Řešení testů na Laplaceovu transformaci 2005

Jan Přikryl

31. května 2005

Výsledky některých příkladů nevycházejí po zpětné transformaci tak, jak byste asi očekávali. Ponechávám na vás, abyste si promysleli, jak k tomu došlo. Pokud jste v testu neskončili u hyperbolických sinů a cosinů, není to samozřejmě chyba.

Příklady s pravou stranou $k_1 \cdot t^2 e^{2t}$ vedou na polynomy pátého stupně ve jmenovateli. Otrocky počítáno vám to asi způsobí problémy, vyplatí se přemýšlet a výraz na pravé straně nepřevádět na společného jmenovatele. Tento postup je opět na vás, v řešení tento veskrze prospěšný krok neuvádím.

L001

Pomocí Laplaceovy transformace řešte diferenciální rovnici

$$\begin{aligned} y''(t) - 4\,y'(t) + 4\,y\,(t) &= -4\,e^{-t} \\ y(0) &= -1 \\ y'(0) &= 1 \end{aligned}$$

Řešení:
Po transformaci a dosazení počátečních podmínek dostaneme

$$p^2 Y\,(p) + 4\,Y\,(p) - 4\,pY\,(p) + p - 5 = -4\,(p+1)^{-1}$$

což lze po osamostatnění $Y(p)$ převést na

$$Y\,(p) = -\frac{p^2 - 4\,p - 1}{(p+1)\,(p^2 - 4\,p + 4)}$$

z čehož obdržíme parciální zlomky

$$Y\,(p) = -5/9\,(p-2)^{-1} + 5/3\,(p-2)^{-2} - 4/9\,(p+1)^{-1}$$

Výsledek je

$$y\,(t) = -4/9\,e^{-t} + 5/9\,e^{2\,t}\,(-1 + 3\,t)$$

L007

Pomocí Laplaceovy transformace řešte diferenciální rovnici

$$\begin{aligned} y''(t) - 5/2\,y'(t) + 3/2\,y\,(t) &= -4\,e^{-t} \\ y(0) &= -1 \\ y'(0) &= -1 \end{aligned}$$

Řešení:
Po transformaci a dosazení počátečních podmínek dostaneme

$$p^2Y\,(p) + 3/2\,Y\,(p) - 5/2\,pY\,(p) + p - 3/2 = -4\,\left(p+1\right)^{-1}$$

což lze po osamostatnění $Y(p)$ převést na

$$Y\,(p) = -\frac{2\,p^2 - p + 5}{(p+1)\,(2\,p^2 - 5\,p + 3)}$$

z čehož obdržíme parciální zlomky

$$Y\,(p) = -\frac{32}{5}\,\left(2\,p-3\right)^{-1} - 4/5\,\left(p+1\right)^{-1} + 3\,\left(p-1\right)^{-1}$$

Výsledek je

$$y\,(t) = -\frac{16}{5}\,e^{3/2\,t} + \frac{11}{5}\,\cosh\,(t) + \frac{19}{5}\,\sinh\,(t)$$

L013

Pomocí Laplaceovy transformace řešte diferenciální rovnici

$$\begin{aligned} y''(t) - 5\,y'(t) + 6\,y\,(t) &= -4\,e^{-t} \\ y(0) &= 1 \\ y'(0) &= 0 \end{aligned}$$

Řešení:
Po transformaci a dosazení počátečních podmínek dostaneme

$$p^2Y\,(p) + 6\,Y\,(p) - 5\,pY\,(p) - p + 5 = -4\,\left(p+1\right)^{-1}$$

což lze po osamostatnění $Y(p)$ převést na

$$Y\,(p) = \frac{p^2 - 4\,p - 9}{(p+1)\,(p^2 - 5\,p + 6)}$$

z čehož obdržíme parciální zlomky

$$Y(p) = 13/3\ (p-2)^{-1} - 3\ (p-3)^{-1} - 1/3\ (p+1)^{-1}$$

Výsledek je

$$y(t) = 13/3\, e^{2\,t} - 3\, e^{3\,t} - 1/3\, e^{-t}$$

L021

Pomocí Laplaceovy transformace řešte diferenciální rovnici

$$\begin{aligned} y''(t) - 1/2\, y'(t) - 1/2\, y(t) &= -4\, e^{-t} \\ y(0) &= 0 \\ y'(0) &= 0 \end{aligned}$$

Řešení:
Po transformaci a dosazení počátečních podmínek dostaneme

$$p^2 Y(p) - 1/2\, Y(p) - 1/2\, pY(p) = -4\ (p+1)^{-1}$$

což lze po osamostatnění $Y(p)$ převést na

$$Y(p) = -8\, \frac{1}{(p+1)\,(2\,p^2 - p - 1)}$$

z čehož obdržíme parciální zlomky

$$Y(p) = \frac{32}{3}\ (2\,p+1)^{-1} - 4\ (p+1)^{-1} - 4/3\ (p-1)^{-1}$$

Výsledek je

$$y(t) = 16/3\, e^{-1/2\,t} - 16/3\, \cosh(t) + 8/3\, \sinh(t)$$

L027

Pomocí Laplaceovy transformace řešte diferenciální rovnici

$$\begin{aligned} y''(t) - 4\, y'(t) + 3\, y(t) &= -4\, e^{-t} \\ y(0) &= 2 \\ y'(0) &= 0 \end{aligned}$$

Řešení:
Po transformaci a dosazení počátečních podmínek dostaneme

$$p^2 Y(p) + 3\,Y(p) - 4\,pY(p) - 2\,p + 8 = -4\,(p+1)^{-1}$$

což lze po osamostatnění $Y(p)$ převést na

$$Y(p) = 2\,\frac{p^2 - 3\,p - 6}{(p+1)\,(p^2 - 4\,p + 3)}$$

z čehož obdržíme parciální zlomky

$$Y(p) = -3/2\,(p-3)^{-1} - 1/2\,(p+1)^{-1} + 4\,(p-1)^{-1}$$

Výsledek je

$$y(t) = -3/2\,e^{3\,t} + 7/2\,\cosh(t) + 9/2\,\sinh(t)$$

L115

Pomocí Laplaceovy transformace řešte diferenciální rovnici

$$\begin{aligned} y''(t) - 4\,y'(t) + 4\,y(t) &= 2\,t^2 e^{2\,t} \\ y(0) &= 1 \\ y'(0) &= 1 \end{aligned}$$

Řešení:
Po transformaci a dosazení počátečních podmínek dostaneme

$$p^2 Y(p) + 4\,Y(p) - 4\,pY(p) - p + 3 = 4\,(p-2)^{-3}$$

což lze po osamostatnění $Y(p)$ převést na

$$Y(p) = \frac{p^4 - 9\,p^3 + 30\,p^2 - 44\,p + 28}{(p-2)^3\,(p^2 - 4\,p + 4)}$$

z čehož obdržíme parciální zlomky

$$Y(p) = (p-2)^{-1} + 4\,(p-2)^{-5} - (p-2)^{-2}$$

Výsledek je

$$y(t) = 1/6\,e^{2\,t}\left(6 + t^4 - 6\,t\right)$$

L116

Pomocí Laplaceovy transformace řešte diferenciální rovnici

$$\begin{aligned} y''(t) - 2\,y'(t) + y\,(t) &= 2\,t^2 e^{2\,t} \\ y(0) &= -2 \\ y'(0) &= 0 \end{aligned}$$

Řešení:
Po transformaci a dosazení počátečních podmínek dostaneme

$$p^2 Y\,(p) + Y\,(p) - 2\,pY\,(p) + 2\,p - 4 = 4\,\left(p-2\right)^{-3}$$

což lze po osamostatnění $Y(p)$ převést na

$$Y\,(p) = -2\,\frac{p^4 - 8\,p^3 + 24\,p^2 - 32\,p + 14}{\left(p-2\right)^3\left(p^2 - 2\,p + 1\right)}$$

z čehož obdržíme parciální zlomky

$$Y\,(p) = 12\,\left(p-2\right)^{-1} + 4\,\left(p-2\right)^{-3} - 2\,\left(p-1\right)^{-2} - 14\,\left(p-1\right)^{-1} - 8\,\left(p-2\right)^{-2}$$

Výsledek je

$$y\,(t) = 2\,e^{2\,t}\left(6 + t^2 - 4\,t\right) - 2\,e^{t}\left(t+7\right)$$

L128

Pomocí Laplaceovy transformace řešte diferenciální rovnici

$$\begin{aligned} y''(t) - 3\,y'(t) + 2\,y\,(t) &= 2\,t^2 e^{2\,t} \\ y(0) &= -2 \\ y'(0) &= 0 \end{aligned}$$

Řešení:
Po transformaci a dosazení počátečních podmínek dostaneme

$$p^2 Y\,(p) + 2\,Y\,(p) - 3\,pY\,(p) + 2\,p - 6 = 4\,\left(p-2\right)^{-3}$$

což lze po osamostatnění $Y(p)$ převést na

$$Y\,(p) = -2\,\frac{p^3 - 8\,p^2 + 22\,p - 22}{\left(p-2\right)^4}$$

z čehož obdržíme parciální zlomky

$$Y\,(p) = -2\,\left(p-2\right)^{-1} - 4\,\left(p-2\right)^{-3} + 4\,\left(p-2\right)^{-4} + 4\,\left(p-2\right)^{-2}$$

Výsledek je

$$y\,(t) = 2/3\,e^{2\,t}\left(-3 - 3\,t^2 + t^3 + 6\,t\right)$$

L141

Pomocí Laplaceovy transformace řešte diferenciální rovnici

$$\begin{aligned} y''(t) - 4\,y'(t) + 3\,y\,(t) &= 2\,t^2 e^{2\,t} \\ y(0) &= -2 \\ y'(0) &= -1 \end{aligned}$$

Řešení:
Po transformaci a dosazení počátečních podmínek dostaneme

$$p^2 Y\,(p) + 3\,Y\,(p) - 4\,pY\,(p) + 2\,p - 7 = 4\,\left(p-2\right)^{-3}$$

což lze po osamostatnění $Y(p)$ převést na

$$Y\,(p) = -\frac{2\,p^4 - 19\,p^3 + 66\,p^2 - 100\,p + 52}{\left(p-2\right)^3\left(p^2 - 4\,p + 3\right)}$$

z čehož obdržíme parciální zlomky

$$Y\,(p) = -4\,\left(p-2\right)^{-1} + 5/2\,\left(p-3\right)^{-1} - 4\,\left(p-2\right)^{-3} - 1/2\,\left(p-1\right)^{-1}$$

Výsledek je

$$y\,(t) = 5/2\,e^{3\,t} - 1/2\,e^{t} - 2\,e^{2\,t}\left(2 + t^2\right)$$

L242

Pomocí Laplaceovy transformace řešte diferenciální rovnici

$$\begin{aligned} y''(t) - 3\,y'(t) + 2\,y\,(t) &= \sin\left(t\right) \\ y(0) &= 0 \\ y'(0) &= -2 \end{aligned}$$

Řešení:
Po transformaci a dosazení počátečních podmínek dostaneme

$$p^2Y(p) + 2\,Y(p) - 3\,pY(p) + 2 = \left(p^2+1\right)^{-1}$$

což lze po osamostatnění $Y(p)$ převést na

$$Y(p) = -\frac{2\,p^2+1}{(p^2+1)\,(p^2-3\,p+2)}$$

z čehož obdržíme parciální zlomky

$$Y(p) = -9/5\;(p-2)^{-1} + 3/10\,\frac{p}{p^2+1} + 1/10\,\left(p^2+1\right)^{-1} + 3/2\;(p-1)^{-1}$$

Výsledek je

$$y(t) = -9/5\,e^{2\,t} + 3/10\,\cos(t) + 1/10\,\sin(t) + 3/2\,e^{t}$$

L269

Pomocí Laplaceovy transformace řešte diferenciální rovnici

$$\begin{aligned} y''(t) + y'(t) - 2\,y(t) &= \sin(t) \\ y(0) &= 1 \\ y'(0) &= -1 \end{aligned}$$

Řešení:
Po transformaci a dosazení počátečních podmínek dostaneme

$$p^2Y(p) - 2\,Y(p) + pY(p) - p = \left(p^2+1\right)^{-1}$$

což lze po osamostatnění $Y(p)$ převést na

$$Y(p) = \frac{p^3+p+1}{(p^2+1)\,(p^2+p-2)}$$

z čehož obdržíme parciální zlomky

$$Y(p) = 3/5\;(p+2)^{-1} - 1/10\,\frac{p}{p^2+1} - 3/10\,\left(p^2+1\right)^{-1} + 1/2\;(p-1)^{-1}$$

Výsledek je

$$y(t) = 3/5\,e^{-2\,t} - 1/10\,\cos(t) - 3/10\,\sin(t) + 1/2\,e^{t}$$

L344

Pomocí Laplaceovy transformace řešte diferenciální rovnici

$$\begin{aligned} y''(t) - 2\,y'(t) + y\,(t) &= -2\,\cos{(t)} \\ y(0) &= 2 \\ y'(0) &= 0 \end{aligned}$$

Řešení:
Po transformaci a dosazení počátečních podmínek dostaneme

$$p^2 Y\,(p) + Y\,(p) - 2\,pY\,(p) - 2\,p + 4 = -2\,\frac{p}{p^2+1}$$

což lze po osamostatnění $Y(p)$ převést na

$$Y\,(p) = 2\,\frac{p^3 - 2\,p^2 - 2}{(p^2+1)\,(p^2 - 2\,p + 1)}$$

z čehož obdržíme parciální zlomky

$$Y\,(p) = \left(p^2+1\right)^{-1} + 2\,(p-1)^{-1} - 3\,(p-1)^{-2}$$

Výsledek je

$$y\,(t) = \sin{(t)} - e^t\,(-2 + 3\,t)$$

L345

Pomocí Laplaceovy transformace řešte diferenciální rovnici

$$\begin{aligned} y''(t) + 2\,y'(t) + y\,(t) &= -2\,\cos{(t)} \\ y(0) &= 0 \\ y'(0) &= 1 \end{aligned}$$

Řešení:
Po transformaci a dosazení počátečních podmínek dostaneme

$$p^2 Y\,(p) + Y\,(p) + 2\,pY\,(p) - 1 = -2\,\frac{p}{p^2+1}$$

což lze po osamostatnění $Y(p)$ převést na

$$Y\,(p) = \frac{p^2 - 2\,p + 1}{(p^2+1)\,(p^2 + 2\,p + 1)}$$

z čehož obdržíme parciální zlomky

$$Y\left(p\right)=2\,\left(p+1\right)^{-2}-\left(p^{2}+1\right)^{-1}$$

Výsledek je

$$y\left(t\right)=2\,te^{-t}-\sin\left(t\right)$$

L351

Pomocí Laplaceovy transformace řešte diferenciální rovnici

$$\begin{aligned} y''(t)+3/2\,y'(t)+1/2\,y\left(t\right) &= -2\,\cos\left(t\right) \\ y(0) &= -2 \\ y'(0) &= 0 \end{aligned}$$

Řešení:
Po transformaci a dosazení počátečních podmínek dostaneme

$$p^{2}Y\left(p\right)+1/2\,Y\left(p\right)+3/2\,pY\left(p\right)+2\,p+3=-2\,\frac{p}{p^{2}+1}$$

což lze po osamostatnění $Y(p)$ převést na

$$Y\left(p\right)=-2\,\frac{2\,p^{2}+p+3}{\left(2\,p+1\right)\left(p^{2}+1\right)}$$

z čehož obdržíme parciální zlomky

$$Y\left(p\right)=-\frac{24}{5}\,\left(2\,p+1\right)^{-1}+2/5\,\frac{p}{p^{2}+1}-6/5\,\left(p^{2}+1\right)^{-1}$$

Výsledek je

$$y\left(t\right)=-\frac{12}{5}\,e^{-1/2\,t}+2/5\,\cos\left(t\right)-6/5\,\sin\left(t\right)$$

L471

Pomocí Laplaceovy transformace řešte diferenciální rovnici

$$\begin{aligned} y''(t)+3\,y'(t)+2\,y\left(t\right) &= -e^{-3\,t}+3\,e^{t} \\ y(0) &= 0 \\ y'(0) &= -1 \end{aligned}$$

Řešení:
Po transformaci a dosazení počátečních podmínek dostaneme

$$p^2Y(p) + 2\,Y(p) + 3\,pY(p) + 1 = 2\,\frac{p+5}{(p+3)(p-1)}$$

což lze po osamostatnění $Y(p)$ převést na

$$Y(p) = -\frac{p^2-13}{(p+3)(p-1)(p^2+3\,p+2)}$$

z čehož obdržíme parciální zlomky

$$Y(p) = 3\,(p+2)^{-1} - 3\,(p+1)^{-1} + 1/2\,(p-1)^{-1} - 1/2\,(p+3)^{-1}$$

Výsledek je

$$y(t) = 3\,e^{-2\,t} - 5/2\,\cosh(t) + 7/2\,\sinh(t) - 1/2\,e^{-3\,t}$$