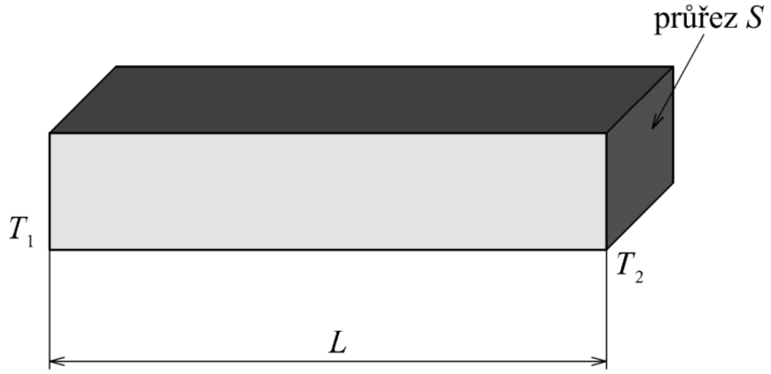
Vedení tepla

Jestliže chceme zvýšit teplotu vody v nádobě, vyjádříme tuto skutečnost jednoduše jako ohřátí vody. Zvýšení teploty můžeme uskutečnit například vložením horkého tělesa do vody. Jedná se o proces, při kterém dojde k přenosu energie, a tento proces probíhá mezi teplejším a chladnějším tělesem (soustavou), dokud se teploty nevyrovnají. Popsanou skutečnost můžeme formulovat obecně: Jakmile se dostanou dvě tělesa do tepelného kontaktu, bude probíhat přenos tepla, dokud mezi tělesy nevznikne stav termodynamické rovnováhy. Tepelné energii budeme zkráceně říkat **teplo**, budeme jej označovat symbolem Q. Znaménkem (+,–) budeme rozlišovat, zda se jedná o teplo dodané soustavě (tělesu), nebo o odebrané teplo. Teplo jako fyzikální veličina je energie a její jednotka je 1 J (joule).
Tepelná energie je předávána z jednoho místa na druhé prostřednictvím tří procesů: **kondukce (vedení), konvekce (proudění), radiace (vyzařování).**

Kondukce tepla. V případě kondukce se energie přenáší interakcemi molekul bez jakéhokoliv pohybu látky jako celku. Uplatňuje se především při šíření tepla v pevných látkách. Předpokládejme například tyč, jejíž jeden konec je zahříván. Jde-li o kov, pak volné elektrony, které se pohybují kovem, dostávají a předávají tepelnou energii při srážkách s atomy mřížky.



Obr. 7.3

Mějme tyč z pevné látky délky L ve směru osy x (obr. 7.3). Tyč má průřez S, jeden její konec je udržován na teplotě T_2, která je vyšší než teplota druhého konce T_1. Experimentálně bylo zjištěno, že mezi spádem teploty, průřezem tyče a přenosem tepla uskutečněným za malý časový interval (tepelným tokem $Q_\tau = \dfrac{dQ}{d\tau}$) je přímá úměrnost. Relaci lze zapsat ve tvaru

$$\frac{dQ}{d\tau} = -\lambda S \frac{dT}{dx} \ , \qquad (1)$$

kde λ je **koeficient tepelné vodivosti**, látková konstanta charakteristická pro uvažovaný materiál. Znaménko (–) odpovídá skutečnosti, že teplo proudí od teplejšího místa ke studenějšímu. Látky s velkou hodnotou koeficientu λ jsou dobré tepelné vodiče. Vysokou tepelnou vodivost má stříbro a měď. Tepelná vodivost kapalin je malá, nejmenší koeficient tepelné vodivosti ze všech látek pak mají plyny. Proto se s výhodou používá plynů k tepelné izolaci. Nejlepším tepelným izolantem je vakuum (v němž se ovšem zase znatelněji projevuje tepelné záření).
V tabulce 7.1 jsou uvedeny hodnoty koeficientů tepelné vodivosti pro některé materiály:

Tabulka 7.1

materiál	vzduch	Al	Cu	Au	Pt	Ag	ocel	sklo	beton
λ [$\mathrm{W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}}$]	0,026	237	401	318	353	429	46	0,7–0,9	0,9–1,3

Představme si tyč obklopenou vzduchem. Pláštěm tyče odchází do okolí část tepla. I pro tento případ platí relace (1). Důsledkem platnosti relace je, že teplota neklesá rovnoměrně s délkou tyče, ale v okolí teplejšího konce klesá rychleji než v okolí studenějšího.

Pokud výraz (1) vydělíme plochou průřezu tyče, dostaneme plošnou hustotu tepelného toku

$$J_Q = \frac{dQ_\tau}{dS}, \qquad (2)$$

pro kterou lze psát

$$J_Q = -\lambda \frac{dT}{dx}. \qquad (3)$$

Vzhledem k tomu, že teplo odchází i pláštěm tyče, je třeba plošnou hustotu tepelného toku zapsat tak, aby byla podchycena i tato skutečnost. To se podaří, pokud si uvědomíme, že teplota je funkcí všech tří prostorových souřadnic. Pro plošnou hustotu tepelného toku (vektorovou veličinu) lze tedy psát

$$\vec{J}_Q = -\lambda \, \mathrm{grad} T. \qquad (4)$$

Výraz (4) se nazývá **Fourierův zákon**.

Pokud skrze stěny tělesa prochází teplo ven, je třeba se ptát, kde se bere. Teplo se získá ochlazováním tělesa. Nyní si představme těleso jakéhokoli obecného tvaru. Při porovnávání tepelného toku skrze stěny tělesa a jeho ochlazování budeme postupovat stejně, jako jsme na přednášce postupovali v případě odvození rovnice kontinuity v diferenciálním tvaru. Tepelný tok skrze všechny stěny tělesa lze vyjádřit výrazem $\oint\!\!\oint_S \vec{J}_Q \cdot d\vec{S}$. Úbytek tepla tělesa lze popsat výrazem $-\iiint_V c\rho \frac{\partial T}{\partial \tau} dV$, ve kterém se integruje přes objem tělesa, jehož povrch o ploše S vystupuje v předchozím integrálu, c je měrná tepelná kapacita látky, ρ je hustota. Znaménko – před integrálem značí, že se jedná o úbytek. Platí tedy

$$\oint\!\!\oint_S \vec{J}_Q \cdot d\vec{S} = -\iiint_V c\rho \frac{\partial T}{\partial \tau} dV.$$

Podle věty Gausse – Ostrogradského víme, že lze integrál přes uzavřenou plochu nahradit integrálem přes objem, který plocha uzavírá: $\oint\!\!\oint_S \vec{J}_Q \cdot d\vec{S} = \iiint_V \mathrm{div}\vec{J}_Q \, dV$. Platí tedy

$$\iiint_V \mathrm{div}\vec{J}_Q\, dV = -\iiint_V c\rho \frac{\partial T}{\partial \tau} dV \ .$$

Pokud nyní použijeme Fourierův zákon, dostaneme

$$\iiint_V \mathrm{div}\left(-\lambda\ \mathrm{grad}T\right) dV = \iiint_V \left(-\lambda\ \mathrm{div}\,\mathrm{grad}T\right) dV = -\iiint_V c\rho \frac{\partial T}{\partial \tau} dV \ .$$

Uvědomíme-li si, že $\mathrm{div}\,\mathrm{grad}T = \nabla^2 T$, můžeme poslední rovnost psát jako

$$\iiint_V \left[c\rho \frac{\partial T}{\partial \tau} - \lambda \nabla^2 T \right] dV = 0 \, .$$

Vzhledem k tomu, že tvar tělesa byl zvolen libovolně, nevolili jsme žádný konkrétní objem, tak také platí

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial \tau} - \lambda \nabla^2 T = 0 \, , \qquad (5)$$

což je **rovnice vedení tepla** v případě bez tepelných zdrojů. Pokud se vyskytují i tepelné zdroje, rovnice (5) bude mít nenulovou pravou stranu, na které se bude nacházet hustota tepelného výkonu zdroje P_V :

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial \tau} - \lambda \nabla^2 T = P_V \, . \qquad (6)$$

Stacionární vedení tepla

Dále budeme uvažovat pouze situaci popsanou rovnicí (5). Zaměříme se na stacionární vedení tepla, což znamená, že teplota bude v daném místě v čase konstantní, $\frac{\partial T}{\partial \tau} = 0$. Pak podle rovnice (5) je i $\nabla^2 T = 0$.

Pro jednoduchost dále uvažujme případ, který jsme uvažovali na počátku úvah o kondukci tepla, tok tepla tyčí podle obr. 7.3.

$$Q_\tau = \frac{dQ}{d\tau} = -\lambda S \frac{dT}{dx} \, .$$

Pro stacionární tok získáme vyjádření

$$Q_\tau = \lambda \frac{T_1 - T_2}{L} S \qquad (7)$$

a teplotu ve vzdálenosti x od teplejšího konce tyče lze v tomto případě popsat výrazem

$$T(x) = \frac{T_2 - T_1}{L} x + T_1 . \tag{8}$$

Vzhledem k tomu, že ve výrazu (7) vystupuje rozdíl teplot, není třeba teploty ve výrazech (7) a (8) dosazovat v kelvinech, ale lze je dosadit i v °C.