Modelování systémů a procesů

prof. Miroslav Vlček

3. března 2011

Obsah

Obsah

Obsah

Iterace rovnice ceny

Diferenční rovnici, kterou jsme odvodili

$$c(k) + \frac{\mathcal{C}}{\mathcal{D}}c(k-1) = \frac{\mathcal{B}-\mathcal{A}}{\mathcal{D}}x(k). \tag{1}$$

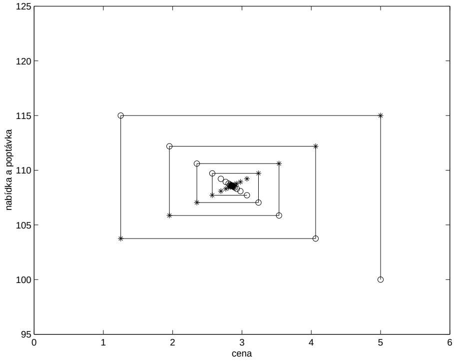
přepíšeme do kanonického tvaru

$$y(k) + \gamma y(k-1) = \beta x(k). \tag{2}$$

a postupnými iteracemi nalezneme pro $x(k) = 1(k)$

Iterace rovnice ceny

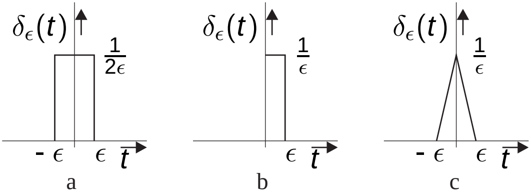
$$y(k) \quad = \quad \beta \sum_{m=0}^{k} (-\gamma)^m,$$



Obrázek: Dosadíme toto řešení do rovnic pro nabídku a poptávku a získáme pavučinkový diagram.

Jednotkový impuls

Tato funkce je definovány na časovém intervalu pro všechna t a její nenulovou hodnotu předpokládáme pouze v okolí bodu $t = 0$. Plocha těchto funkcí je rovna 1 pro každé $\varepsilon > 0$.



Obrázek: Konečná representace $\delta_\epsilon(t)$ pro $\epsilon > 0$.

Definujme funkci $\delta(t)$ jako $\delta(t) = \lim_{\epsilon \to 0} \delta_\epsilon(t)$.

Jednotkový impuls

Funkce $\delta(t)$ se nazývá Diracův impuls, Diracova δ-funkce nebo jednotkový impuls. Hodnota δ-funkce pro $t \neq 0$ je $\delta(t) = 0$. Její hodnota v $t = 0$ není definována jako funkce, a proto se používá integrální definice

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \delta(t)dt = \int_{0-}^{0+} \delta(t)dt = 1 \qquad (3)$$

pro každé $\epsilon > 0$.

Jednotkový skok

Funkce jednotkového skoku bývá obvykle značena $1(t)$ a je definována jako

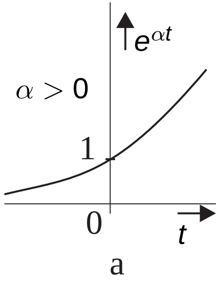
$$1(t) = \begin{cases} 1 & \text{pro } t \geq 0 \\ 0 & \text{pro } t < 0 \,. \end{cases} \tag{4}$$

Reálná exponenciála

Uvažujme exponenciální funkci

$$f(t) = e^{\alpha t}, \tag{5}$$

kde α je reálná konstanta, podle následujícího obrázku.



Obrázek: Reálná exponenciála a) pro $\alpha > 0$, b) pro $\alpha < 0$.

Periodická funkce

O spojitém signálu $f(t)$ říkáme, že je periodický s periodou T_P, jestliže platí

$$f(t+T_P)=f(t) \tag{6}$$

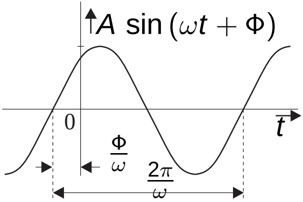
pro všechna T_P a platí

$$f(t)=f(t+T_P)=f(t+2T_P)=\cdots=f(t+kT_P)$$

pro všechna k celá čísla.

Sinusová funkce

$$f(t) = A \sin(\omega t + \Phi), \tag{7}$$



Obrázek: Sinusový signál.

Konstanty A, ω a Φ se nazývají amplituda, úhlová frekvence a fázový posuv. Sinusovka je periodická se základní periodou $T_P = 2\pi/\omega$.

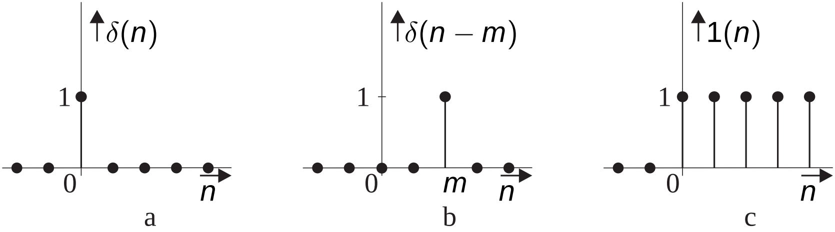
Vznik diskrétních signálů

- přirozeně např. průměrné denní teploty, denní kurzy, počty studentů
- vzorkováním spojitých signálů např. naměření teploty každou hodinu, měřením průtoku

Diskrétní jednotkový impuls

Diskrétní jednotkový impuls $\delta(n)$ je definován vztahem

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & \text{pro } n = 0 \\ 0 & \text{pro } n \neq 0 \,. \end{cases} \tag{8}$$



Obrázek: Diskrétní signály a) jednotkový impuls, b) posunutý jednotkový impuls, c) jednotkový skok.

Diskrétní jednotkový skok

Diskrétní jednotkový skok $1(n)$ je definován vztahem

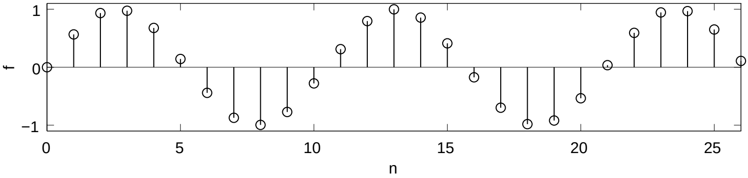
$$1(n) = \begin{cases} 1 & \text{pro } n \geq 0 \\ 0 & \text{pro } n < 0 \end{cases} \tag{9}$$

Diskrétní sinusová posloupnost

Mějme sinusový signál $f(t) = \sin \omega_0 t$ s periodou $T_P = 2\pi/\omega_0$. Pokud tento signál vzorkujeme s periodou $T > 0$, získáme diskrétní sinusový signál

$$f(nT) = \sin \omega_0 nT \ , \tag{10}$$

kde $n = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ldots$. Pokud není nutné uvádět periodou T, píšeme pouze $f(n)$.



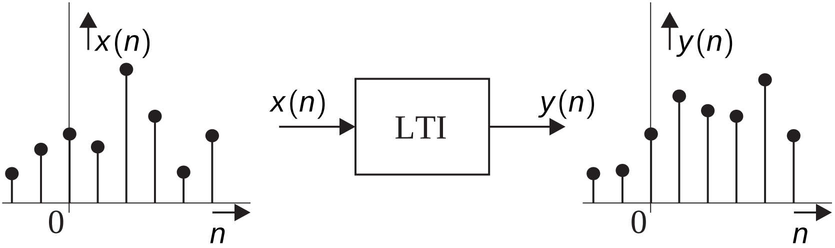
Diskrétní sinusová posloupnost

Diskrétní signál $f(n)$ je periodický, jestliže existuje kladné celé číslo N takové, že platí

$$f(n) = f(n+N) = f(n+2N) = \cdots = f(n+kN) \tag{11}$$

pro všechna n z intervalu $(-\infty,\ \infty)$ a pro libovolné celé k. N se nazývá perioda diskrétního signálu.

Diskrétní systém



Obrázek: Diskrétní LTI systém

Diskrétní systém

Odezvu na jednotkový impuls $\delta(n)$ budeme nazývat impulsní odezva $h(n)$

$$h(n) = \mathcal{S}\left[\delta(n)\right] \qquad \& \qquad h(n,m) = \mathcal{S}\left[\delta(n-m)\right] . \tag{12}$$

Odezvu na jednotkový skok $1(n)$

$$1(n) = \sum_{m=0}^{n} \delta(n-m) = \tag{13}$$
$$\delta(n) + \delta(n-1) + \cdots + \delta(1) + \delta(0) ,$$

nazveme přechodovou odezvou $s(n)$.

Diskrétní systém

...a platí

$$s(n) = \mathcal{S}\left[1(n)\right] = \mathcal{S}\left[\sum_{m=0}^{n} \delta(n-m)\right] \tag{14}$$
$$= \sum_{m=0}^{n} \mathcal{S}\left[\delta(n-m)\right] = \sum_{m=0}^{n} h(n,m)\,.$$

Postupná úprava rovnice (14) je umožněna právě díky linearitě systému, kterou budeme studovat pro obecný vstupní signál

$$x(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\delta(n-m)\,. \tag{15}$$

Lineární systém

Řekli jsme si, že systém není nic jiného, než černá skříňka black box, kterou se pokoušíme nejprve identifikovat a poté reprodukovat. Při identifikaci se nejprve ptáme, zda se jedná o systém lineární.

Pro vstupní $x(n)$ a výstupní $y(n)$ signál pak platí princip superpozice

$$\begin{aligned} y(n) &= \mathcal{S}\left[x(n)\right] = \mathcal{S}\left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\delta(n-m)\right] \qquad (16) \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\mathcal{S}\left[\delta(n-m)\right] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n,m) \end{aligned}$$

Příklad lineárního systému $y(n) + ay(n-1) = x(n)$

Kombinací dvou různých vstupních signálů
$x(n) = a_1 x_1(n) + a_2 x_2(n)$

$$\begin{aligned} a_1\left[y_1(n) + ay_1(n-1)\right] &= a_1 x_1(n) \\ a_2\left[y_2(n) + ay_2(n-1)\right] &= a_2 x_2(n) \end{aligned}$$

dostanem lineární kombinaci výstupních signálů a pro
$y(n) = a_1 y_1(n) + a_2 y_2(n)$ platí

$$y(n) + ay(n-1) = x(n)\,.$$

Příklad nelineárního systému

Numerický výpočet odmocniny

$$y(n) = \frac{1}{2}\left[y(n-1) + \frac{x(n-1)}{y(n-1)}\right] . \qquad (17)$$

Odmocnina z čísla 10 je s přesností na 10 desetinných míst rovna $\sqrt{10} = 3.16227766017$. Pro $x(n-1) \equiv x(0) = 10$ dostáváme postupně

$$\begin{array}{ll}
y(1) = 3 & y^2(1) = 9 \\
y(2) = 3.165 & y^2(2) = 10.017225 \\
y(3) = 3.162278 & y^2(3) = 10.00000214928 \\
y(4) = 3.1622776601 & y^2(3) = 9.999999999568 \\
\vdots & \vdots
\end{array}$$

Časově invariantní systém

Systém se nazývá časově invariantní, jestliže jsou všechny události závislé pouze na časovém intervalu (rozdílu časových událostí) $n - m$ nikoliv na každém časovém okamžiku n a m samostatně.

$$
\begin{aligned}
\text{dneska}\ldots \quad y(n) &= \mathcal{S}\left[x(n)\right] \\
\text{včera}\ldots \quad y(n-1) &= \mathcal{S}\left[x(n-1)\right] \qquad (18) \\
&\vdots \qquad (19)
\end{aligned}
$$

Potom také rovnice (12) pro impulsní odezvu přejde z maticového tvaru na prostý vektorový zápis

$$
h(n,m) \rightarrow h(n-m) = \mathcal{S}\left[\delta(n-m)\right] . \qquad (20)
$$

Konvoluce

V důsledku časové invariance dostáváme z rovnice (16) konvoluční sumu

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(n-m)x(m) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k)\,, \tag{21}$$

která bývá občas značená

$$y(n) = h(n) * x(n)\,. \tag{22}$$

Příklad časově invariantního systému

Uvažujme mikroekonomický systém variace ceny popsaný diferenční rovnici

$$y(n) + ay(n-1) = x(n)\,. \tag{23}$$

Protože její koeficienty nezávisí na čase, tj. a není funkcí n, zachovává tato rovnice tvar při záměně $n \to n - m$ tvar. Impulsní odezva je potom

$$h(n) = (-a)^n 1(n) \tag{24}$$

Příklad časově proměnného systému

Uvažujme diferenční rovnici

$$y(n) + ny(n-1) = x(n)\,. \tag{25}$$

Protože koeficient u $y(n-1)$ závisí na čase, nezachovává tato rovnice tvar při záměně $n \to n-m$ tvar. Impulsní odezvu lze psát ve tvaru

$$h(n) = (-1)^n n! 1(n) \tag{26}$$

Kauzální systém

Výstupní signál $y(n)$ kauzálního systému závisí pouze na současných a minulých hodnotách vstupního signálu $\{x(n), x(n-1), x(n-2), \dots\}$ takže v konvoluční sumě (21)

$$\begin{aligned} y(n) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{-1} h(k)x(n-k) + \sum_{k=0}^{\infty} h(k)x(n-k) \end{aligned} \tag{27}$$

musíme položit všechny členy impulsní odezvy $h(k) = 0$ pro $k < 0$.

Kauzální systém

Konvoluční suma pro lineární, časově invariantní a kauzální systém má tvar

$$y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)x(n-k)\,. \tag{28}$$

Jestliže navíc budeme požadovat, aby vstupní a výstupní signály měly dobře definovaný počátek, tj. aby $x(n) \neq 0, y(n) \neq 0$ pouze pro $n \geq 0$, potom platí

$$y(n) = \sum_{k=0}^{n} h(k)x(n-k) = \sum_{k=0}^{n} x(k)h(n-k)\,. \tag{29}$$

Spojitý systém

V případě spojitého času postupujeme podobně a odvodíme pro lineární časově invariantní systém konvoluční integrál

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau\,. \qquad (30)$$

Uvedený integrál opět nazýváme konvolucí a velmi často ho označujeme jako

$$y(t) = h(t) * x(t)\,. \qquad (31)$$

Spojitý systém

Funkce $h(t)$ se nazývá impulsní odezva. Jedná se o výstup systému, na jehož vstupu se uplatní Diracův impuls $x(t) = \delta(t)$. Platí totiž

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\delta(t-\tau)d\tau = h(t)\,. \tag{32}$$

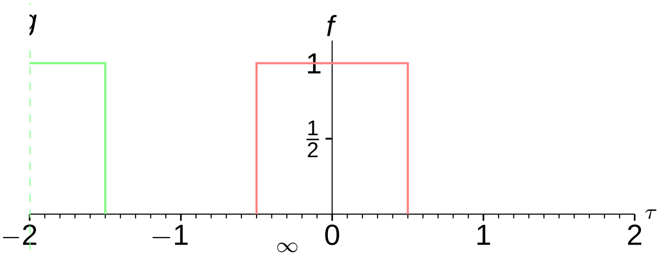
Kauzální systém

Z důvodů, které klademe na kauzální chování systému je

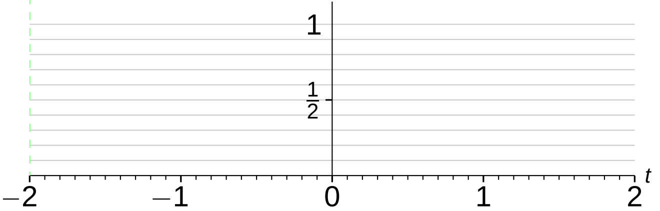
$$
\begin{aligned}
y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau \qquad (33)\\
&= \int_{-\infty}^{0} h(\tau)x(t-\tau)d\tau + \int_{0}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau
\end{aligned}
$$

musíme položit hodnoty impulsní odezvy $h(t) = 0$ pro $t < 0$. a Konvoluční integrál pro lineární, časově invariantní a kauzální systém má tvar

$$
y(t) = \int_{0}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau \,. \qquad (34)
$$



$$f * g = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t-\tau)\, d\tau$$

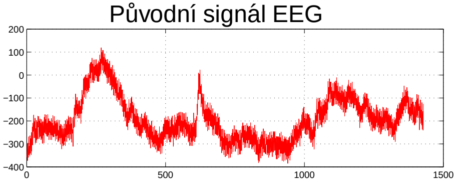


MSaP - domácí úkol č. DU-1

zadání 3. 3. 2011

odevzdání 8. 3. 2011

Problém 1


Původní signál EEG
200
100
0
−100
−200
−300
−400
0
500
1000
1500


Signál EEG vyhlazený klouzavým průměrem délky 5
300
200
100
0
−100
−200
0
500
1000
1500

Problém 1

Na obrázku je uveden příklad použití klouzavého průměru. Klouzavý průměr je nejpoužívanější metoda analýzy dat. Vyhlazuje prudké výkyvy. Jednoduchý klouzavý průměr $y(n)$ z naměřených dat $x(n)$ v pěti následujících obdobích má tvar

$$y(n) = \frac{1}{5}\left(x(n) + x(n-1) + x(n-2) + x(n-3) + x(n-4)\right).$$

Vaším úkolem je:

- Napočítat klouzavý průměr $y(n)$ délky 5 pro prvních **deset členů** jednotkového skoku $x(n) \equiv \mathbf{1}(n)$.
- Nakreslit průběh jednotkového skoku a odpovídajícího klouzavého průměru.
- Určit jaký tvar bude mít vzorec pro klouzavý průměr délky ℓ.

Problém 2

Dynamický systém je popsán diferenciální rovnicí tvaru

$$\ddot{y}(t) + \alpha_0^2(1 + \sin \omega_0 t)\, y(t) = \cos \Omega t.$$

Určete zda uvedený systém je

- spojitý/nespojitý
- autonomní/neautonomní
- lineární/nelineární
- časově invariantní/ časově proměnný