Úloha 7: Určení momentu setrvačnosti a modulu pružnosti ve smyku dynamickou metodou

Pomůcky

Ozubené kolo, přídavný prstenec, stojan se závěsem, propojovací modul, světelná závora, mikrometr, posuvné měřítko, pásové měřítko, digitální váha

Úkoly

Stanovte moment setrvačnosti J_0 soustavy závěsného drátu s ozubeným kolem z doby kmitu torzního kyvadla. Stanovte modul pružnosti ve smyku G materiálu, ze kterého je vyroben závěsný drát.

Dílčí úkoly

1. Určete geometrické rozměry a hmotnost přídavného prstence. Následně vypočtěte jeho moment setrvačnosti J_1 vzhledem k ose procházející středem.
2. Určete průměr d a délku l_0 závěsného drátu.
3. Určete dobu kmitu torzního kyvadla T_0 pro soustavu ozubeného kola a závěsného drátu s momentem setrvačnosti J_0.
4. Určete dobu kmitu torzního kyvadla T_1 pro složenou soustavu s momentem setrvačnosti $J_0 + J_1$.

Poznámky k měření

- Doby torzních kmitů T_0 a T_1 měřte metodou následných měření pomocí počítače.
- Váhu pro změření hmotnosti přídavného prstence naleznete u úlohy 10.
- Pro měření délek zvolte vždy nejpřesnější možné měřidlo.
- Průměr drátu změřte na pěti různých místech. V případě odečtení různých hodnot zpracujete jako opakované měření.

Matematické modely pro výpočet nepřímo měřených veličin

Moment setrvačnosti J_0 soustavy závěsného drátu s ozubeným kolem:

$$J_0 = \frac{J_1}{\left(\frac{T_1}{T_0}\right)^2 - 1} \tag{1}$$

Modul pružnosti G materiálu, ze kterého je vyroben závěsný drát:

$$G = \frac{128\pi\, l_0\, J_1}{d^4\,(T_1^2 - T_0^2)} \tag{2}$$

T_0 ... doba kmitu torzního kyvadla pro soustavu o neznámém momentu setrvačnosti J_0

T_1 ... doba kmitu torzního kyvadla pro složenou soustavu s momentem setrvačnosti $J_0 + J_1$

l_0 ... délka závěsného drátu

d ... průměr závěsného drátu

J_1 ... moment setrvačnosti vzhledem k ose procházející středem prstence o hmotnosti m, vnitřním průměru d_1 a vnějším průměru d_2:

$$J_1 = \frac{1}{8} m \left(d_1^2 + d_2^2\right)$$

Poznámky a návod k výpočtu nejistot

Moment setrvačnosti J_0:

- Nejistoty se určují na základě vztahu (1).
- Veličiny, které se podílejí na nejistotě typu A: T_0 a T_1 (následné měření počítačem).
- Nejistotu typu A je třeba vyjádřit z parciálních derivací:

$$u_{J_0 A} = \sqrt{\left(\frac{\partial J_0}{\partial T_0}\right)^2 u_{T_0 A}^2 + \left(\frac{\partial J_0}{\partial T_1}\right)^2 u_{T_1 A}^2} = \frac{2J_1}{\left[\left(\frac{T_1}{T_0}\right)^2 - 1\right]^2} \cdot \frac{T_1}{T_0^2} \sqrt{\left(\frac{T_1}{T_0}\right)^2 u_{T_0 A}^2 + u_{T_1 A}^2}$$

- Veličiny, které se podílejí na nejistotě typu B: J_1 (vypočtená hodnota z jednorázového měření).
- Ze zkušenosti lze předpokládat, že maximální relativní chyba v určení J_1 je $1,5\,\%$.
- Nejistotu typu B lze vyjádřit pomocí relativních nejistot.

Modul pružnosti ve smyku G:

- Nejistoty se určují na základě vztahu (2).
- Veličiny, které se podílejí na nejistotě typu A: T_0 a T_1 (následné měření počítačem), d (pouze v případě opakovaného měření).
- Nejistotu typu A je třeba vyjádřit z parciálních derivací:

$$u_{GA} = \sqrt{\left(\frac{\partial G}{\partial T_0}\right)^2 u_{T_0 A}^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial T_1}\right)^2 u_{T_1 A}^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial d}\right)^2 u_{dA}^2} = 2G\sqrt{\frac{T_0^2 u_{T_0 A}^2 + T_1^2 u_{T_1 A}^2}{\left(T_1^2 - T_0^2\right)^2} + 4u_{rdA}^2}$$

- Veličiny, které se podílejí na nejistotě typu B: J_1 (vypočtená hodnota z jednorázového měření), l_0 a d.
- Ze zkušenosti lze předpokládat, že maximální relativní chyba v určení J_1 je $1,5\,\%$.
- Maximální chyba délky l_0 musí reflektovat odhad místa uchycení závěsného drátu.
- Nejistotu typu B lze vyjádřit pomocí relativních nejistot.

Podněty k diskusi

- Moment setrvačnosti J_0 zahrnuje kromě ozubeného kola i drát. Ukažte, že je moment setrvačnosti drátu v rámci soustavy zanedbatelný.
- Diskutujte zanedbatelnost nejistot typu A pro obě nepřímo měřené veličiny.
- Modul pružnosti ve smyku G je materiálová konstanta, kterou lze dohledat v tabulkách. Odhadněte materiál drátu a stanovte odchylku od tabulkové hodnoty.