Inverzní z - transformace a řešení diferenčních rovnic

prof. RNDr. Miroslav Vlček, DrSc.

18. května 2006

Diferenční rovnice a rekurentní relace

Na rekurentní formule můžeme nahlížet jako na diferenční rovnice. Slavná Fibonacciho čísla (Leonardo z Pisy zvaný Fibonacci, 1170-1250)

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55 \ldots$$

se odvozují tak, že následující číslo je součtem dvou předchozích čísel. Fibonacciho posloupnost byla poprvé popsána k popsání růstu populace králíků (za poněkud idealizovaných podmínek). Číslo $f(n)$ popisuje velikost populace po n měsících, pokud předpokládáme, že

- První měsíc se narodí jediný pár.
- Nově narozené páry jsou produktivní od druhého měsíce svého života.
- Každý měsíc zplodí každý produktivní pár jeden další pár.
- Králíci nikdy neumírají, nejsou nemocní atd.

Uvedenou vlastnost můžeme zapsat ve tvaru rekurentní formule

$$f(n+2) = f(n+1) + f(n). \tag{1}$$

Jestliže položíme $f(0) = 1$, $f(1) = 1$, řešíme rekurentní formuli obvyklými metodami. Pomocí z-transformace nalezneme

$$\begin{aligned} z^2 \left[F(z) - f(0) - z^{-1}\ f(1)\right] - \\ - z\left[F(z) - f(0)\right] - F(z) = 0 \end{aligned} \tag{2}$$

a po úpravě

$$F(z)\left[z^2 - z - 1\right] = z^2 f(0) + z f(1) - z f(0) \tag{3}$$

Dosadíme počáteční hodnoty posloupnosti $f(0) = 1$, $f(1) = 1$ a pro

$$z_{\pm} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

máme nakonec

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{z^2}{z^2 - z - 1} = \frac{1}{1 - z^{-1} - z^{-2}} \\ &= \frac{1}{z_+ - z_-}\left[\frac{z_+}{1 - z_+ z^{-1}} - \frac{z_-}{1 - z_- z^{-1}}\right] \end{aligned} \tag{4}$$

Zpětnou z-transformací odbržíme řešení ve tvaru

$$\begin{aligned} f(n) &= \frac{z_+^{n+1} - z_-^{n+1}}{z_+ - z_-} \\ &= \frac{\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\sqrt{5}} \end{aligned} \tag{5}$$

Obrázek 1. Fibonacciho spirála v přírodě

Výpočet n-tého Fibonacciho čísla přímým dosazením do výše uvedeného explicitního vzorce je sice rychlá metoda, avšak vzhledem ke značné zaokrouhlovací chybě, která se projeví při výpočtu za použití čísel v plovoucí řádovou čárkou je pro větší n nepoužitelná. Nejčastějším způsobem výpočtu je rekurentní výpočet, ve kterém se začíná s hodnotami $f(0)$ a $f(1)$ a postupně se vyčíslují další členy posloupnosti, přičemž v paměti stačí udržovat hodnotu dvou posledních členů. Pro velmi vysoké hodnoty n

je možno použít následující vzorec, využívající maticové operace:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} f(n+1) & f(n) \\ f(n) & f(n-1) \end{bmatrix} \tag{6}$$

Diferenční rovnice a ortogonální polynomy

Na rekurentní relace pro výpočet klasických ortogonálních polynomů můžeme nahlížet jako na diferenční rovnice. Pro Čebyševovy polynomy má rekurentní formule tvar

$$f_{n+2}(x) - 2x f_{n+1}(x) + f_n(x) = 0\,. \tag{7}$$

Jestliže zavedeme označení

$$f_0(x) = 1 \qquad f_1(x) = T_1(x) = x\,, \tag{8}$$

obdržíme Čebyševovy polynomy I. druhu $T_n(x)$, jestliže zavedeme označení

$$f_0(x) = 1 \qquad f_1(x) = U_1(x) = 2x\,, \tag{9}$$

obdržíme Čebyševovy polynomy II. druhu $U_n(x)$. Ukážeme jak pomocí z-transformace řešíme diferenční rovnici (7). S použitím počátečních podmínek odvodíme formule pro Čebyševovy polynomy $T_n(x)$, $U_n(x)$. Použijeme vzorec pro posunutí

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\left[f(n+m)\right] &= z^m \left[\mathcal{Z}\left[f[n]\right] - \sum_{\nu=0}^{m-1} f(\nu) z^{-\nu}\right] \\ &= z^m \left[F(z) - \sum_{\nu=0}^{m-1} f(\nu) z^{-\nu}\right]. \end{aligned} \tag{10}$$

Transformací $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) z^{-n}$ diferenční rovnice dostáváme

$$z^2 F(z) - z^2 f_0(x) - z f_1(x) - 2x\left[zF(z) - z f_0(x)\right] + F(z) = 0\,, \tag{11}$$

resp.

$$F(z)\left[1 - 2xz^{-1} + z^{-2}\right] = \left[1 - 2xz^{-1}\right] f_0(x) + z^{-1} f_1(x)\,. \tag{12}$$

Pro počáteční podmínky (8) obdržíme

$$F(z) \equiv \mathcal{T}(z) = \frac{1 - xz^{-1}}{1 - 2xz^{-1} + z^{-2}} = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(x) z^{-n}\,, \tag{13}$$

zatímco pro počáteční podmínky (9) je

$$F(z) \equiv \mathcal{U}(z) = \frac{1}{1 - 2xz^{-1} + z^{-2}} = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(x) z^{-n}. \tag{14}$$

V teorii ortogonálních polynomů se funkce $\mathcal{T}(z)$ a $\mathcal{U}(z)$ nazývají vytvořující funkce. Póly těchto funkcí se nacházejí v bodech $z_{1,2} = x \pm \sqrt{x^2 - 1}$ Rozkladem na parciální zlomky potom nalezneme

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(z) &= \frac{k_1}{1 - z_1 z^{-1}} + \frac{k_2}{1 - z_2 z^{-1}} = \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{1 - z_1 z^{-1}} + \frac{1}{2}\frac{1}{1 - z_2 z^{-1}}\,. \end{aligned} \tag{15}$$

Zpětná z-transformace dává známou algebraickou formuli pro Čebyševovy polynomy prvního druhu

$$\begin{aligned} T_n(x) &= \frac{1}{2} z_1^n + \frac{1}{2} z_2^n = \\ &= \frac{1}{2}\left[(x + \sqrt{x^2 - 1})^n + (x - \sqrt{x^2 - 1})^n\right]. \end{aligned} \tag{16}$$

Obdobně rozklad funkce $\mathcal{U}(z)$

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(z) &= \frac{k_1}{1 - z_1 z^{-1}} + \frac{k_2}{1 - z_2 z^{-1}} = \\ &= \frac{z_1}{z_1 - z_2}\frac{1}{1 - z_1 z^{-1}} - \frac{z_2}{z_1 - z_2}\frac{1}{1 - z_2 z^{-1}} \end{aligned} \tag{17}$$

vede na známou algebraickou formuli pro Čebyševovy polynomy druhého druhu

$$\begin{aligned} U_n(x) &= \frac{z_1^{n+1} - z_2^{n+1}}{z_1 - z_2} = \\ &= \frac{(x + \sqrt{x^2 - 1})^{n+1} - (x - \sqrt{x^2 - 1})^{n+1}}{\sqrt{x^2 - 1}}\,. \end{aligned} \tag{18}$$