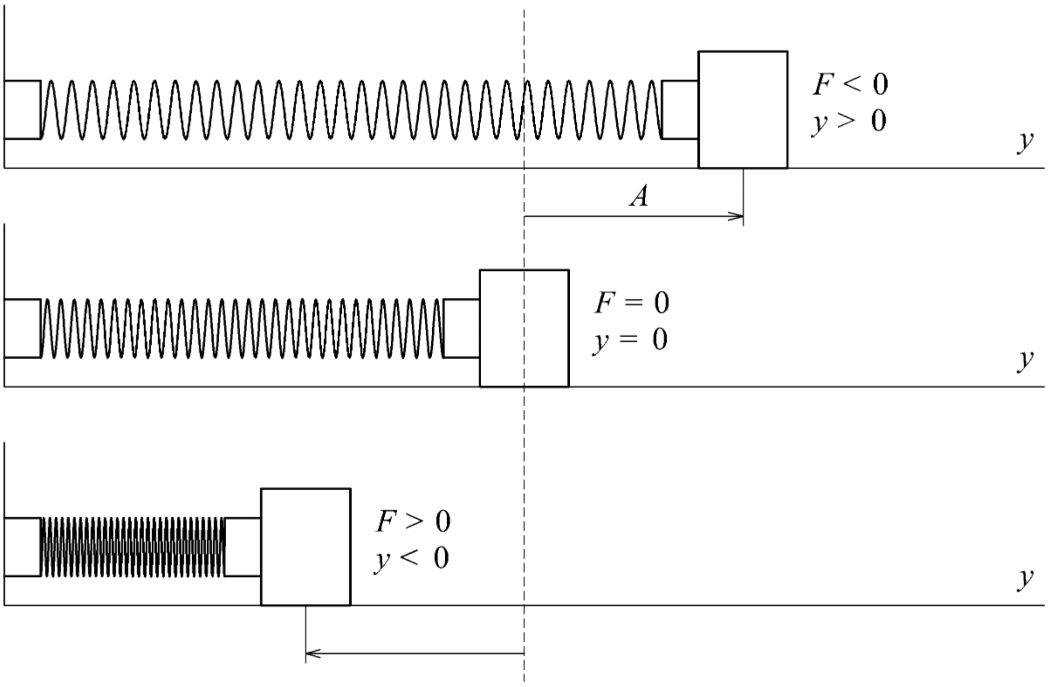
Kmitání

Předpokládejme, že hmotný bod (kostka) hmotnosti m je spojený s pružinou. Na prvním obrázku (obr. 2.1) je pružina napínána tak, že kostku táhneme vpravo. Pružina, podle zákona akce a reakce, se snaží obnovit nenapjatý stav a táhne kostku doleva. Ten je znázorněn na dalším obrázku. Na třetím obrázku je znázorněna opačná situace, pružinu stlačujeme vnější silou doleva, a pružina vratnou silou působí směrem doprava. Výsledkem silového působení je kmitavý pohyb hmotného bodu ve směru osy y.

Na obr. 2.1 je síla $\vec{F}$ vratná síla pružiny, y je okamžitá výchylka hmotného bodu. Za počátek je zvolen střed kostky v nenapjatém stavu pružiny.



Obr. 2.1

Jestliže se omezíme na malé výchylky hmotného bodu a zanedbáme odpor prostředí, působí na hmotný bod pouze vratná síla F pružiny, která souvisí s výchylkou y vztahem

$$F = -ky \quad , \tag{1}$$

kde k je kladná konstanta, která je zároveň charakteristickou konstantou pružiny. Nazývá se **tuhost pružiny** a závisí zejména na materiálu, z kterého je pružina vyrobena.

Vztah (1) pro sílu vyplývá z platnosti Hookova zákona. Znaménko (–) ve vztahu vyjadřuje, že síla pružiny je v každém okamžiku namířena proti výchylce hmotného bodu.

Dosadíme-li vztah (1) do 2. Newtonova zákona, získáme pohybovou rovnici pro vyšetřovaný případ pohybu hmotného bodu. Pro velikost síly ve směru osy y platí vztah

$$ma = m\frac{d^2y}{dt^2} = -ky \quad , \tag{2}$$

kterou můžeme přepsat do tvaru

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{k}{m} y = 0 \; . \tag{3}$$

Jestliže vyřešíme tuto diferenciální rovnici (řešení je uvedeno na konci kapitoly) a použijeme počáteční podmínku, že v čase $t = 0$ má hmotný bod výchylku $y = A$ a velikost rychlosti $v = 0$, dostaneme vztah pro okamžitou výchylku y hmotného bodu

$$y = A\cos\sqrt{\frac{k}{m}}\,t \; .$$

Vztah, který jsme obdrželi pro pohyb hmotného bodu, odpovídá **harmonickému kmitavému pohybu.** O správnosti vztahu je možné se přesvědčit dosazením do původní diferenciální rovnice (3).

Stejně tak je řešením rovnice (3) i funkce sinus, o které platí, že je posunuta oproti funkci cosinus o $\frac{\pi}{2}$. Zvolíme zápis okamžité výchylky hmotného bodu ve tvaru

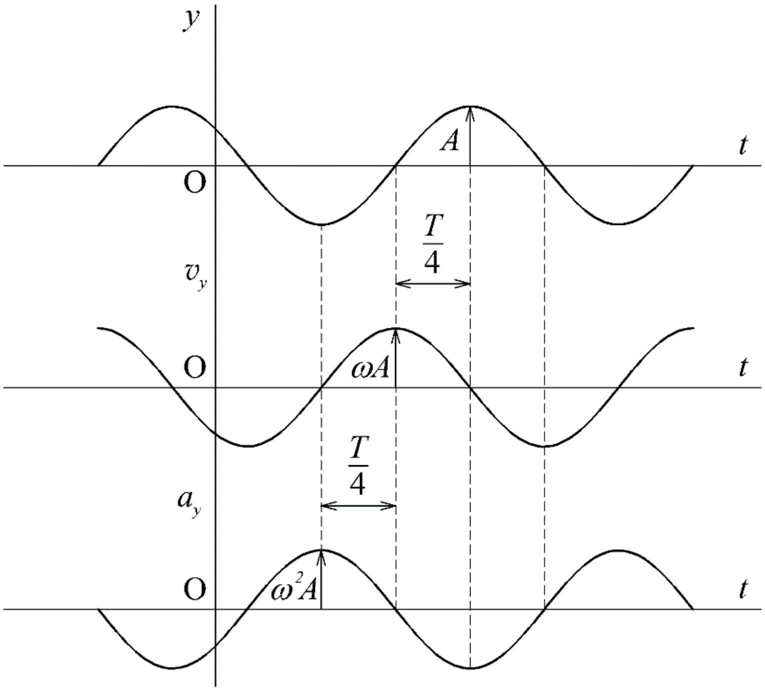
$$y = A\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + \varphi_0\right) \; , \tag{4}$$

kde v závorce jsme připojili fázové posunutí φ_0, které respektuje obecné zadání počátečních podmínek. A je maximální výchylka, nazývaná **amplituda výchylky.** Funkce (4) rovněž vyhovuje původní diferenciální rovnici (3).

Zavedeme-li **dobu kmitu *T*** (dobu, která je potřebná k tomu, aby se hmotný bod z výchylky A dostal do výchylky $-A$ a znovu se vrátil do A), **frekvenci kmitů** $f = \frac{1}{T}$ a **úhlovou frekvenci** $\omega = 2\pi f$, můžeme vztah (4) přepsat do tvaru

$$y = A\sin\left(\omega t + \varphi_0\right) \; . \tag{5}$$

Vztah (5) udává okamžitou výchylku hmotného bodu při harmonickém kmitavém pohybu. Porovnáním vztahů (4) a (5) vidíme, že $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Grafické znázornění průběhu výchylky, rychlosti a zrychlení na čase pro nenulovou hodnotu fázového posunutí je na obr. 2.2.



Obr. 2.2

Objekt vykonávající kmity (hmotný bod, těleso) se často nazývá oscilátor. Je-li výchylka popsána vztahem (5), jedná se o **harmonický oscilátor** a ω je vlastní úhlová frekvence oscilátoru. Charakteristickou konstantou pružiny je **tuhost** k.

Řešení rovnice (3):

Jedná se o lineární diferenciální rovnici druhého řádu. Řešení se hledá ve tvaru $y = C\,\mathrm{e}^{\lambda t}$. Po dosazení do rovnice (3) dostáváme

$$\lambda^2 C\,\mathrm{e}^{\lambda t} + \frac{k}{m} C\,\mathrm{e}^{\lambda t} = 0 .$$

Po označení $\frac{k}{m} = \omega^2$ postupujeme následovně:

$$\lambda^2 + \omega^2 = 0$$
$$\lambda^2 = -\omega^2$$
$$\lambda = \pm i\omega$$

Řešení y je tedy následující.

$$y = C_1\,\mathrm{e}^{i\omega t} + C_2\,\mathrm{e}^{-i\omega t} .$$

Provedeme následující úpravy:

$$y = C_1\,\mathrm{e}^{i\omega t} + C_2\,\mathrm{e}^{-i\omega t} = C_1\left(\cos\omega t + i\sin\omega t\right) + C_2\left(\cos\omega t - i\sin\omega t\right) =$$
$$= \left(C_1 + C_2\right)\cos\omega t + i\left(C_1 - C_2\right)\sin\omega t = K_1\cos\omega t + K_2\sin\omega t,$$

kde $K_1 = C_1 + C_2$ a $K_2 = i\left(C_1 - C_2\right)$.

Řešení $y = K_1 \cos \omega t + K_2 \sin \omega t$ lze dále přepsat do tvaru vztahu (5) (pokud označíme $A \sin \varphi_0 = K_1$, $A \cos \varphi_0 = K_2$)

$y = A \sin(\omega t + \varphi_0)$, kde $A^2 = K_1^2 + K_2^2$ a $\mathrm{tg} \varphi_0 = \dfrac{K_1}{K_2}$.

Tlumené kmitání

Harmonické kmitání popsané pohybovou rovnicí (3) by bylo možné realizovat pouze ve vakuu a ještě bychom museli zanedbat vnitřní tření v materiálu pružiny. Při kmitání ve vzduchu nebo jiném prostředí se kmity tlumí. O odporu prostředí můžeme předpokládat, že je úměrný velikosti rychlosti hmotného bodu v_y a míří proti ní. K síle $\vec{F}$ přistupuje tedy síla odporu prostředí a pohybová rovnice (3) se změní na tvar

$$ma = m\frac{d^2y}{dt^2} = -ky - B\frac{dy}{dt} \ , \tag{6}$$

kde druhý člen na pravé straně rovnice je síla odporu prostředí, $B > 0$. Rovnici můžeme upravit do tvaru

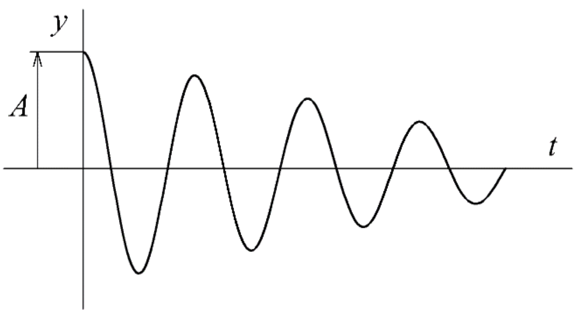
$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2b\frac{dy}{dt} + \omega_0^2 y = 0 \ , \tag{7}$$

konstanta $b = \dfrac{B}{2m}$ se nazývá **konstanta útlumu**, $\dfrac{k}{m} = \omega_0^2$ (čímž vyjadřujeme, že se jedná o úhlovou frekvenci netlumeného oscilátoru). Řešení rovnice (7) (je uvedeno na konci kapitoly) pro malé hodnoty *b* má tvar

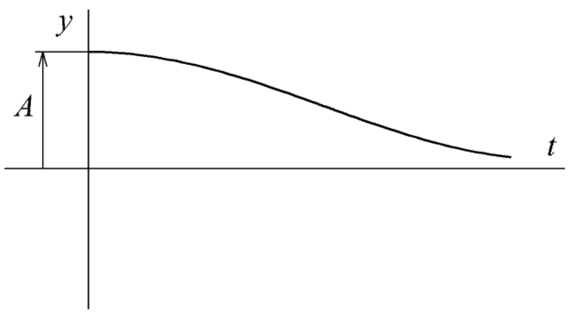
$$y = Ae^{-bt}\sin\left(\omega t + \varphi_0\right) \ , \tag{8}$$

kde ω je úhlová frekvence tlumených kmitů.

Vztah (8) popisuje okamžitou výchylku tlumených kmitů, které jsou charakterizovány zmenšující se amplitudou kmitů. Amplituda výchylky tlumených kmitů se zmenšuje tím rychleji, čím větší je konstanta útlumu. Při velkém tlumení vychýlený oscilátor již periodicky neprochází rovnovážnou polohou. Takovému pohybu říkáme **aperiodický pohyb**. Znázornění tlumeného a aperiodického kmitavého pohybu jsou na obr. 2.3 a, b.



Obr. 2.3 a



Obr. 2.3 b

Zavedeme některé konstanty užívané k charakteristice tlumeného harmonického kmitu. Poměr $\dfrac{y_{1M}}{y_{2M}}$ dvou po sobě následujících maxim

$$y_{1M} = Ae^{-bt_1}\sin\left(\omega t_1 + \varphi_0\right),$$
$$y_{2M} = Ae^{-b(t_1+T)}\sin\left(\omega\left(t_1 + T\right) + \varphi_0\right)$$

funkce (8) je roven

$$\frac{y_{1M}}{y_{2M}} = \mathrm{e}^{bT}.$$

Zavádí se označení

$$\beta = \mathrm{e}^{bT} \tag{9}$$

A veličina β se nazývá útlum kmitů. Při vyjádření y_{1M} a y_{2M} jsme nikde nevyužili toho, že t_1 je čas odpovídající maximu funkce (8). Tedy útlum β je poměrem libovolných dvou výchylek y, které zaujme hmotný bod konající tlumený kmit v časovém odstupu rovném době kmitů T. Přirozený logaritmus útlumu ln β se nazývá **logaritmický dekrement** a užívá se pro něj symbol ϑ

$$\vartheta = \ln\beta = bT. \tag{10}$$

Vedle logaritmického dekrementu ϑ definovaného rovnicí (10) bývá také zaváděn dekadický logaritmický dekrement ϑ' jako dekadický logaritmus útlumu

$$\vartheta' = \log\beta = \left(\log\mathrm{e}\right)\ln\beta \doteq 0{,}434\,\vartheta. \tag{11}$$

Doba τ, za kterou obálka $y' = A\mathrm{e}^{-bt}$ kmitu klesne na hodnotu $\frac{A}{\mathrm{e}}$ se nazývá **relaxační doba**. Z $\frac{A}{\mathrm{e}} = \frac{A}{\mathrm{e}^{+b\tau}}$ rovnice plyne pro relaxační dobu podmínka $b\tau = 1$ a odtud

$$\tau = \frac{1}{b}. \tag{12}$$

Řešení rovnice (7):

Opět se jedná o lineární diferenciální rovnici druhého řádu. Řešení se hledá ve tvaru $y = C\,\mathrm{e}^{\lambda t}$. Charakteristická rovnice má tvar

$$\lambda^2 + 2b\lambda + \omega_0^2 = 0$$

Jejím řešením je:

$$\lambda_{1/2} = -b \pm \sqrt{b^2 - \omega_0^2}.$$

Rozebereme tři možné případy:

1. $b = \omega_0$: Řešení y má v tomto případě tvar $y = C_1\,\mathrm{e}^{-bt} + C_2 t\,\mathrm{e}^{-bt} = \mathrm{e}^{-bt}\left(C_1 + C_2 t\right)$

2. $b > \omega_0$: $b^2 - \omega_0^2 > 0,\ D = \sqrt{b^2 - \omega_0^2}$
   Řešení y je následující $y = C_1\,\mathrm{e}^{(-b+D)t} + C_2\,\mathrm{e}^{(-b-D)t}$, $\lim_{t\to\infty} y = 0$. Jedná se o aperiodický pohyb.

3. $b < \omega_0$: $\lambda_1 = -b + i\sqrt{\omega_0^2 - b^2}$, $\lambda_2 = -b - i\sqrt{\omega_0^2 - b^2}$. Označíme-li $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - b^2}$, lze řešení y psát ve tvaru

$$y = \mathrm{e}^{-bt}\left(C_1\,\mathrm{e}^{i\omega t} + C_2\,\mathrm{e}^{-i\omega t}\right).$$

Budeme postupovat jako v případě řešení harmonického oscilátoru netlumeného.

$$\begin{aligned} y &= \mathrm{e}^{-bt}\left(C_1\,\mathrm{e}^{i\omega t} + C_2\,\mathrm{e}^{-i\omega t}\right) = \mathrm{e}^{-bt}\left[C_1\left(\cos\omega t + i\sin\omega t\right) + C_2\left(\cos\omega t - i\sin\omega t\right)\right] \\ &= \mathrm{e}^{-bt}\left[\left(C_1 + C_2\right)\cos\omega t + i\left(C_1 - C_2\right)\sin\omega t\right] = \mathrm{e}^{-bt}\left(K_1\cos\omega t + K_2\sin\omega t\right), \end{aligned}$$

kde $K_1 = C_1 + C_2$ a $K_2 = i\left(C_1 - C_2\right)$.

Řešení $y = K_1\cos\omega t + K_2\sin\omega t$ lze přepsat do tvaru vztahu (8) (pokud označíme $A\sin\varphi_0 = K_1$ a $A\cos\varphi_0 = K_2$)

$y = A\mathrm{e}^{-bt}\sin\left(\omega t + \varphi_0\right)$, kde $A^2 = K_1^2 + K_2^2$ a $\mathrm{tg}\varphi_0 = \dfrac{K_1}{K_2}$.

Vynucené kmity

Vzhledem k tomu, že kmitání je vždy tlumené, musí působit nějaká vnější budící síla, aby periodický pohyb neustal. Tato budicí síla musí mít také harmonický průběh, zapíšeme ji ve tvaru $F = F_0 \sin\Omega t$. Pohybovou rovnici pak lze napsat ve tvaru

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -ky - B\frac{dy}{dt} + F_0 \sin\Omega t\,. \tag{13}$$

Rovnici můžeme upravit do tvaru

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2b\frac{dy}{dt} + \omega_0^2 y = \frac{F_0}{m}\sin\Omega t\,. \tag{14}$$

Řešení lze hledat ve tvaru $y = C_1\,\mathrm{e}^{\lambda_1 t} + C_2\,\mathrm{e}^{\lambda_2 t} + f(t)$. Řešení $C_1\,\mathrm{e}^{\lambda_1 t} + C_2\,\mathrm{e}^{\lambda_2 t}$ je stejné jako pro harmonický oscilátor tlumený (řešení diferenciální rovnice bez pravé strany. Stačí najít jedno řešení rovnice $f(t)$ s pravou stranou. Budeme ho hledat ve tvaru $f(t) = A\sin(\Omega t + \varphi_0)$.
Dosadíme-li toto řešení do rovnice (14), dostáváme

$$-A\Omega^2 \sin(\Omega t + \varphi_0) + 2bA\Omega\cos(\Omega t + \varphi_0) + \omega_0^2 A\sin(\Omega t + \varphi_0) = \frac{F_0}{m}\sin\Omega t\,.$$

Tuto rovnici budeme dále upravovat.

$$-A\Omega^2\left[\sin\Omega t\cos\varphi_0 + \cos\Omega t\sin\varphi_0\right] + 2bA\Omega\left[\cos\Omega t\cos\varphi_0 - \sin\Omega t\sin\varphi_0\right] +$$
$$+A\omega_0^2\left[\sin\Omega t\cos\varphi_0 + \cos\Omega t\sin\varphi_0\right] = \frac{F_0}{m}\sin\Omega t$$
$$A\left[\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)\cos\varphi_0 - 2b\Omega\sin\varphi_0\right]\sin\Omega t + A\left[\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)\sin\varphi_0 + 2b\Omega\cos\varphi_0\right]\cos\Omega t = \frac{F_0}{m}\sin\Omega t\,.$$

Porovnáme-li členy u $\sin\Omega t$ a u $\cos\Omega t$

$$A\left[\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)\cos\varphi_0 - 2b\Omega\sin\varphi_0\right] = \frac{F_0}{m}$$
$$A\left[\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)\sin\varphi_0 + 2b\Omega\cos\varphi_0\right] = 0\,,$$

získáme, pokud $A \neq 0$, výraz pro φ_0.

$$\mathrm{tg}\varphi_0 = -\frac{2b\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}$$

Abychom získali výraz pro amplitudu, musíme výrazy ještě upravit.

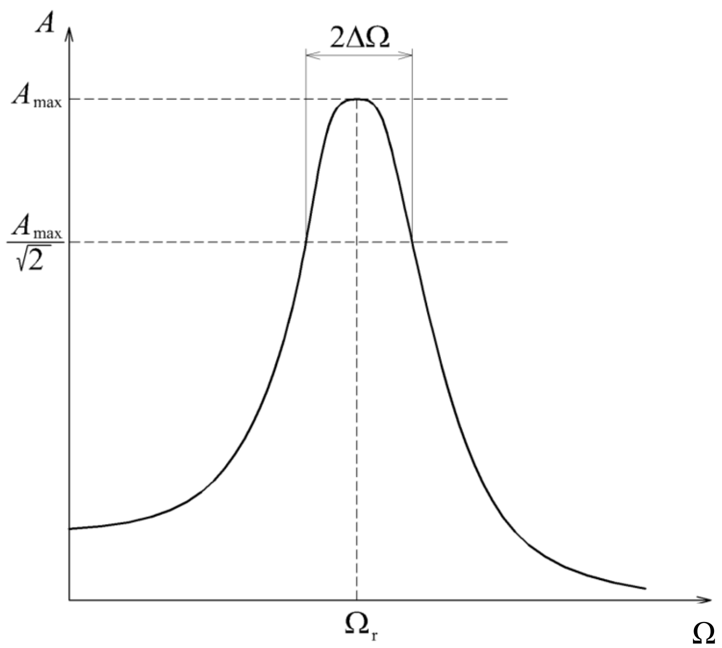
$$A^2\left[\left(\omega_0^2-\Omega^2\right)^2\cos^2\varphi_0-4b\Omega\left(\omega_0^2-\Omega^2\right)\cos\varphi_0\sin\varphi_0+4b^2\Omega^2\sin^2\varphi_0\right]=\left(\frac{F_0}{m}\right)^2$$
$$A^2\left[\left(\omega_0^2-\Omega^2\right)^2\sin^2\varphi_0+4b\Omega\left(\omega_0^2-\Omega^2\right)\cos\varphi_0\sin\varphi_0+4b^2\Omega^2\cos^2\varphi_0\right]=0$$

Sečtením posledních dvou rovnic dostáváme

$A^2\left[\left(\omega_0^2-\Omega^2\right)^2+4b^2\Omega^2\right]=\left(\frac{F_0}{m}\right)^2$. Odtud již jednoduše zjistíme vztah pro amplitudu.

$$A=\frac{\frac{F_0}{m}}{\left[\left(\omega_0^2-\Omega^2\right)^2+4b^2\Omega^2\right]^{\frac{1}{2}}} \tag{15}$$

Závislost amplitudy na budicí frekvenci je znázorněna na obr. 2.4



Obr. 2.4

Je vidět, že amplituda dosahuje maxima pro budicí frekvenci, kterou označíme Ω_r a nazýváme ji rezonanční frekvence. Jev, ke kterému dochází, růst amplitudy nade všechny meze, se nazývá **rezonance**.

Určení rezonanční frekvence:

$$\frac{dA}{d\Omega}=\frac{\frac{F_0}{m}\left[2\left(\omega_0^2-\Omega^2\right)(-2\Omega)+8b^2\Omega\right]\left(-\frac{1}{2}\right)}{\left[\left(\omega_0^2-\Omega^2\right)^2+4b^2\Omega^2\right]^{\frac{3}{2}}}=\frac{\frac{F_0}{m}2\Omega\left(\omega_0^2-\Omega^2-2b^2\right)}{\left[\left(\omega_0^2-\Omega^2\right)^2+4b^2\Omega^2\right]^{\frac{3}{2}}}=0$$

$\Omega \neq 0$, $\omega_0^2 - \Omega_r^2 - 2b^2 = 0$

$$\Omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2b^2} \qquad (16)$$

Je-li je tlumení malé, je rezonanční frekvence blízká vlastní frekvenci harmonického oscilátoru $\Omega_r \doteq \omega_0$. Mechanické soustavy vykazují jednu nebo více vlastních frekvencí. Pokud na ně působí velká vnější budicí síla s frekvencí, která je blízká jedné z nich, mohou vznikající nucené kmity způsobit destrukci soustavy.