Zápočtový početní test z MSAP

Místo: Praha

Datum: 13. května 2010, 8:00 L10064/Z20297

Jméno a příjmení:

Tabulku vzorů a obrazů Laplaceovy a $\mathcal{Z}$-transformace nalezneta na druhé straně tohoto listu.

Příklad 1 (L10064)

LTI systém je popsán diferenciální rovnicí

$$\begin{aligned} y''(t) - 7\,y'(t) + 12\,y(t) &= 2\,u(t), \\ u(t) &= e^{2t}, \\ y(0) &= 2, \\ y'(0) &= 1. \end{aligned}$$

Najděte průběh signálu na výstupu systému. Použijte k tomu Laplaceovu transformaci: Vyjádřete $Y(p)$. Pokud je to třeba, proveďte rozklad na parciální zlomky a určete jejich koeficienty. Proveďte zpětnou transformaci a vyjádřete $y(t)$ v *nejjednodušším možném* tvaru.

Nalezněte přenosovou funkci a impulsní odezvu. Bude systém stabilní?

Příklad 2 (Z20297)

Řešte diferenční rovnici

$$\begin{aligned} x(n+2) + 7\,x(n+1) + 12\,x(n) &= 4 \cdot n \cdot (-5)^{n-1}, \\ x(0) &= 1, \\ x(1) &= -2 \end{aligned}$$

pomocí $\mathcal{Z}$-transformace: Vyjádřete $X(z)$. Pokud je to nutné, proveďte rozklad na parciální zlomky (mějte při tom na paměti, že pokud stupeň polynomu v čitateli je roven stupni polynomu ve jmenovateli, je třeba před rozkladem se zlomkem něco provést). Proveďte zpětnou transformaci $X(z) \to x(n)$ a vyjádřete $x(n)$ v *nejjednodušším možném* tvaru.

$\mathbf{f(t)}$	$\mathbf{F(p)}$
$\delta(t)$	1
$\mathbf{1}(t)$	$\frac{1}{p}$
$e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{p+\alpha}$
$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$
$\cos\omega t$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$

$\mathbf{f(t)}$	$\mathbf{F(p)}$
$e^{-\alpha t}\sin\omega t$	$\frac{\omega}{(p+\alpha)^2+\omega^2}$
$e^{-\alpha t}\cos\omega t$	$\frac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2+\omega^2}$
t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
$t^n e^{-\alpha t}$	$\frac{n!}{(p+\alpha)^{n+1}}$

$\mathbf{f(t)}$	$\mathbf{F(p)}$
$t\cos\omega t$	$\frac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}$
$t\sin\omega t$	$\frac{2\omega p}{(p^2+\omega^2)^2}$
$\sinh\varphi t$	$\frac{\varphi}{p^2-\varphi^2}$
$\cosh\varphi t$	$\frac{p}{p^2-\varphi^2}$
$t\sinh\varphi t$	$\frac{2\varphi p}{(p^2-\varphi^2)^2}$
$t\cosh\varphi t$	$\frac{p^2+\varphi^2}{(p^2-\varphi^2)^2}$

$\mathbf{f(n)}$	$\mathbf{F(z)}$	
$\delta(n)$	1	1
$\mathbf{1}(n)$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$\frac{z}{z-1}$
a^n	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$\frac{z}{z-a}$
$a^{n-1}-\frac{1}{a}\delta(n)$	$\frac{z^{-1}}{1-az^{-1}}$	$\frac{1}{z-a}$
na^{n-1}	$\frac{z^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\frac{z}{(z-a)^2}$
$(n+1)a^n$	$\frac{1}{(1-az^{-1})^2}$	$\frac{z^2}{(z-a)^2}$
n	$\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$	$\frac{z}{(z-1)^2}$
n^2	$\frac{z^{-1}(1+z^{-1})}{(1-z^{-1})^3}$	$\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$
$a^n\sin n\vartheta$	$\frac{az^{-1}\sin\vartheta}{1-2az^{-1}\cos\vartheta+a^2z^{-2}}$	$\frac{az\sin\vartheta}{z^2-2az\cos\vartheta+a^2}$
$a^n\cos n\vartheta$	$\frac{1-az^{-1}\cos\vartheta}{1-2az^{-1}\cos\vartheta+a^2z^{-2}}$	$\frac{z^2-az\cos\vartheta}{z^2-2az\cos\vartheta+a^2}$
$a^n\sinh n\varphi$	$\frac{az^{-1}\sinh\varphi}{1-2az^{-1}\cosh\varphi+a^2z^{-2}}$	$\frac{az\sinh\varphi}{z^2-2az\cosh\varphi+a^2}$
$a^n\cosh n\varphi$	$\frac{1-az^{-1}\cosh\varphi}{1-2az^{-1}\cosh\varphi+a^2z^{-2}}$	$\frac{z^2-az\cosh\varphi}{z^2-2az\cosh\varphi+a^2}$
$T_n(x)$	$\frac{1-xz^{-1}}{1-2xz^{-1}+z^{-2}}$	$\frac{z^2-xz}{z^2-2xz+1}$
$U_{n-1}(x)$	$\frac{z^{-1}}{1-2xz^{-1}+z^{-2}}$	$\frac{z}{z^2-2xz+1}$

Řešení příkladu 1 (L10064)

Zadání:

$$\begin{aligned} y''(t) - 7\,y'(t) + 12\,y(t) &= 2\,u(t), \\ u(t) &= e^{2t}, \\ y(0) &= 2, \\ y'(0) &= 1. \end{aligned}$$

Řešení:

$$p^2 Y(p) - 2\,p - 1\; - 7\,(pY(p) - 2\,) + 12\,Y(p) = 2\frac{1}{p-2},$$

$$\begin{aligned} Y(p) &= \frac{2\,p^2 - 17\,p + 28}{(p-2)(p^2 - 7\,p + 12)}, \\ H(p) &= \frac{2}{p^2 - 7\,p + 12} = \frac{2}{(p-4)(p-3)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y(p) &= 1\frac{1}{p-2} + 5\frac{1}{p-3} - 4\frac{1}{p-4}, \\ H(p) &= 2\frac{1}{p-4} - 2\frac{1}{p-3}, \end{aligned}$$

a z toho

$$\begin{aligned} y(t) &= 1\,e^{2t} + 5\,e^{3t} - 4\,e^{4t}, \\ h(t) &= 2\,e^{4t} - 2\,e^{3t}. \end{aligned}$$

Řešení příkladu 2 (Z20297)

Zadání:

$$\begin{aligned} x(n+2) + 7\,x(n+1) + 12\,x(n) &= 4 \cdot n \cdot (-5)^{n-1}, \\ x(0) &= 1, \\ x(1) &= -2. \end{aligned}$$

Řešení:

$$z^2\,X(z) - 1\,z^2 + 2\,z + 7z\;(X(z) - 1) + 12\,X(z) = 4\frac{z}{(z+5)^2}$$

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{z^3 + 15\,z^2 + 75\,z + 129}{(z+5)^2(z^2 + 7\,z + 12)},$$

$$X(z) = 2\frac{z}{(z+5)^2} - 3\frac{z}{z+5} + 3\frac{z}{z+3} - 5\frac{z}{z+4},$$

a z toho

$$x(n) = 2\,n \cdot (-5)^{n-1}\; - 3\,(-5)^n\; + 3\,(-3)^n\; - 5\,(-4)^n.$$

Zápočtový početní test z MSAP

Místo: Praha

Datum: 13. května 2010, 8:00 L20145/Z10021

Jméno a příjmení:

Tabulku vzorů a obrazů Laplaceovy a $\mathcal{Z}$-transformace nalezneta na druhé straně tohoto listu.

Příklad 1 (L20145)

LTI systém je popsán diferenciální rovnicí

$$\begin{aligned} y''(t) + 9\,y'(t) + 18\,y(t) &= 4\,te^{-5t}, \\ y(0) &= 2, \\ y'(0) &= -1. \end{aligned}$$

Najděte její řešení pomocí Laplaceovy transformace: Vyjádřete $Y(p)$. Pokud je to třeba, proveďte rozklad na parciální zlomky a určete jejich koeficienty. Proveďte zpětnou transformaci a vyjádřete $y(t)$ v *nejjednodušším možném* tvaru.

Příklad 2 (Z10021)

Nalezněte průběh výstupní posloupnosti systému

$$\begin{aligned} x(n+2) + 6\,x(n+1) + 8\,x(n) &= 3 \cdot u(n), \\ u(n) &= (-5)^n, \\ x(0) &= -2, \\ x(1) &= 3 \end{aligned}$$

pomocí $\mathcal{Z}$-transformace: Vyjádřete $X(z)$. Pokud je to nutné, proveďte rozklad na parciální zlomky (mějte při tom na paměti, že pokud stupeň polynomu v čitateli je roven stupni polynomu ve jmenovateli, je třeba před rozkladem se zlomkem něco provést). Proveďte zpětnou transformaci $X(z) \to x(n)$ a vyjádřete $x(n)$ v *nejjednodušším možném* tvaru.

Nalezněte přenosovou funkci a impulsní odezvu. Bude systém stabilní?

$\mathbf{f(t)}$	$\mathbf{F(p)}$
$\delta(t)$	1
$\mathbf{1}(t)$	$\frac{1}{p}$
$e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{p+\alpha}$
$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$
$\cos\omega t$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$

$\mathbf{f(t)}$	$\mathbf{F(p)}$
$e^{-\alpha t}\sin\omega t$	$\frac{\omega}{(p+\alpha)^2+\omega^2}$
$e^{-\alpha t}\cos\omega t$	$\frac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2+\omega^2}$
t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
$t^n e^{-\alpha t}$	$\frac{n!}{(p+\alpha)^{n+1}}$

$\mathbf{f(t)}$	$\mathbf{F(p)}$
$t\cos\omega t$	$\frac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}$
$t\sin\omega t$	$\frac{2\omega p}{(p^2+\omega^2)^2}$
$\sinh\varphi t$	$\frac{\varphi}{p^2-\varphi^2}$
$\cosh\varphi t$	$\frac{p}{p^2-\varphi^2}$
$t\sinh\varphi t$	$\frac{2\varphi p}{(p^2-\varphi^2)^2}$
$t\cosh\varphi t$	$\frac{p^2+\varphi^2}{(p^2-\varphi^2)^2}$

$\mathbf{f(n)}$	$\mathbf{F(z)}$	
$\delta(n)$	1	1
$\mathbf{1}(n)$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$\frac{z}{z-1}$
a^n	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$\frac{z}{z-a}$
$a^{n-1}-\frac{1}{a}\delta(n)$	$\frac{z^{-1}}{1-az^{-1}}$	$\frac{1}{z-a}$
na^{n-1}	$\frac{z^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\frac{z}{(z-a)^2}$
$(n+1)a^n$	$\frac{1}{(1-az^{-1})^2}$	$\frac{z^2}{(z-a)^2}$
n	$\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$	$\frac{z}{(z-1)^2}$
n^2	$\frac{z^{-1}(1+z^{-1})}{(1-z^{-1})^3}$	$\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$
$a^n\sin n\vartheta$	$\frac{az^{-1}\sin\vartheta}{1-2az^{-1}\cos\vartheta+a^2z^{-2}}$	$\frac{az\sin\vartheta}{z^2-2az\cos\vartheta+a^2}$
$a^n\cos n\vartheta$	$\frac{1-az^{-1}\cos\vartheta}{1-2az^{-1}\cos\vartheta+a^2z^{-2}}$	$\frac{z^2-az\cos\vartheta}{z^2-2az\cos\vartheta+a^2}$
$a^n\sinh n\varphi$	$\frac{az^{-1}\sinh\varphi}{1-2az^{-1}\cosh\varphi+a^2z^{-2}}$	$\frac{az\sinh\varphi}{z^2-2az\cosh\varphi+a^2}$
$a^n\cosh n\varphi$	$\frac{1-az^{-1}\cosh\varphi}{1-2az^{-1}\cosh\varphi+a^2z^{-2}}$	$\frac{z^2-az\cosh\varphi}{z^2-2az\cosh\varphi+a^2}$
$T_n(x)$	$\frac{1-xz^{-1}}{1-2xz^{-1}+z^{-2}}$	$\frac{z^2-xz}{z^2-2xz+1}$
$U_{n-1}(x)$	$\frac{z^{-1}}{1-2xz^{-1}+z^{-2}}$	$\frac{z}{z^2-2xz+1}$

Řešení příkladu 1 (L20145)

Zadání:

$$\begin{aligned} y''(t) + 9\,y'(t) + 18\,y(t) &= 4\,te^{-5t}, \\ y(0) &= 2, \\ y'(0) &= -1. \end{aligned}$$

Řešení:

$$p^2Y(p) - 2\,p + 1\; + 9\,(pY(p) - 2\,) + 18\,Y(p) = 4\frac{1}{(p+5)^2},$$

$$Y(p) = \frac{2\,p^3 + 37\,p^2 + 220\,p + 429}{(p+5)^2(p^2 + 9\,p + 18)},$$

$$Y(p) = -2\frac{1}{(p+5)^2} + 1\frac{1}{p+5} + 4\frac{1}{p+3} - 3\frac{1}{p+6},$$

a z toho

$$y(t) = -2\,te^{-5t} + 1\,e^{-5t} + 4\,e^{-3t} - 3\,e^{-6t}.$$

Řešení příkladu 2 (Z10021)

Zadání:

$$\begin{aligned} x(n+2) + 6\,x(n+1) + 8\,x(n) &= 3 \cdot u(n), \\ u(n) &= (-5)^n, \\ x(0) &= -2, \\ x(1) &= 3. \end{aligned}$$

Řešení:

$$z^2\,X(z) + 2\,z^2 - 3\,z + 6z\,\left(X(z) + 2\right) + 8\,X(z) = 3\frac{z}{z+5}$$

$$\begin{aligned} \frac{X(z)}{z} &= \frac{-2\,z^2 - 19\,z - 42}{(z+5)(z^2 + 6\,z + 8)}, \\ \frac{H(z)}{z} &= \frac{3}{z^2 + 6\,z + 8} = \frac{3}{(z+2)(z+4)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X(z) &= -2\frac{z}{z+2} + 1\frac{z}{z+5} - 1\frac{z}{z+4} \\ H(z) &= \frac{3}{2}\frac{1}{z+2} - \frac{3}{2}\frac{1}{z+4}, \end{aligned}$$

a z toho

$$\begin{aligned} x(n) &= -2\,(-2)^n\; + 1\,(-5)^n\; - 1\,(-4)^n \\ h(n) &= \frac{3}{2}\,(-2)^n + \frac{1}{2}\,\delta(n)\; - \frac{3}{2}\,(-4)^n + \frac{1}{4}\,\delta(n). \end{aligned}$$

Zápočtový početní test z MSAP

Místo: Praha

Datum: 13. května 2010, 8:00 L10146/Z20309

Jméno a příjmení:

Tabulku vzorů a obrazů Laplaceovy a $\mathcal{Z}$-transformace nalezneta na druhé straně tohoto listu.

Příklad 1 (L10146)

LTI systém je popsán diferenciální rovnicí

$$\begin{aligned} y''(t) + 6\,y'(t) + 8\,y(t) &= -3\,u(t), \\ u(t) &= e^{-3t}, \\ y(0) &= -2, \\ y'(0) &= 3. \end{aligned}$$

Najděte průběh signálu na výstupu systému. Použijte k tomu Laplaceovu transformaci: Vyjádřete $Y(p)$. Pokud je to třeba, proveďte rozklad na parciální zlomky a určete jejich koeficienty. Proveďte zpětnou transformaci a vyjádřete $y(t)$ v *nejjednodušším možném* tvaru.

Nalezněte přenosovou funkci a impulsní odezvu. Bude systém stabilní?

Příklad 2 (Z20309)

Řešte diferenční rovnici

$$\begin{aligned} x(n+2) + 7\,x(n+1) + 10\,x(n) &= -2 \cdot n \cdot (-4)^{n-1}, \\ x(0) &= -1, \\ x(1) &= -2 \end{aligned}$$

pomocí $\mathcal{Z}$-transformace: Vyjádřete $X(z)$. Pokud je to nutné, proveďte rozklad na parciální zlomky (mějte při tom na paměti, že pokud stupeň polynomu v čitateli je roven stupni polynomu ve jmenovateli, je třeba před rozkladem se zlomkem něco provést). Proveďte zpětnou transformaci $X(z) \to x(n)$ a vyjádřete $x(n)$ v *nejjednodušším možném* tvaru.

$\mathbf{f(t)}$	$\mathbf{F(p)}$
$\delta(t)$	1
$\mathbf{1}(t)$	$\frac{1}{p}$
$e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{p+\alpha}$
$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$
$\cos\omega t$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$

$\mathbf{f(t)}$	$\mathbf{F(p)}$
$e^{-\alpha t}\sin\omega t$	$\frac{\omega}{(p+\alpha)^2+\omega^2}$
$e^{-\alpha t}\cos\omega t$	$\frac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2+\omega^2}$
t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
$t^n e^{-\alpha t}$	$\frac{n!}{(p+\alpha)^{n+1}}$

$\mathbf{f(t)}$	$\mathbf{F(p)}$
$t\cos\omega t$	$\frac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}$
$t\sin\omega t$	$\frac{2\omega p}{(p^2+\omega^2)^2}$
$\sinh\varphi t$	$\frac{\varphi}{p^2-\varphi^2}$
$\cosh\varphi t$	$\frac{p}{p^2-\varphi^2}$
$t\sinh\varphi t$	$\frac{2\varphi p}{(p^2-\varphi^2)^2}$
$t\cosh\varphi t$	$\frac{p^2+\varphi^2}{(p^2-\varphi^2)^2}$

$\mathbf{f(n)}$	$\mathbf{F(z)}$	
$\delta(n)$	1	1
$\mathbf{1}(n)$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$\frac{z}{z-1}$
a^n	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$\frac{z}{z-a}$
$a^{n-1}-\frac{1}{a}\delta(n)$	$\frac{z^{-1}}{1-az^{-1}}$	$\frac{1}{z-a}$
na^{n-1}	$\frac{z^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\frac{z}{(z-a)^2}$
$(n+1)a^n$	$\frac{1}{(1-az^{-1})^2}$	$\frac{z^2}{(z-a)^2}$
n	$\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$	$\frac{z}{(z-1)^2}$
n^2	$\frac{z^{-1}(1+z^{-1})}{(1-z^{-1})^3}$	$\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$
$a^n\sin n\vartheta$	$\frac{az^{-1}\sin\vartheta}{1-2az^{-1}\cos\vartheta+a^2z^{-2}}$	$\frac{az\sin\vartheta}{z^2-2az\cos\vartheta+a^2}$
$a^n\cos n\vartheta$	$\frac{1-az^{-1}\cos\vartheta}{1-2az^{-1}\cos\vartheta+a^2z^{-2}}$	$\frac{z^2-az\cos\vartheta}{z^2-2az\cos\vartheta+a^2}$
$a^n\sinh n\varphi$	$\frac{az^{-1}\sinh\varphi}{1-2az^{-1}\cosh\varphi+a^2z^{-2}}$	$\frac{az\sinh\varphi}{z^2-2az\cosh\varphi+a^2}$
$a^n\cosh n\varphi$	$\frac{1-az^{-1}\cosh\varphi}{1-2az^{-1}\cosh\varphi+a^2z^{-2}}$	$\frac{z^2-az\cosh\varphi}{z^2-2az\cosh\varphi+a^2}$
$T_n(x)$	$\frac{1-xz^{-1}}{1-2xz^{-1}+z^{-2}}$	$\frac{z^2-xz}{z^2-2xz+1}$
$U_{n-1}(x)$	$\frac{z^{-1}}{1-2xz^{-1}+z^{-2}}$	$\frac{z}{z^2-2xz+1}$

Řešení příkladu 1 (L10146)

Zadání:

$$\begin{aligned} y''(t) + 6\,y'(t) + 8\,y(t) &= -3\,u(t), \\ u(t) &= e^{-3t}, \\ y(0) &= -2, \\ y'(0) &= 3. \end{aligned}$$

Řešení:

$$p^2 Y(p) + 2\,p - 3 \; + 6\,(pY(p) + 2\,) + 8\,Y(p) = -3\frac{1}{p+3},$$

$$\begin{aligned} Y(p) &= \frac{-2\,p^2 - 15\,p - 30}{(p+3)(p^2 + 6\,p + 8)}, \\ H(p) &= \frac{-3}{p^2 + 6\,p + 8} = \frac{-3}{(p+4)(p+2)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y(p) &= 3\frac{1}{p+3} - 4\frac{1}{p+2} - 1\frac{1}{p+4}, \\ H(p) &= \frac{3}{2}\frac{1}{p+4} - \frac{3}{2}\frac{1}{p+2}, \end{aligned}$$

a z toho

$$\begin{aligned} y(t) &= 3\,e^{-3t} - 4\,e^{-2t} - 1\,e^{-4t}, \\ h(t) &= \frac{3}{2}\,e^{-4t} - \frac{3}{2}\,e^{-2t}. \end{aligned}$$

Řešení příkladu 2 (Z20309)

Zadání:

$$\begin{aligned} x(n+2) + 7\,x(n+1) + 10\,x(n) &= -2 \cdot n \cdot (-4)^{n-1}, \\ x(0) &= -1, \\ x(1) &= -2. \end{aligned}$$

Řešení:

$$z^2\,X(z) + 1\,z^2 + 2\,z + 7z\;(X(z) + 1) + 10\,X(z) = -2\frac{z}{(z+4)^2}$$

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{-z^3 - 17\,z^2 - 88\,z - 146}{(z+4)^2(z^2 + 7\,z + 10)},$$

$$X(z) = 1\frac{z}{(z+4)^2} + \frac{1}{2}\frac{z}{z+4} + 2\frac{z}{z+5} - \frac{5}{2}\frac{z}{z+2},$$

a z toho

$$x(n) = 1\,n \cdot (-4)^{n-1} \; + \frac{1}{2}\,(-4)^n \; + 2\,(-5)^n \; - \frac{5}{2}\,(-2)^n.$$

Zápočtový početní test z MSAP

Místo: Praha

Datum: 13. května 2010, 9:10 L20152/Z10573

Jméno a příjmení:

Tabulku vzorů a obrazů Laplaceovy a $\mathcal{Z}$-transformace nalezneta na druhé straně tohoto listu.

Příklad 1 (L20152)

LTI systém je popsán diferenciální rovnicí

$$\begin{aligned} y''(t) + 7\,y'(t) + 10\,y(t) &= -4\,te^{-4t}, \\ y(0) &= -3, \\ y'(0) &= 1. \end{aligned}$$

Najděte její řešení pomocí Laplaceovy transformace: Vyjádřete $Y(p)$. Pokud je to třeba, proveďte rozklad na parciální zlomky a určete jejich koeficienty. Proveďte zpětnou transformaci a vyjádřete $y(t)$ v *nejjednodušším možném* tvaru.

Příklad 2 (Z10573)

Nalezněte průběh výstupní posloupnosti systému

$$\begin{aligned} x(n+2) - 6\,x(n+1) + 8\,x(n) &= 2 \cdot u(n), \\ u(n) &= (3)^n, \\ x(0) &= -2, \\ x(1) &= 2 \end{aligned}$$

pomocí $\mathcal{Z}$-transformace: Vyjádřete $X(z)$. Pokud je to nutné, proveďte rozklad na parciální zlomky (mějte při tom na paměti, že pokud stupeň polynomu v čitateli je roven stupni polynomu ve jmenovateli, je třeba před rozkladem se zlomkem něco provést). Proveďte zpětnou transformaci $X(z) \to x(n)$ a vyjádřete $x(n)$ v *nejjednodušším možném* tvaru.

Nalezněte přenosovou funkci a impulsní odezvu. Bude systém stabilní?

$\mathbf{f}(\mathbf{t})$	$\mathbf{F}(\mathbf{p})$
$\delta(t)$	1
$\mathbf{1}(t)$	$\frac{1}{p}$
$e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{p+\alpha}$
$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$
$\cos\omega t$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$

$\mathbf{f}(\mathbf{t})$	$\mathbf{F}(\mathbf{p})$
$e^{-\alpha t}\sin\omega t$	$\frac{\omega}{(p+\alpha)^2+\omega^2}$
$e^{-\alpha t}\cos\omega t$	$\frac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2+\omega^2}$
t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
$t^n e^{-\alpha t}$	$\frac{n!}{(p+\alpha)^{n+1}}$

$\mathbf{f}(\mathbf{t})$	$\mathbf{F}(\mathbf{p})$
$t\cos\omega t$	$\frac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}$
$t\sin\omega t$	$\frac{2\omega p}{(p^2+\omega^2)^2}$
$\sinh\varphi t$	$\frac{\varphi}{p^2-\varphi^2}$
$\cosh\varphi t$	$\frac{p}{p^2-\varphi^2}$
$t\sinh\varphi t$	$\frac{2\varphi p}{(p^2-\varphi^2)^2}$
$t\cosh\varphi t$	$\frac{p^2+\varphi^2}{(p^2-\varphi^2)^2}$

$\mathbf{f}(\mathbf{n})$	$\mathbf{F}(\mathbf{z})$	
$\delta(n)$	1	1
$\mathbf{1}(n)$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$\frac{z}{z-1}$
a^n	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$\frac{z}{z-a}$
$a^{n-1}-\frac{1}{a}\delta(n)$	$\frac{z^{-1}}{1-az^{-1}}$	$\frac{1}{z-a}$
na^{n-1}	$\frac{z^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\frac{z}{(z-a)^2}$
$(n+1)a^n$	$\frac{1}{(1-az^{-1})^2}$	$\frac{z^2}{(z-a)^2}$
n	$\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$	$\frac{z}{(z-1)^2}$
n^2	$\frac{z^{-1}(1+z^{-1})}{(1-z^{-1})^3}$	$\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$
$a^n\sin n\vartheta$	$\frac{az^{-1}\sin\vartheta}{1-2az^{-1}\cos\vartheta+a^2z^{-2}}$	$\frac{az\sin\vartheta}{z^2-2az\cos\vartheta+a^2}$
$a^n\cos n\vartheta$	$\frac{1-az^{-1}\cos\vartheta}{1-2az^{-1}\cos\vartheta+a^2z^{-2}}$	$\frac{z^2-az\cos\vartheta}{z^2-2az\cos\vartheta+a^2}$
$a^n\sinh n\varphi$	$\frac{az^{-1}\sinh\varphi}{1-2az^{-1}\cosh\varphi+a^2z^{-2}}$	$\frac{az\sinh\varphi}{z^2-2az\cosh\varphi+a^2}$
$a^n\cosh n\varphi$	$\frac{1-az^{-1}\cosh\varphi}{1-2az^{-1}\cosh\varphi+a^2z^{-2}}$	$\frac{z^2-az\cosh\varphi}{z^2-2az\cosh\varphi+a^2}$
$T_n(x)$	$\frac{1-xz^{-1}}{1-2xz^{-1}+z^{-2}}$	$\frac{z^2-xz}{z^2-2xz+1}$
$U_{n-1}(x)$	$\frac{z^{-1}}{1-2xz^{-1}+z^{-2}}$	$\frac{z}{z^2-2xz+1}$

Řešení příkladu 1 (L20152)

Zadání:

$$\begin{aligned} y''(t) + 7\,y'(t) + 10\,y(t) &= -4\,te^{-4t}, \\ y(0) &= -3, \\ y'(0) &= 1. \end{aligned}$$

Řešení:

$$p^2Y(p) + 3\,p - 1\; + 7\,(pY(p) + 3\,) + 10\,Y(p) = -4\frac{1}{(p+4)^2},$$

$$Y(p) = \frac{-3\,p^3 - 44\,p^2 - 208\,p - 324}{(p+4)^2(p^2 + 7\,p + 10)},$$

$$Y(p) = 2\frac{1}{(p+4)^2} - 1\frac{1}{p+4} + 3\frac{1}{p+5} - 5\frac{1}{p+2},$$

a z toho

$$y(t) = 2\,te^{-4t} - 1\,e^{-4t} + 3\,e^{-5t} - 5\,e^{-2t}.$$

Řešení příkladu 2 (Z10573)

Zadání:

$$\begin{aligned} x(n+2) - 6\,x(n+1) + 8\,x(n) &= 2 \cdot u(n), \\ u(n) &= (3)^n, \\ x(0) &= -2, \\ x(1) &= 2. \end{aligned}$$

Řešení:

$$z^2\,X(z) + 2\,z^2 - 2\,z - 6z\;(X(z) + 2) + 8\,X(z) = 2\frac{z}{z-3}$$

$$\begin{aligned} \frac{X(z)}{z} &= \frac{-2\,z^2 + 20\,z - 40}{(z-3)(z^2 - 6\,z + 8)}, \\ \frac{H(z)}{z} &= \frac{2}{z^2 - 6\,z + 8} = \frac{2}{(z-4)(z-2)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X(z) &= 4\frac{z}{z-4} - 2\frac{z}{z-3} - 4\frac{z}{z-2} \\ H(z) &= 1\frac{1}{z-4} - 1\frac{1}{z-2}, \end{aligned}$$

a z toho

$$\begin{aligned} x(n) &= 4\,(+4)^n\; - 2\,(+3)^n\; - 4\,(+2)^n \\ h(n) &= 1\,(+4)^n + \frac{1}{-4}\,\delta(n)\; - 1\,(+2)^n + \frac{1}{-2}\,\delta(n). \end{aligned}$$

Zápočtový početní test z MSAP

Místo: Praha

Datum: 13. května 2010, 9:10 L10173/Z20709

Jméno a příjmení:

Tabulku vzorů a obrazů Laplaceovy a $\mathcal{Z}$-transformace nalezneta na druhé straně tohoto listu.

Příklad 1 (L10173)

LTI systém je popsán diferenciální rovnicí

$$\begin{aligned} y''(t) + 6\,y'(t) + 8\,y(t) &= -5\,u(t), \\ u(t) &= e^{-3t}, \\ y(0) &= 2, \\ y'(0) &= -2. \end{aligned}$$

Najděte průběh signálu na výstupu systému. Použijte k tomu Laplaceovu transformaci: Vyjádřete $Y(p)$. Pokud je to třeba, proveďte rozklad na parciální zlomky a určete jejich koeficienty. Proveďte zpětnou transformaci a vyjádřete $y(t)$ v *nejjednodušším možném* tvaru.

Nalezněte přenosovou funkci a impulsní odezvu. Bude systém stabilní?

Příklad 2 (Z20709)

Řešte diferenční rovnici

$$\begin{aligned} x(n+2) + 7\,x(n+1) + 10\,x(n) &= -4 \cdot n \cdot (-4)^{n-1}, \\ x(0) &= -2, \\ x(1) &= 2 \end{aligned}$$

pomocí $\mathcal{Z}$-transformace: Vyjádřete $X(z)$. Pokud je to nutné, proveďte rozklad na parciální zlomky (mějte při tom na paměti, že pokud stupeň polynomu v čitateli je roven stupni polynomu ve jmenovateli, je třeba před rozkladem se zlomkem něco provést). Proveďte zpětnou transformaci $X(z) \rightarrow x(n)$ a vyjádřete $x(n)$ v *nejjednodušším možném* tvaru.

$\mathbf{f(t)}$	$\mathbf{F(p)}$
$\delta(t)$	1
$\mathbf{1}(t)$	$\frac{1}{p}$
$e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{p+\alpha}$
$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$
$\cos\omega t$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$

$\mathbf{f(t)}$	$\mathbf{F(p)}$
$e^{-\alpha t}\sin\omega t$	$\frac{\omega}{(p+\alpha)^2+\omega^2}$
$e^{-\alpha t}\cos\omega t$	$\frac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2+\omega^2}$
t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
$t^n e^{-\alpha t}$	$\frac{n!}{(p+\alpha)^{n+1}}$

$\mathbf{f(t)}$	$\mathbf{F(p)}$
$t\cos\omega t$	$\frac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}$
$t\sin\omega t$	$\frac{2\omega p}{(p^2+\omega^2)^2}$
$\sinh\varphi t$	$\frac{\varphi}{p^2-\varphi^2}$
$\cosh\varphi t$	$\frac{p}{p^2-\varphi^2}$
$t\sinh\varphi t$	$\frac{2\varphi p}{(p^2-\varphi^2)^2}$
$t\cosh\varphi t$	$\frac{p^2+\varphi^2}{(p^2-\varphi^2)^2}$

$\mathbf{f(n)}$	$\mathbf{F(z)}$	
$\delta(n)$	1	1
$\mathbf{1}(n)$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$\frac{z}{z-1}$
a^n	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$\frac{z}{z-a}$
$a^{n-1}-\frac{1}{a}\delta(n)$	$\frac{z^{-1}}{1-az^{-1}}$	$\frac{1}{z-a}$
na^{n-1}	$\frac{z^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\frac{z}{(z-a)^2}$
$(n+1)a^n$	$\frac{1}{(1-az^{-1})^2}$	$\frac{z^2}{(z-a)^2}$
n	$\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$	$\frac{z}{(z-1)^2}$
n^2	$\frac{z^{-1}(1+z^{-1})}{(1-z^{-1})^3}$	$\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$
$a^n\sin n\vartheta$	$\frac{az^{-1}\sin\vartheta}{1-2az^{-1}\cos\vartheta+a^2z^{-2}}$	$\frac{az\sin\vartheta}{z^2-2az\cos\vartheta+a^2}$
$a^n\cos n\vartheta$	$\frac{1-az^{-1}\cos\vartheta}{1-2az^{-1}\cos\vartheta+a^2z^{-2}}$	$\frac{z^2-az\cos\vartheta}{z^2-2az\cos\vartheta+a^2}$
$a^n\sinh n\varphi$	$\frac{az^{-1}\sinh\varphi}{1-2az^{-1}\cosh\varphi+a^2z^{-2}}$	$\frac{az\sinh\varphi}{z^2-2az\cosh\varphi+a^2}$
$a^n\cosh n\varphi$	$\frac{1-az^{-1}\cosh\varphi}{1-2az^{-1}\cosh\varphi+a^2z^{-2}}$	$\frac{z^2-az\cosh\varphi}{z^2-2az\cosh\varphi+a^2}$
$T_n(x)$	$\frac{1-xz^{-1}}{1-2xz^{-1}+z^{-2}}$	$\frac{z^2-xz}{z^2-2xz+1}$
$U_{n-1}(x)$	$\frac{z^{-1}}{1-2xz^{-1}+z^{-2}}$	$\frac{z}{z^2-2xz+1}$

Řešení příkladu 1 (L10173)

Zadání:

$$\begin{aligned} y''(t) + 6\,y'(t) + 8\,y(t) &= -5\,u(t), \\ u(t) &= e^{-3t}, \\ y(0) &= 2, \\ y'(0) &= -2. \end{aligned}$$

Řešení:

$$p^2 Y(p) - 2\,p + 2\, + 6\,(pY(p) - 2\,) + 8\,Y(p) = -5\frac{1}{p+3},$$

$$\begin{aligned} Y(p) &= \frac{2\,p^2 + 16\,p + 25}{(p+3)(p^2+6\,p+8)}, \\ H(p) &= \frac{-5}{p^2+6\,p+8} = \frac{-5}{(p+2)(p+4)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y(p) &= 5\frac{1}{p+3} - \frac{7}{2}\frac{1}{p+4} + \frac{1}{2}\frac{1}{p+2}, \\ H(p) &= -\frac{5}{2}\frac{1}{p+2} + \frac{5}{2}\frac{1}{p+4}, \end{aligned}$$

a z toho

$$\begin{aligned} y(t) &= 5\,e^{-3t} - \frac{7}{2}\,e^{-4t} + \frac{1}{2}\,e^{-2t}, \\ h(t) &= -\frac{5}{2}\,e^{-2t} + \frac{5}{2}\,e^{-4t}. \end{aligned}$$

Řešení příkladu 2 (Z20709)

Zadání:

$$\begin{aligned} x(n+2) + 7\,x(n+1) + 10\,x(n) &= -4 \cdot n \cdot (-4)^{n-1}, \\ x(0) &= -2, \\ x(1) &= 2. \end{aligned}$$

Řešení:

$$z^2\,X(z) + 2\,z^2 - 2\,z + 7z\,\left(X(z) + 2\right) + 10\,X(z) = -4\frac{z}{(z+4)^2}$$

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{-2\,z^3 - 28\,z^2 - 128\,z - 196}{(z+4)^2(z^2+7\,z+10)},$$

$$X(z) = 2\frac{z}{(z+4)^2} + 1\frac{z}{z+4} + 2\frac{z}{z+5} - 3\frac{z}{z+2},$$

a z toho

$$x(n) = 2\,n \cdot (-4)^{n-1} \; + 1\,(-4)^n \; + 2\,(-5)^n \; - 3\,(-2)^n.$$

Zápočtový početní test z MSAP

Místo: Praha

Datum: 13. května 2010, 9:10 L20192/Z10427

Jméno a příjmení:

Tabulku vzorů a obrazů Laplaceovy a $\mathcal{Z}$-transformace nalezneta na druhé straně tohoto listu.

Příklad 1 (L20192)

LTI systém je popsán diferenciální rovnicí

$$\begin{aligned} y''(t) - 9\,y'(t) + 18\,y(t) &= -8\,te^{5t}, \\ y(0) &= 2, \\ y'(0) &= -1. \end{aligned}$$

Najděte její řešení pomocí Laplaceovy transformace: Vyjádřete $Y(p)$. Pokud je to třeba, proveďte rozklad na parciální zlomky a určete jejich koeficienty. Proveďte zpětnou transformaci a vyjádřete $y(t)$ v *nejjednodušším možném* tvaru.

Příklad 2 (Z10427)

Nalezněte průběh výstupní posloupnosti systému

$$\begin{aligned} x(n+2) - 5\,x(n+1) + 6\,x(n) &= -2 \cdot u(n), \\ u(n) &= (4)^n, \\ x(0) &= 2, \\ x(1) &= 1 \end{aligned}$$

pomocí $\mathcal{Z}$-transformace: Vyjádřete $X(z)$. Pokud je to nutné, proveďte rozklad na parciální zlomky (mějte při tom na paměti, že pokud stupeň polynomu v čitateli je roven stupni polynomu ve jmenovateli, je třeba před rozkladem se zlomkem něco provést). Proveďte zpětnou transformaci $X(z) \to x(n)$ a vyjádřete $x(n)$ v *nejjednodušším možném* tvaru.

Nalezněte přenosovou funkci a impulsní odezvu. Bude systém stabilní?

$\mathbf{f(t)}$	$\mathbf{F(p)}$
$\delta(t)$	1
$\mathbf{1}(t)$	$\dfrac{1}{p}$
$e^{-\alpha t}$	$\dfrac{1}{p+\alpha}$
$\sin\omega t$	$\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$
$\cos\omega t$	$\dfrac{p}{p^2+\omega^2}$

$\mathbf{f(t)}$	$\mathbf{F(p)}$
$e^{-\alpha t}\sin\omega t$	$\dfrac{\omega}{(p+\alpha)^2+\omega^2}$
$e^{-\alpha t}\cos\omega t$	$\dfrac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2+\omega^2}$
t^n	$\dfrac{n!}{p^{n+1}}$
$t^n e^{-\alpha t}$	$\dfrac{n!}{(p+\alpha)^{n+1}}$

$\mathbf{f(t)}$	$\mathbf{F(p)}$
$t\cos\omega t$	$\dfrac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}$
$t\sin\omega t$	$\dfrac{2\omega p}{(p^2+\omega^2)^2}$
$\sinh\varphi t$	$\dfrac{\varphi}{p^2-\varphi^2}$
$\cosh\varphi t$	$\dfrac{p}{p^2-\varphi^2}$
$t\sinh\varphi t$	$\dfrac{2\varphi p}{(p^2-\varphi^2)^2}$
$t\cosh\varphi t$	$\dfrac{p^2+\varphi^2}{(p^2-\varphi^2)^2}$

$\mathbf{f(n)}$	$\mathbf{F(z)}$	
$\delta(n)$	1	1
$\mathbf{1}(n)$	$\dfrac{1}{1-z^{-1}}$	$\dfrac{z}{z-1}$
a^n	$\dfrac{1}{1-az^{-1}}$	$\dfrac{z}{z-a}$
$a^{n-1}-\dfrac{1}{a}\delta(n)$	$\dfrac{z^{-1}}{1-az^{-1}}$	$\dfrac{1}{z-a}$
na^{n-1}	$\dfrac{z^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\dfrac{z}{(z-a)^2}$
$(n+1)a^n$	$\dfrac{1}{(1-az^{-1})^2}$	$\dfrac{z^2}{(z-a)^2}$
n	$\dfrac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$	$\dfrac{z}{(z-1)^2}$
n^2	$\dfrac{z^{-1}(1+z^{-1})}{(1-z^{-1})^3}$	$\dfrac{z(z+1)}{(z-1)^3}$
$a^n\sin n\vartheta$	$\dfrac{az^{-1}\sin\vartheta}{1-2az^{-1}\cos\vartheta+a^2z^{-2}}$	$\dfrac{az\sin\vartheta}{z^2-2az\cos\vartheta+a^2}$
$a^n\cos n\vartheta$	$\dfrac{1-az^{-1}\cos\vartheta}{1-2az^{-1}\cos\vartheta+a^2z^{-2}}$	$\dfrac{z^2-az\cos\vartheta}{z^2-2az\cos\vartheta+a^2}$
$a^n\sinh n\varphi$	$\dfrac{az^{-1}\sinh\varphi}{1-2az^{-1}\cosh\varphi+a^2z^{-2}}$	$\dfrac{az\sinh\varphi}{z^2-2az\cosh\varphi+a^2}$
$a^n\cosh n\varphi$	$\dfrac{1-az^{-1}\cosh\varphi}{1-2az^{-1}\cosh\varphi+a^2z^{-2}}$	$\dfrac{z^2-az\cosh\varphi}{z^2-2az\cosh\varphi+a^2}$
$T_n(x)$	$\dfrac{1-xz^{-1}}{1-2xz^{-1}+z^{-2}}$	$\dfrac{z^2-xz}{z^2-2xz+1}$
$U_{n-1}(x)$	$\dfrac{z^{-1}}{1-2xz^{-1}+z^{-2}}$	$\dfrac{z}{z^2-2xz+1}$

Řešení příkladu 1 (L20192)

Zadání:

$$\begin{aligned} y''(t) - 9\,y'(t) + 18\,y(t) &= -8\,te^{5t}, \\ y(0) &= 2, \\ y'(0) &= -1. \end{aligned}$$

Řešení:

$$p^2Y(p) - 2\,p + 1\; - 9\,(pY(p) - 2\,) + 18\,Y(p) = -8\frac{1}{(p-5)^2},$$

$$Y(p) = \frac{2\,p^3 - 39\,p^2 + 240\,p - 483}{(p-5)^2(p^2 - 9\,p + 18)},$$

$$Y(p) = 4\frac{1}{(p-5)^2} + 2\frac{1}{p-5} - 5\frac{1}{p-6} + 5\frac{1}{p-3},$$

a z toho

$$y(t) = 4\,te^{5t} + 2\,e^{5t} - 5\,e^{6t} + 5\,e^{3t}.$$

Řešení příkladu 2 (Z10427)

Zadání:

$$\begin{aligned} x(n+2) - 5\,x(n+1) + 6\,x(n) &= -2 \cdot u(n), \\ u(n) &= (4)^n, \\ x(0) &= 2, \\ x(1) &= 1. \end{aligned}$$

Řešení:

$$z^2\,X(z) - 2\,z^2 - 1\,z - 5z\;(X(z) - 2) + 6\,X(z) = -2\frac{z}{z-4}$$

$$\begin{aligned} \frac{X(z)}{z} &= \frac{2\,z^2 - 17\,z + 34}{(z-4)(z^2 - 5\,z + 6)}, \\ \frac{H(z)}{z} &= \frac{-2}{z^2 - 5\,z + 6} = \frac{-2}{(z-2)(z-3)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X(z) &= 4\frac{z}{z-2} - 1\frac{z}{z-4} - 1\frac{z}{z-3} \\ H(z) &= 2\frac{1}{z-2} - 2\frac{1}{z-3}, \end{aligned}$$

a z toho

$$\begin{aligned} x(n) &= 4\,(+2)^n\; - 1\,(+4)^n\; - 1\,(+3)^n \\ h(n) &= 2\,(+2)^n + \frac{1}{-2}\,\delta(n)\; - 2\,(+3)^n + \frac{1}{-3}\,\delta(n). \end{aligned}$$

Zápočtový početní test z MSAP

Místo: Praha

Datum: 13. května 2010, 10:20 L10278/Z20161

Jméno a příjmení:

Tabulku vzorů a obrazů Laplaceovy a $\mathcal{Z}$-transformace nalezneta na druhé straně tohoto listu.

Příklad 1 (L10278)

LTI systém je popsán diferenciální rovnicí

$$\begin{aligned} y''(t) + 7\,y'(t) + 10\,y(t) &= 6\,u(t), \\ u(t) &= e^{-3t}, \\ y(0) &= -2, \\ y'(0) &= 1. \end{aligned}$$

Najděte průběh signálu na výstupu systému. Použijte k tomu Laplaceovu transformaci: Vyjádřete $Y(p)$. Pokud je to třeba, proveďte rozklad na parciální zlomky a určete jejich koeficienty. Proveďte zpětnou transformaci a vyjádřete $y(t)$ v *nejjednodušším možném* tvaru.

Nalezněte přenosovou funkci a impulsní odezvu. Bude systém stabilní?

Příklad 2 (Z20161)

Řešte diferenční rovnici

$$\begin{aligned} x(n+2) + 9\,x(n+1) + 20\,x(n) &= 6 \cdot n \cdot (-3)^{n-1}, \\ x(0) &= -1, \\ x(1) &= -2 \end{aligned}$$

pomocí $\mathcal{Z}$-transformace: Vyjádřete $X(z)$. Pokud je to nutné, proveďte rozklad na parciální zlomky (mějte při tom na paměti, že pokud stupeň polynomu v čitateli je roven stupni polynomu ve jmenovateli, je třeba před rozkladem se zlomkem něco provést). Proveďte zpětnou transformaci $X(z) \to x(n)$ a vyjádřete $x(n)$ v *nejjednodušším možném* tvaru.

$\mathbf{f(t)}$	$\mathbf{F(p)}$
$\delta(t)$	1
$\mathbf{1}(t)$	$\frac{1}{p}$
$e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{p+\alpha}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$
$\cos \omega t$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$

$\mathbf{f(t)}$	$\mathbf{F(p)}$
$e^{-\alpha t}\sin \omega t$	$\frac{\omega}{(p+\alpha)^2+\omega^2}$
$e^{-\alpha t}\cos \omega t$	$\frac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2+\omega^2}$
t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
$t^n e^{-\alpha t}$	$\frac{n!}{(p+\alpha)^{n+1}}$

$\mathbf{f(t)}$	$\mathbf{F(p)}$
$t\cos \omega t$	$\frac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}$
$t\sin \omega t$	$\frac{2\omega p}{(p^2+\omega^2)^2}$
$\sinh \varphi t$	$\frac{\varphi}{p^2-\varphi^2}$
$\cosh \varphi t$	$\frac{p}{p^2-\varphi^2}$
$t\sinh \varphi t$	$\frac{2\varphi p}{(p^2-\varphi^2)^2}$
$t\cosh \varphi t$	$\frac{p^2+\varphi^2}{(p^2-\varphi^2)^2}$

$\mathbf{f(n)}$	$\mathbf{F(z)}$	
$\delta(n)$	1	1
$\mathbf{1}(n)$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$\frac{z}{z-1}$
a^n	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$\frac{z}{z-a}$
$a^{n-1}-\frac{1}{a}\delta(n)$	$\frac{z^{-1}}{1-az^{-1}}$	$\frac{1}{z-a}$
na^{n-1}	$\frac{z^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\frac{z}{(z-a)^2}$
$(n+1)a^n$	$\frac{1}{(1-az^{-1})^2}$	$\frac{z^2}{(z-a)^2}$
n	$\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$	$\frac{z}{(z-1)^2}$
n^2	$\frac{z^{-1}(1+z^{-1})}{(1-z^{-1})^3}$	$\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$
$a^n \sin n\vartheta$	$\frac{az^{-1}\sin\vartheta}{1-2az^{-1}\cos\vartheta+a^2z^{-2}}$	$\frac{az\sin\vartheta}{z^2-2az\cos\vartheta+a^2}$
$a^n \cos n\vartheta$	$\frac{1-az^{-1}\cos\vartheta}{1-2az^{-1}\cos\vartheta+a^2z^{-2}}$	$\frac{z^2-az\cos\vartheta}{z^2-2az\cos\vartheta+a^2}$
$a^n \sinh n\varphi$	$\frac{az^{-1}\sinh\varphi}{1-2az^{-1}\cosh\varphi+a^2z^{-2}}$	$\frac{az\sinh\varphi}{z^2-2az\cosh\varphi+a^2}$
$a^n \cosh n\varphi$	$\frac{1-az^{-1}\cosh\varphi}{1-2az^{-1}\cosh\varphi+a^2z^{-2}}$	$\frac{z^2-az\cosh\varphi}{z^2-2az\cosh\varphi+a^2}$
$T_n(x)$	$\frac{1-xz^{-1}}{1-2xz^{-1}+z^{-2}}$	$\frac{z^2-xz}{z^2-2xz+1}$
$U_{n-1}(x)$	$\frac{z^{-1}}{1-2xz^{-1}+z^{-2}}$	$\frac{z}{z^2-2xz+1}$

Řešení příkladu 1 (L10278)

Zadání:

$$\begin{aligned} y''(t) + 7\,y'(t) + 10\,y(t) &= 6\,u(t), \\ u(t) &= e^{-3t}, \\ y(0) &= -2, \\ y'(0) &= 1. \end{aligned}$$

Řešení:

$$p^2 Y(p) + 2\,p - 1\ + 7\,(pY(p) + 2\ ) + 10\,Y(p) = 6\frac{1}{p+3},$$

$$\begin{aligned} Y(p) &= \frac{-2\,p^2 - 19\,p - 33}{(p+3)(p^2 + 7\,p + 10)}, \\ H(p) &= \frac{6}{p^2 + 7\,p + 10} = \frac{6}{(p+2)(p+5)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y(p) &= -3\frac{1}{p+3} + 2\frac{1}{p+5} - 1\frac{1}{p+2}, \\ H(p) &= 2\frac{1}{p+2} - 2\frac{1}{p+5}, \end{aligned}$$

a z toho

$$\begin{aligned} y(t) &= -3\,e^{-3t} + 2\,e^{-5t} - 1\,e^{-2t}, \\ h(t) &= 2\,e^{-2t} - 2\,e^{-5t}. \end{aligned}$$

Řešení příkladu 2 (Z20161)

Zadání:

$$\begin{aligned} x(n+2) + 9\,x(n+1) + 20\,x(n) &= 6 \cdot n \cdot (-3)^{n-1}, \\ x(0) &= -1, \\ x(1) &= -2. \end{aligned}$$

Řešení:

$$z^2\,X(z) + 1\,z^2 + 2\,z + 9z\ (X(z) + 1) + 20\,X(z) = 6\frac{z}{(z+3)^2}$$

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{-z^3 - 17\,z^2 - 75\,z - 93}{(z+3)^2(z^2 + 9\,z + 20)},$$

$$X(z) = 3\frac{z}{(z+3)^2} + \frac{9}{2}\frac{z}{z+3} - 1\frac{z}{z+4} + \frac{9}{2}\frac{z}{z+5},$$

a z toho

$$x(n) = 3\,n \cdot (-3)^{n-1}\ + \frac{9}{2}\,(-3)^n\ - 1\,(-4)^n\ + \frac{9}{2}\,(-5)^n.$$

Zápočtový početní test z MSAP

Místo: Praha

Datum: 13. května 2010, 10:20 L20890/Z10158

Jméno a příjmení:

Tabulku vzorů a obrazů Laplaceovy a $\mathcal{Z}$-transformace nalezneta na druhé straně tohoto listu.

Příklad 1 (L20890)

LTI systém je popsán diferenciální rovnicí

$$
\begin{aligned}
y''(t) + 7\,y'(t) + 12\,y(t) &= -2\,te^{-5t}, \\
y(0) &= -2, \\
y'(0) &= 3.
\end{aligned}
$$

Najděte její řešení pomocí Laplaceovy transformace: Vyjádřete $Y(p)$. Pokud je to třeba, proveďte rozklad na parciální zlomky a určete jejich koeficienty. Proveďte zpětnou transformaci a vyjádřete $y(t)$ v *nejjednodušším možném* tvaru.

Příklad 2 (Z10158)

Nalezněte průběh výstupní posloupnosti systému

$$
\begin{aligned}
x(n+2) + 6\,x(n+1) + 8\,x(n) &= 2 \cdot u(n), \\
u(n) &= (-3)^n, \\
x(0) &= 2, \\
x(1) &= -3
\end{aligned}
$$

pomocí $\mathcal{Z}$-transformace: Vyjádřete $X(z)$. Pokud je to nutné, proveďte rozklad na parciální zlomky (mějte při tom na paměti, že pokud stupeň polynomu v čitateli je roven stupni polynomu ve jmenovateli, je třeba před rozkladem se zlomkem něco provést). Proveďte zpětnou transformaci $X(z) \to x(n)$ a vyjádřete $x(n)$ v *nejjednodušším možném* tvaru.

Nalezněte přenosovou funkci a impulsní odezvu. Bude systém stabilní?

$\mathbf{f(t)}$	$\mathbf{F(p)}$
$\delta(t)$	1
$\mathbf{1}(t)$	$\frac{1}{p}$
$e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{p+\alpha}$
$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$
$\cos\omega t$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$

$\mathbf{f(t)}$	$\mathbf{F(p)}$
$e^{-\alpha t}\sin\omega t$	$\frac{\omega}{(p+\alpha)^2+\omega^2}$
$e^{-\alpha t}\cos\omega t$	$\frac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2+\omega^2}$
t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
$t^n e^{-\alpha t}$	$\frac{n!}{(p+\alpha)^{n+1}}$

$\mathbf{f(t)}$	$\mathbf{F(p)}$
$t\cos\omega t$	$\frac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}$
$t\sin\omega t$	$\frac{2\omega p}{(p^2+\omega^2)^2}$
$\sinh\varphi t$	$\frac{\varphi}{p^2-\varphi^2}$
$\cosh\varphi t$	$\frac{p}{p^2-\varphi^2}$
$t\sinh\varphi t$	$\frac{2\varphi p}{(p^2-\varphi^2)^2}$
$t\cosh\varphi t$	$\frac{p^2+\varphi^2}{(p^2-\varphi^2)^2}$

$\mathbf{f(n)}$	$\mathbf{F(z)}$	
$\delta(n)$	1	1
$\mathbf{1}(n)$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$\frac{z}{z-1}$
a^n	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$\frac{z}{z-a}$
$a^{n-1}-\frac{1}{a}\delta(n)$	$\frac{z^{-1}}{1-az^{-1}}$	$\frac{1}{z-a}$
na^{n-1}	$\frac{z^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\frac{z}{(z-a)^2}$
$(n+1)a^n$	$\frac{1}{(1-az^{-1})^2}$	$\frac{z^2}{(z-a)^2}$
n	$\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$	$\frac{z}{(z-1)^2}$
n^2	$\frac{z^{-1}(1+z^{-1})}{(1-z^{-1})^3}$	$\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$
$a^n\sin n\vartheta$	$\frac{az^{-1}\sin\vartheta}{1-2az^{-1}\cos\vartheta+a^2z^{-2}}$	$\frac{az\sin\vartheta}{z^2-2az\cos\vartheta+a^2}$
$a^n\cos n\vartheta$	$\frac{1-az^{-1}\cos\vartheta}{1-2az^{-1}\cos\vartheta+a^2z^{-2}}$	$\frac{z^2-az\cos\vartheta}{z^2-2az\cos\vartheta+a^2}$
$a^n\sinh n\varphi$	$\frac{az^{-1}\sinh\varphi}{1-2az^{-1}\cosh\varphi+a^2z^{-2}}$	$\frac{az\sinh\varphi}{z^2-2az\cosh\varphi+a^2}$
$a^n\cosh n\varphi$	$\frac{1-az^{-1}\cosh\varphi}{1-2az^{-1}\cosh\varphi+a^2z^{-2}}$	$\frac{z^2-az\cosh\varphi}{z^2-2az\cosh\varphi+a^2}$
$T_n(x)$	$\frac{1-xz^{-1}}{1-2xz^{-1}+z^{-2}}$	$\frac{z^2-xz}{z^2-2xz+1}$
$U_{n-1}(x)$	$\frac{z^{-1}}{1-2xz^{-1}+z^{-2}}$	$\frac{z}{z^2-2xz+1}$

Řešení příkladu 1 (L20890)

Zadání:

$$\begin{aligned} y''(t) + 7\,y'(t) + 12\,y(t) &= -2\,te^{-5t}, \\ y(0) &= -2, \\ y'(0) &= 3. \end{aligned}$$

Řešení:

$$p^2Y(p) + 2\,p - 3 \; + 7\,(pY(p) + 2\;) + 12\,Y(p) = -2\frac{1}{(p+5)^2},$$

$$Y(p) = \frac{-2\,p^3 - 31\,p^2 - 160\,p - 277}{(p+5)^2(p^2 + 7\,p + 12)},$$

$$Y(p) = -1\frac{1}{(p+5)^2} - \frac{3}{2}\frac{1}{p+5} + 5\frac{1}{p+4} - \frac{11}{2}\frac{1}{p+3},$$

a z toho

$$y(t) = -1\,te^{-5t} - \frac{3}{2}\,e^{-5t} + 5\,e^{-4t} - \frac{11}{2}\,e^{-3t}.$$

Řešení příkladu 2 (Z10158)

Zadání:

$$\begin{aligned} x(n+2) + 6\,x(n+1) + 8\,x(n) &= 2 \cdot u(n), \\ u(n) &= (-3)^n, \\ x(0) &= 2, \\ x(1) &= -3. \end{aligned}$$

Řešení:

$$z^2\,X(z) - 2\,z^2 + 3\,z + 6z\;(X(z) - 2) + 8\,X(z) = 2\frac{z}{z+3}$$

$$\begin{aligned} \frac{X(z)}{z} &= \frac{2\,z^2 + 15\,z + 29}{(z+3)(z^2 + 6\,z + 8)}, \\ \frac{H(z)}{z} &= \frac{2}{z^2 + 6\,z + 8} = \frac{2}{(z+4)(z+2)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{1}{2}\frac{z}{z+4} - 2\frac{z}{z+3} + \frac{7}{2}\frac{z}{z+2} \\ H(z) &= -1\frac{1}{z+4} + 1\frac{1}{z+2}, \end{aligned}$$

a z toho

$$\begin{aligned} x(n) &= \frac{1}{2}\,(-4)^n \; - 2\,(-3)^n \; + \frac{7}{2}\,(-2)^n \\ h(n) &= -1\,(-4)^n + \frac{1}{4}\,\delta(n) \; + 1\,(-2)^n + \frac{1}{2}\,\delta(n). \end{aligned}$$

Zápočtový početní test z MSAP

Místo: Praha

Datum: 13. května 2010, 10:20 L10630/Z20275

Jméno a příjmení:

Tabulku vzorů a obrazů Laplaceovy a $\mathcal{Z}$-transformace nalezneta na druhé straně tohoto listu.

Příklad 1 (L10630)

LTI systém je popsán diferenciální rovnicí

$$\begin{aligned} y''(t) + 6\,y'(t) + 8\,y(t) &= 2\,u(t), \\ u(t) &= e^{-3t}, \\ y(0) &= -3, \\ y'(0) &= -1. \end{aligned}$$

Najděte průběh signálu na výstupu systému. Použijte k tomu Laplaceovu transformaci: Vyjádřete $Y(p)$. Pokud je to třeba, proveďte rozklad na parciální zlomky a určete jejich koeficienty. Proveďte zpětnou transformaci a vyjádřete $y(t)$ v *nejjednodušším možném* tvaru.

Nalezněte přenosovou funkci a impulsní odezvu. Bude systém stabilní?

Příklad 2 (Z20275)

Řešte diferenční rovnici

$$\begin{aligned} x(n+2) + 7\,x(n+1) + 10\,x(n) &= -8 \cdot n \cdot (-3)^{n-1}, \\ x(0) &= -1, \\ x(1) &= 1 \end{aligned}$$

pomocí $\mathcal{Z}$-transformace: Vyjádřete $X(z)$. Pokud je to nutné, proveďte rozklad na parciální zlomky (mějte při tom na paměti, že pokud stupeň polynomu v čitateli je roven stupni polynomu ve jmenovateli, je třeba před rozkladem se zlomkem něco provést). Proveďte zpětnou transformaci $X(z) \to x(n)$ a vyjádřete $x(n)$ v *nejjednodušším možném* tvaru.

$\mathbf{f(t)}$	$\mathbf{F(p)}$
$\delta(t)$	1
$\mathbf{1}(t)$	$\frac{1}{p}$
$e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{p+\alpha}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$
$\cos \omega t$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$

$\mathbf{f(t)}$	$\mathbf{F(p)}$
$e^{-\alpha t}\sin \omega t$	$\frac{\omega}{(p+\alpha)^2+\omega^2}$
$e^{-\alpha t}\cos \omega t$	$\frac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2+\omega^2}$
t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
$t^n e^{-\alpha t}$	$\frac{n!}{(p+\alpha)^{n+1}}$

$\mathbf{f(t)}$	$\mathbf{F(p)}$
$t\cos \omega t$	$\frac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}$
$t\sin \omega t$	$\frac{2\omega p}{(p^2+\omega^2)^2}$
$\sinh \varphi t$	$\frac{\varphi}{p^2-\varphi^2}$
$\cosh \varphi t$	$\frac{p}{p^2-\varphi^2}$
$t\sinh \varphi t$	$\frac{2\varphi p}{(p^2-\varphi^2)^2}$
$t\cosh \varphi t$	$\frac{p^2+\varphi^2}{(p^2-\varphi^2)^2}$

$\mathbf{f(n)}$	$\mathbf{F(z)}$	
$\delta(n)$	1	1
$\mathbf{1}(n)$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$\frac{z}{z-1}$
a^n	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$\frac{z}{z-a}$
$a^{n-1}-\frac{1}{a}\delta(n)$	$\frac{z^{-1}}{1-az^{-1}}$	$\frac{1}{z-a}$
na^{n-1}	$\frac{z^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\frac{z}{(z-a)^2}$
$(n+1)a^n$	$\frac{1}{(1-az^{-1})^2}$	$\frac{z^2}{(z-a)^2}$
n	$\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$	$\frac{z}{(z-1)^2}$
n^2	$\frac{z^{-1}(1+z^{-1})}{(1-z^{-1})^3}$	$\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$
$a^n \sin n\vartheta$	$\frac{az^{-1}\sin\vartheta}{1-2az^{-1}\cos\vartheta+a^2z^{-2}}$	$\frac{az\sin\vartheta}{z^2-2az\cos\vartheta+a^2}$
$a^n \cos n\vartheta$	$\frac{1-az^{-1}\cos\vartheta}{1-2az^{-1}\cos\vartheta+a^2z^{-2}}$	$\frac{z^2-az\cos\vartheta}{z^2-2az\cos\vartheta+a^2}$
$a^n \sinh n\varphi$	$\frac{az^{-1}\sinh\varphi}{1-2az^{-1}\cosh\varphi+a^2z^{-2}}$	$\frac{az\sinh\varphi}{z^2-2az\cosh\varphi+a^2}$
$a^n \cosh n\varphi$	$\frac{1-az^{-1}\cosh\varphi}{1-2az^{-1}\cosh\varphi+a^2z^{-2}}$	$\frac{z^2-az\cosh\varphi}{z^2-2az\cosh\varphi+a^2}$
$T_n(x)$	$\frac{1-xz^{-1}}{1-2xz^{-1}+z^{-2}}$	$\frac{z^2-xz}{z^2-2xz+1}$
$U_{n-1}(x)$	$\frac{z^{-1}}{1-2xz^{-1}+z^{-2}}$	$\frac{z}{z^2-2xz+1}$

Řešení příkladu 1 (L10630)

Zadání:

$$\begin{aligned} y''(t) + 6\,y'(t) + 8\,y(t) &= 2\,u(t), \\ u(t) &= e^{-3t}, \\ y(0) &= -3, \\ y'(0) &= -1. \end{aligned}$$

Řešení:

$$p^2 Y(p) + 3\,p + 1\, + 6\,(pY(p) + 3\,) + 8\,Y(p) = 2\frac{1}{p+3},$$

$$\begin{aligned} Y(p) &= \frac{-3\,p^2 - 28\,p - 55}{(p+3)(p^2+6\,p+8)}, \\ H(p) &= \frac{2}{p^2+6\,p+8} = \frac{2}{(p+4)(p+2)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y(p) &= -2\frac{1}{p+3} - \frac{11}{2}\frac{1}{p+2} + \frac{9}{2}\frac{1}{p+4}, \\ H(p) &= -1\frac{1}{p+4} + 1\frac{1}{p+2}, \end{aligned}$$

a z toho

$$\begin{aligned} y(t) &= -2\,e^{-3t} - \frac{11}{2}\,e^{-2t} + \frac{9}{2}\,e^{-4t}, \\ h(t) &= -1\,e^{-4t} + 1\,e^{-2t}. \end{aligned}$$

Řešení příkladu 2 (Z20275)

Zadání:

$$\begin{aligned} x(n+2) + 7\,x(n+1) + 10\,x(n) &= -8 \cdot n \cdot (-3)^{n-1}, \\ x(0) &= -1, \\ x(1) &= 1. \end{aligned}$$

Řešení:

$$z^2\,X(z) + 1\,z^2 - 1\,z + 7z\,\left(X(z) + 1\right) + 10\,X(z) = -8\frac{z}{(z+3)^2}$$

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{-z^3 - 12\,z^2 - 45\,z - 62}{(z+3)^2(z^2+7\,z+10)},$$

$$X(z) = 4\frac{z}{(z+3)^2} - 2\frac{z}{z+3} - 4\frac{z}{z+2} + 1\frac{z}{z+5},$$

a z toho

$$x(n) = 4\,n \cdot (-3)^{n-1}\, - 2\,(-3)^n\, - 4\,(-2)^n\, + 1\,(-5)^n.$$