

Modelování systémů a procesů

prof. Miroslav Vlček

24. března 2011



Obsah

- 1 Prémiový úkol
- 2 Matematické nářadí - Laplaceova transformace
- 3 Tabulky Laplaceovy transformace
- 4 Příklady použití Laplaceovy transformace



Obsah

- 1 Prémiový úkol
- 2 Matematické nářadí - Laplaceova transformace
- 3 Tabulky Laplaceovy transformace
- 4 Příklady použití Laplaceovy transformace



Obsah

- 1 Prémiový úkol
- 2 Matematické nářadí - Laplaceova transformace
- 3 Tabulky Laplaceovy transformace
- 4 Příklady použití Laplaceovy transformace



Obsah

- 1 Prémiový úkol
- 2 Matematické nářadí - Laplaceova transformace
- 3 Tabulky Laplaceovy transformace
- 4 Příklady použití Laplaceovy transformace



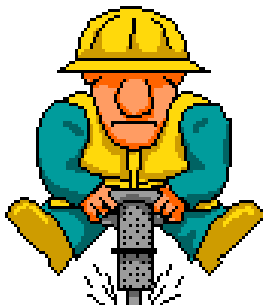
Model fakulta - prémiový úkol číslo 1

Na základě zpráv o činnosti ČVUT z let 2005 - 2009, které naleznete na stránkách <http://www.cvut.cz>, sestavte model zahájení 4-letého bakalářského a 2-letého magisterského studia na fakultě dopravní v roce 2004/2005. Stavový model nastavte tak, aby odpovídal počtu studentů zapsaných do prvních ročníků a počtu absolventů tak, jak je naleznete ve zprávách o činnosti. Model sestavte v SIMULINKu a prokažte číselnou shodu s údaji uvedenými v těchto zprávách.



Prémiový úkol číslo 1

Prvních pět úspěšných řešitelů obdrží 2 body započítávané ke zkoušce. Konec soutěže je 31. března t.r.



Důvody pro použití

Laplaceova transformace významně zjednodušuje některé operace, např.

- derivace \Rightarrow násobení proměnnou p
- integrace \Rightarrow dělení proměnnou p
- **diferenciální rovnice** n -tého řádu s konstantními koeficienty \Rightarrow **algebraické rovnice** n -tého řádu
- **konvoluce** $f(t) * g(t) \Rightarrow$ **násobení** $F(p)G(p)$



Laplaceova transformace - definice

Laplaceova transformace funkce $f(t)$, která je nanejvýš polynomiálního růstu

$$f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_n t^n$$

je definována integrálem

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt \equiv \mathcal{L}[f(t)].$$

Funkci $f(t)$ nazýváme **vzorem** a funkci $F(p)$ Laplaceovým **obrazem**.



Laplaceova transformace - definice

Zpětná Laplaceova transformace má tvar integrálu podél křivky v komplexní rovině p

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(p)e^{pt} dp \equiv \mathcal{L}^{-1} [F(p)].$$

Praktické počítání zpětné Laplaceovy transformace vychází z residuové věty, která pro racionálně lomené funkce v proměnné p vede v operátorovém počtu na Heavisideovu větu¹.

¹Oliver Heaviside 1850-1925



Laplaceova transformace - vlastnosti

- Laplaceova transformace je lineární

$$\mathcal{L} \left[\sum_k a_k f_k(t) \right] = \sum_k a_k \mathcal{L} [f_k(t)] = \sum_k a_k F_k(p)$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\sum_m b_m F_m(p) \right] = \sum_m b_m \mathcal{L}^{-1} [F_m(p)] = \sum_m b_m f_m(t)$$



Laplaceova transformace - vlastnosti

- Věta o změně měřítka

$$F(p) = \mathcal{L}[f(t)] \Rightarrow \frac{1}{a}F\left(\frac{p}{a}\right) = \mathcal{L}[f(at)]$$

Důkaz: substitucí $at = \tau$

$$\mathcal{L}[f(at)] = \int_0^{\infty} f(at)e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} f(\tau)e^{-\frac{p}{a}\tau} \frac{1}{a} d\tau = \frac{1}{a}F\left(\frac{p}{a}\right)$$

QED²

²Quod erat demonstrandum - závěrečná formule důkazu Eukleidových

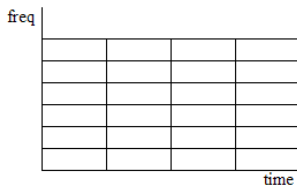
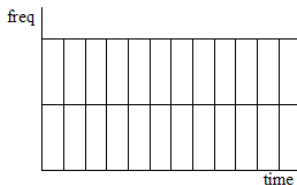


Laplaceova transformace - vlastnosti

- Věta o změně měřítka

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1} [F(p)] \quad \frac{1}{b} f\left(\frac{t}{b}\right) = \mathcal{L}^{-1} [F(bp)]$$

Všechny integrální transformace (Laplace, Fourier, Wavelets) podléhají Hesienbergově principu neurčitosti.



Obrázek: Časově-kmitočtové rozlišení



Laplaceova transformace - vlastnosti

- Věta o posunutí

$$\mathcal{L}[f(t - \tau)] = e^{-p\tau} \mathcal{L}[f(t)]$$

Důkaz: substitucí $t - \tau = \vartheta$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f(t - \tau)] &= \int_0^{\infty} f(t - \tau) e^{-pt} dt = \int_{-\tau}^{\infty} f(\vartheta) e^{-p(\tau + \vartheta)} d\vartheta \\ &= e^{-p\tau} \int_{-\tau}^{-0} f(\vartheta) e^{-p\vartheta} d\vartheta + e^{-p\tau} \int_0^{\infty} f(\vartheta) e^{-p\vartheta} d\vartheta \\ &= e^{-p\tau} \int_0^{\infty} f(\vartheta) e^{-p\vartheta} d\vartheta \equiv e^{-p\tau} F(p) \end{aligned}$$

QED



Laplaceova transformace - vlastnosti

- Věta o konvoluci

$$\mathcal{L} [f(t) * g(t)] \equiv \mathcal{L} \left[\int_0^{\infty} f(t - \tau)g(\tau)d\tau \right] = F(p)G(p)$$

Důkaz: se snáze provádí v diskretním čase

Důsledek

$$\mathcal{L} \left[y(t) = \int_0^{\infty} h(\tau)x(t - \tau)d\tau \right] \Leftrightarrow Y(p) = H(p)X(p)$$



Laplaceova transformace - vlastnosti

- Věta o obrazu derivace funkce

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(p)$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}f(t)\right] = pF(p) - f(0+)$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2}{dt^2}f(t)\right] = p^2F(p) - pf(0+) - f'(0+)$$

$$\vdots$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^n}{dt^n}f(t)\right] = p^nF(p) - p^{n-1}f(0+) - p^{n-2}f'(0+) \dots - f^{(n-1)}(0+)$$



Laplaceova transformace - vlastnosti

- Věta o obrazu derivace funkce

Důkaz: integrováním per partés

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L} \left[\frac{d}{dt} f(t) \right] &= \int_0^{\infty} \frac{d}{dt} f(t) e^{-pt} dt \\
 &= [f(t) e^{-pt}]_{0+}^{\infty} - (-p) \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt \\
 &= -f(0+) + pF(p).
 \end{aligned}$$

Opakováním tohoto procesu získáme postupně

$$\mathcal{L} \left[\frac{d^2}{dt^2} f(t) \right] = p^2 F(p) - pf(0+) - f'(0+)$$

QED



Laplaceova transformace - vlastnosti

- Věta o obrazu integrálu funkce

$$\mathcal{L} \left[\int_0^t f(\tau) d\tau \right] = \frac{1}{p} F(p)$$

Důkaz: integrováním per partés

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \left[\int_0^t f(\tau) d\tau \right] &= \int_0^\infty \left(\int_0^t f(\tau) d\tau \right) e^{-pt} dt \\ &= \frac{1}{-p} \left[\int_0^t f(\tau) d\tau e^{-pt} \right]_0^\infty - \frac{1}{-p} \int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt \\ &= \frac{1}{p} F(p). \end{aligned}$$



Laplaceova transformace - tabulky

$f(t) = \mathcal{L}^{-1} [F(p)]$	$F(p) = \mathcal{L} [f(t)]$
$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(p) e^{pt} dp$	$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt$
$\delta(t)$	1
$1(t)$	$\frac{1}{p}$



Laplaceova transformace - tabulky

$f(t) = \mathcal{L}^{-1} [F(p)]$	$F(p) = \mathcal{L} [f(t)]$
$e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{p + \alpha}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$
$\cos \omega t$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$



Laplaceova transformace - tabulky

$f(t) = \mathcal{L}^{-1} [F(p)]$	$F(p) = \mathcal{L} [f(t)]$
$e^{-\alpha t} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(p + \alpha)^2 + \omega^2}$
$e^{-\alpha t} \cos \omega t$	$\frac{p + \alpha}{(p + \alpha)^2 + \omega^2}$
t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$



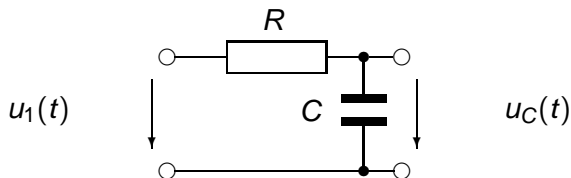
Laplaceova transformace - tabulky

$f(t) = \mathcal{L}^{-1} [F(p)]$	$F(p) = \mathcal{L} [f(t)]$
$t^n e^{-\alpha t}$	$\frac{n!}{(p + \alpha)^{n+1}}$
$t \cos \omega t$	$\frac{p^2 - \omega^2}{(p^2 + \omega^2)^2}$
$t \sin \omega t$	$\frac{2\omega p}{(p^2 + \omega^2)^2}$



Laplaceova transformace - příklad 1

Integrační RC článek



Diferenciální rovnici jsme si již odvodili

$$RC \frac{du_C(t)}{dt} + u_C(t) = u_1(t).$$



Laplaceova transformace - příklad 1

Pro $\alpha = \frac{1}{RC}$ a vstupní $u_1(t) = U_0 \mathbf{1}(t)$ je

$$\frac{dy(t)}{dt} + \alpha y(t) = \alpha U_0 \mathbf{1}(t).$$

Protože je to diferenciální rovnice s konstantními koeficienty, můžeme použít Laplaceovu transformaci a její vlastnosti

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{dy(t)}{dt} + \alpha y(t) = \alpha U_0 \mathbf{1}(t) \right\},$$

a obdržíme algebraickou rovnici pro neznámou $Y(p)$

$$pY(p) - y(0) + \alpha Y(p) = \alpha U_0 \frac{1}{p}.$$



Laplaceova transformace - příklad 1

Rovnici upravíme tak, že neznámá bude na levé straně a všechny známé konstanty na straně pravé

$$(p + \alpha)Y(p) = \alpha U_0 \frac{1}{p} + y(0).$$

a nalezneme řešení v rovině p

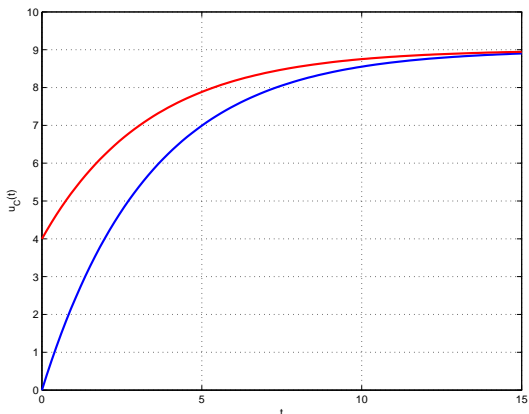
$$Y(p) = \frac{\alpha U_0}{p(p + \alpha)} + \frac{y(0)}{p + \alpha} = \frac{U_0}{p} - \frac{U_0}{p + \alpha} + \frac{y(0)}{p + \alpha}$$

S pomocí tabulek pak můžeme nalézt pro $t > 0$ řešení

$$y(t) = U_0(1 - e^{-\alpha t}) + y(0)e^{-\alpha t}$$



Laplaceova transformace - příklad 1



Obrázek: Průběh nabíjení v závislosti na hodnotě počátečního stavu, tedy zbytkového napětí $y(0) = 0V$ a $y(0) = 4V$



Laplaceova transformace - příklad 2

Uvažujte LTI systém, který je pro $t > 0$ popsán naměřenými hodnotami vstupu $x(t) = e^{-t} + e^{-3t}$ a výstupu $y(t) = te^{-3t}$. Jak nalezneme **impulsní odezvu**?



Laplaceova transformace - příklad 2

Protože platí

$$X(p) = \frac{1}{p+1} + \frac{1}{p+3} = 2 \frac{p+2}{(p+1)(p+3)}$$

$$Y(p) = \frac{1}{(p+1)^2}$$

a protože $Y(p) = H(p)X(p)$ je

$$H(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{1}{2} \frac{p+1}{(p+2)(p+3)} = \frac{1}{2} \left[\frac{2}{p+3} - \frac{1}{p+2} \right].$$



Laplaceova transformace - příklad 2

S pomocí tabulek pak můžeme nalézt pro $t > 0$ řešení

$$h(t) = e^{-3t} - \frac{1}{2}e^{-2t}.$$

