směru normály k ploše, je celkový proud I tekoucí plochou S

$$I = \int_S \vec{i} \cdot d\vec{S} = iS = i2\pi r l.$$

Všechen svodový proud kabelem proteče plochou S nezávisle na zvoleném poloměru r . Proto velikost plošné hustoty proudu i je menší na větší ploše

$$i = \frac{I}{2\pi r l}.$$

Podle Ohmova zákona v diferenciálním tvaru je na ploše S intenzita elektrického pole

$$\vec{E} = \rho \vec{i}$$

a elektrická intenzita \vec{E} má směr hustoty proudu \vec{i} , radiální. Napětí

$$U = \int \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

mezi vnitřním a vnějším vodičem můžeme spočítat z velikosti intenzity elektrického pole E (při integraci $\vec{E} \parallel d\vec{r}$).

$$U = \int_{r_1}^{r_2} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_{r_1}^{r_2} E dr = \int_{r_1}^{r_2} \rho \frac{I}{2\pi r l} dr = \rho \frac{I}{2\pi l} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

Svodový odpor izolace kabelu tedy je

$$R = \frac{U}{I} = \frac{\rho}{2\pi l} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

Příklad 9.2

Obvod je tvořen rezistorem o odporu R a dvěma stejnými bateriemi. (Vnitřní odporem baterie je R_i a její elektromotorické napětí je \mathcal{E} .)

Určete:

- proud I , který poteče obvodem, jestliže jsou baterie zapojeny sériově,
- proud I , který poteče obvodem, jestliže jsou baterie zapojeny paralelně.

Řešení:

- a) Výsledné elektromotorické napětí je v tomto případě $2\mathcal{E}$ a podle vztahu (9.14) můžeme psát

$$2\mathcal{E} = (2R_i + R)I \Rightarrow I = \frac{2\mathcal{E}}{2R_i + R}.$$

- b) Elektromotorické napětí je v tomto případě \mathcal{E} . Pro celkový vnitřní odpor dvou baterií R'_i platí

$$\frac{1}{R'_i} = \frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_i} = \frac{2}{R_i} \Rightarrow R'_i = \frac{R_i}{2}$$

podle vztahu (9.14) lze psát

$$\mathcal{E} = \left(\frac{R_i}{2} + R \right) I \Rightarrow I = \frac{\mathcal{E}}{\frac{R_i}{2} + R} = \frac{2\mathcal{E}}{R_i + 2R}.$$