Modelování systémů a procesů

prof. Miroslav Vlček

10. března 2011

Obsah

Obsah

Lineární a nelineární

Spojitý stavový systém	Diskrétní stavový systém
$\mathbf{u}(t)$ ... vstupní (řídící) vektor $\mathbf{x}(t)$ ... stavový vektor $\mathbf{y}(t)$ ... výstupní vektor	$\mathbf{u}(n)$ ... vstupní (řídící) vektor $\mathbf{x}(n)$ ... stavový vektor $\mathbf{y}(n)$ ... výstupní vektor
Obecný tvar stavových rovnic $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t)$ $\mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t)$	Obecný tvar stavových rovnic $\mathbf{x}(n+1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(n), \mathbf{u}(n), n)$ $\mathbf{y}(n) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(n), \mathbf{u}(n), n)$

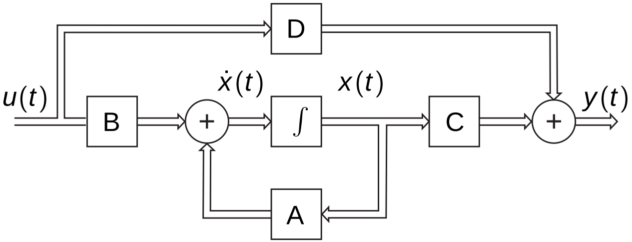
Stacionární a nestacionární

Spojitý stavový systém	Diskrétní stavový systém
$\mathbf{u}(t)$ ... vstupní (řídící) vektor $\mathbf{x}(t)$ ... stavový vektor $\mathbf{y}(t)$ ... výstupní vektor	$\mathbf{u}(n)$ ... vstupní (řídící) vektor $\mathbf{x}(n)$ ... stavový vektor $\mathbf{y}(n)$ ... výstupní vektor
Lineární stavový systém $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\,\mathbf{u}(t)$ $\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t)\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t)\mathbf{u}(t)$ $\mathbf{A}(t)$ je matice systému $(n \times n)$ $\mathbf{B}(t)$ je matice vstupů (řízení) $(n \times r)$ $\mathbf{C}(t)$ je výstupní matice $(m \times n)$ $\mathbf{D}(t)$ je výstupní matice $(m \times r)$	Lineární stavový systém $\mathbf{x}(n+1) = \mathbf{M}(n)\,\mathbf{x}(n) + \mathbf{N}(n)\,\mathbf{u}(n)$ $\mathbf{y}(n) = \mathbf{C}(n)\,\mathbf{x}(n) + \mathbf{D}(n)\mathbf{u}(n)$ $\mathbf{M}(n)$ je matice systému $\mathbf{N}(n)$ je matice vstupů (řízení) $\mathbf{C}(n)$ je výstupní matice $\mathbf{D}(n)$ je výstupní matice

Stacionární a nestacionární

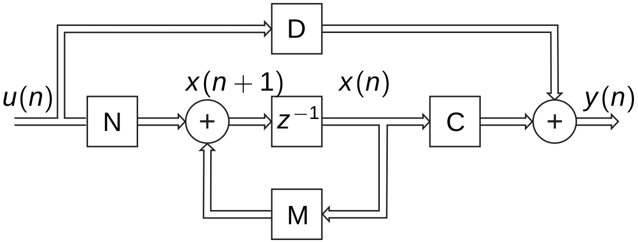
Spojitý stavový systém	**Diskrétní stavový systém**
$\mathbf{u}(t)$ ... vstupní (řídící) vektor $\mathbf{x}(t)$ ... stavový vektor $\mathbf{y}(t)$ ... výstupní vektor	$\mathbf{u}(n)$ ... vstupní (řídící) vektor $\mathbf{x}(n)$ ... stavový vektor $\mathbf{y}(n)$ ... výstupní vektor
Lineární stacionární stavový systém $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\,\mathbf{u}(t)$ $\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)$ **A** je matice systému ($n \times n$) **B** je matice vstupů (řízení) ($n \times r$) **C** je výstupní matice ($m \times n$) **D** je výstupní matice ($m \times r$)	Lineární stacionární stavový systém $\mathbf{x}(n+1) = \mathbf{M}\,\mathbf{x}(n) + \mathbf{N}\,\mathbf{u}(n)$ $\mathbf{y}(n) = \mathbf{C}\,\mathbf{x}(n) + \mathbf{D}\mathbf{u}(n)$ **M** je matice systému **N** je matice vstupů (řízení) **C** je výstupní matice **D** je výstupní matice

Vnitřní popis spojitého systému



Obrázek: Blokové schéma spojitého lineárního systému

Vnitřní popis diskrétního systému



Obrázek: Blokové schéma diskrétního lineárního systému

Cykloida

Pohyb po cykloidě je popsán parametrickou soustavou rovnic

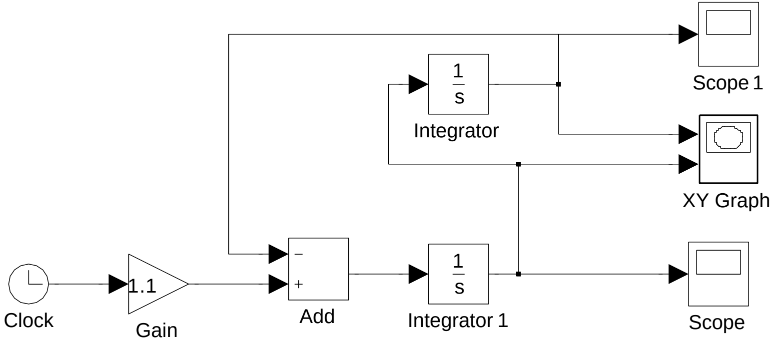
$$\begin{aligned} x_1(t) \equiv x &= at - b \sin t\,, \\ x_2(t) \equiv y &= a - b \cos t\,, \end{aligned}$$

která je pro počáteční podmínky

$$x_1(0) = 0 \quad \text{a} \quad x_2(0) = a - b$$

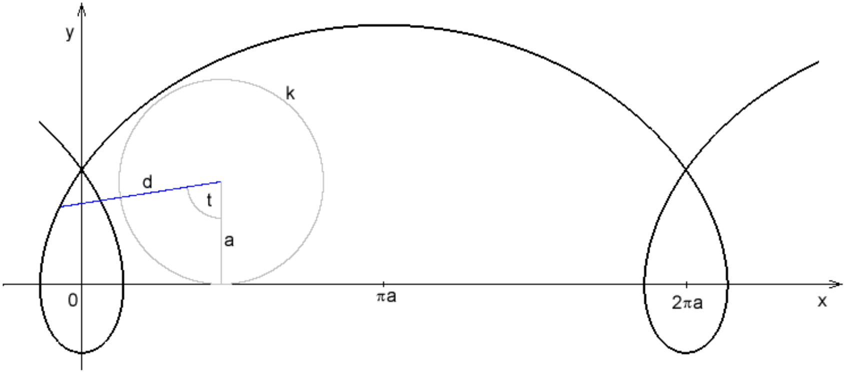
dána řešením stavové rovnice

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ a \end{bmatrix} t\,.$$



Obrázek: Model cykloidy

Cykloida



Obrázek: Graf cykloidy

Vlci a ovečky

Nelineární stavový model vlci a ovečky, který je znám v literatuře jako Lotka - Volterra predator-prey model, se týká populace ovcí popsané stavovou proměnnou $x_1(t)$ a populace vlků popsané stavovou proměnnou $x_2(t)$.

Dynamický model je dán nelineární soustavou stavových rovnic

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x_1(t) &= a\,x_1(t) - b\,x_1(t)x_2(t), \\ \frac{d}{dt}x_2(t) &= -c\,x_2(t) + d\,x_1(t)x_2(t). \end{aligned}$$

Vlci a ovečky

Uvedený model můžeme snadno interpretovat. Žijí-li ovce a vlci odděleně, pro ovce platí rovnice

$$\frac{d}{dt}x_1(t) \quad = \quad a\,x_1(t),$$

jejímž řešením je exponenciální růst

$$x_1(t) = x_1(0)\,e^{at},$$

zatímco vlci bez potravy

$$\frac{d}{dt}x_2(t) \quad = \quad -c\,x_2(t)$$

exponenciálně hynou,

$$x_2(t) = x_2(0)\,e^{-ct}.$$

Vlci a ovečky

Počet sežraných ovcí a nasycených vlků je úměrný počtu jejich setkání, tj. součinu

$$x_1(t)x_2(t)$$

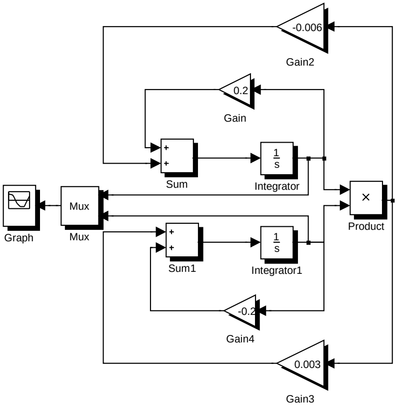
a počet ovcí klesá úměrně s

$$-b\,x_1(t)x_2(t),$$

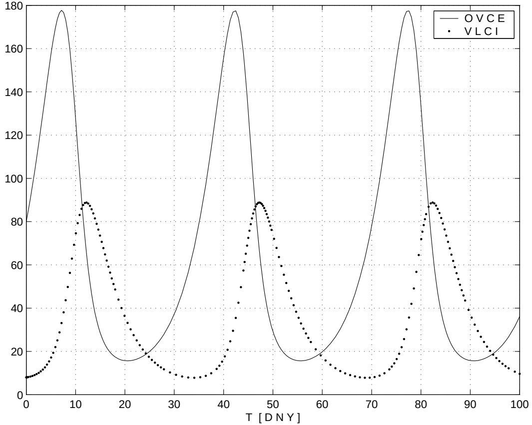
zatímco se vlci mají dobře a jejich počet stoupá úměrně s

$$d\,x_1(t)x_2(t).$$

Vnitřní popis diskrétního systému



Vnitřní popis diskrétního systému



Obrázek: Průběh populací vlků a oveček

Děkuji za pozornost