Modelování systémů a procesů

prof. Miroslav Vlček

14. dubna 2011

Obsah

Inverzní matice - příklad matice 2×2

Pro matici 2×2

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

je inverzní matice

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

přičemž násobením snadno ověříme, že

$$\mathbf{A}\,\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Inverzní matice pomocí Cramerova pravidla

Algebraickým doplňkem k prvku a_{ik} v matici $n \times n$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

je subdeterminant Δ_{ik}, který vznikne vyškrtnutím i-tého řádku a k-tého sloupce. Prvky inverzní matice jsou potom

$$\mathbf{A}^{-1}_{\ell\ m} = \frac{(-1)^{\ell+m}\Delta_{m\ \ell}}{\Delta},$$

kde $det(\mathbf{A}) = \Delta$.

Přenosová funkce a vnitřní popis - příklad 1

Uvažujme systém se dvěma vstupy a dvěma výstupy, které jsou popsány soustavou dvou diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} \ddot{y}_1(t) + 4\dot{y}_1(t) - 3y_2(t) &= u_1(t) \\ \dot{y}_1(t) + \dot{y}_2(t) + y_1(t) + 2y_2(t) &= u_2(t) \end{aligned}$$

Máme nalézt přenosovou matici $H_{ij}(p)$ o rozměru 2×2,

Přenosová funkce a vnitřní popis - příklad 1

Stavový vektor je dán volbou

$$\begin{aligned} x_1(t) &= y_1(t) \\ x_2(t) &= \dot{y}_1(t) \\ x_3(t) &= y_2(t) \end{aligned}$$

ze které vyplývá popis ve stavovém tvaru, tj. diferenciální rovnicemi prvního řádu.

Přenosová funkce a vnitřní popis - příklad 1

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 3 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$$

Přenosová funkce a vnitřní popis - příklad 1

Přenosovou matici $H(p)$, pro kterou musí platit
$Y(p) = H(p)U(p)$

$$\begin{bmatrix} Y_1(p) \\ Y_2(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11}(p) & H_{12}(p) \\ H_{21}(p) & H_{22}(p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(p) \\ U_2(p) \end{bmatrix}$$

odvodíme pomocí vztahů (3)

Přenosová funkce a vnitřní popis - příklad 1

Nejprve sestavíme matici

$$(p\mathbf{1} - \mathbf{A}) = \begin{bmatrix} p & -1 & 0 \\ 0 & p+4 & -3 \\ 1 & 1 & p+2\,. \end{bmatrix}$$

Determinant této matice je

$$det\,(p\mathbf{1} - \mathbf{A}) = p^3 + 6p^2 + 11p + 3.$$

Tento polynom, bude jmenovatelem všech čtyř dílčích přenosů $H_{ij}(p)$.

Přenosová funkce a vnitřní popis - příklad 1

Adjungovaná matice k $(p\mathbf{1} - \mathbf{A})$ je dána subdeterminanty této matice a platí

$$adj\,(p\mathbf{1} - \mathbf{A}) = \begin{bmatrix} p^2 + 6p + 11 & p + 2 & 3 \\ -3 & p(p+2) & 3p \\ -(p+4) & -(p+1) & p(p+4) \end{bmatrix}.$$

Přenosová funkce a vnitřní popis - příklad 1

Po vynásobení zleva maticí **C** a zprava maticí **B** dostáváme matici 2×2, jejíž jednotlivé prvky jsou polynomy v proměnné p a odpovídají čitateli jednotlivých přenosů.

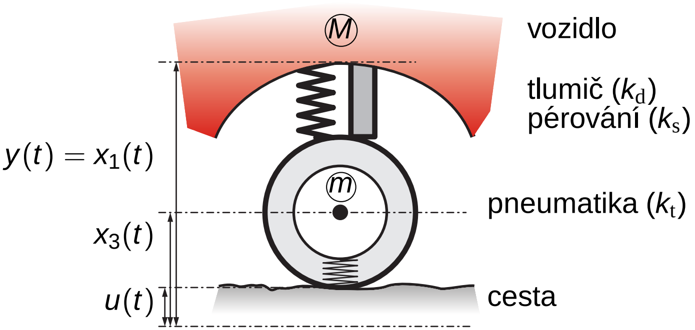
$$\mathbf{C}\, adj\, (p\mathbf{1} - \mathbf{A})\ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} p+2 & 3 \\ -(p+1) & p(p+4) \end{bmatrix} .$$

Přenosová funkce a vnitřní popis - příklad 1

Výsledná přenosová matice je

$$H(p) = \frac{\begin{bmatrix} p+2 & 3 \\ -(p+1) & p(p+4) \end{bmatrix}}{p^3+6p^2+11p+3} \, .$$

Přenosová funkce a vnitřní popis - příklad 2



Přenosová funkce a vnitřní popis - příklad 2

Na obrázku je model zavěšení kola vozidla a jeho odpružení s koeficienty tuhosti k_t, k_s a k_d. Jestliže platí pohybové rovnice

$$\begin{aligned} M\,\ddot{x}_3(t) + k_\mathrm{t}\,[x_3(t) - u(t)] - k_\mathrm{s}\,[x_1(t) - x_3(t)] - k_\mathrm{d}\,[\dot{x}_1(t) - \dot{x}_3(t)] &= 0 \\ m\,\ddot{x}_1(t) + k_\mathrm{s}\,[x_1(t) - x_3(t)] + k_\mathrm{d}\,[\dot{x}_1(t) - \dot{x}_3(t)] &= 0 \end{aligned}$$

nalezněte stavový popis s použitím vektoru stavových proměnných $[x_1(t)\,x_2(t)\,x_3(t)\,x_4(t)]$.

Nalezněte přenosovou funkci $H(p) = \dfrac{Y(p)}{U(p)}$, která charakterizuje chování vozidla v závislosti na povrchu vozovky .

Přenosová funkce a vnitřní popis - příklad 2

Zvolíme

$$\begin{aligned} x_1(t) = y(t)\,, &\qquad \dot{x}_1(t) = x_2(t)\,, \\ x_3(t)\,, &\qquad \dot{x}_3(t) = x_4(t) \end{aligned}$$

a dostáváme soustavu rovnic

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= x_2(t)\,, \\
\dot{x}_2(t) &= -\frac{k_\mathrm{s}}{m}\,[x_1(t) - x_3(t)] - \frac{k_\mathrm{d}}{m}\,[\dot{x}_1(t) - \dot{x}_3(t)]\,, \\
\dot{x}_3(t) &= x_4(t) \\
\dot{x}_4(t) &= -\frac{k_\mathrm{t}}{M}\,[x_3(t) - u(t)] + \frac{k_\mathrm{s}}{M}\,[x_1(t) - x_3(t)] + \frac{k_\mathrm{d}}{M}\,[\dot{x}_1(t) - \dot{x}_3(t)]
\end{aligned}$$

Přenosová funkce a vnitřní popis - příklad 2

Rovnice převedeme na stavový popis

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \dot{x}_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\dfrac{k_\mathrm{s}}{m} & -\dfrac{k_\mathrm{d}}{m} & \dfrac{k_\mathrm{s}}{m} & \dfrac{k_\mathrm{d}}{m} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \dfrac{k_\mathrm{s}}{M} & \dfrac{k_\mathrm{d}}{M} & -\dfrac{k_\mathrm{s}+k_\mathrm{t}}{M} & -\dfrac{k_\mathrm{d}}{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dfrac{k_\mathrm{t}}{M} \end{bmatrix} u(t)$$

Přenosová funkce a vnitřní popis - příklad 2

a

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t)\,. \end{bmatrix}$$

Přenosová funkce a vnitřní popis - příklad 2

Máme matice stavového popisu ve tvaru

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k_\mathrm{s}}{m} & -\frac{k_\mathrm{d}}{m} & \frac{k_\mathrm{s}}{m} & \frac{k_\mathrm{d}}{m} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_\mathrm{s}}{M} & \frac{k_\mathrm{d}}{M} & -\frac{k_\mathrm{s}+k_\mathrm{t}}{M} & -\frac{k_\mathrm{d}}{M} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{k_\mathrm{t}}{M} \end{bmatrix}$$

a

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Přenosová funkce a vnitřní popis - příklad 2

a platí $H(p) = \mathbf{C}\,(p\mathbf{1} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$ t.j.

$$H(p) = \frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} * & * & * & -\Delta_{41} \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{k_\mathrm{t}}{M} \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{(k_\mathrm{d}\,p + k_\mathrm{s})\,k_\mathrm{t}}{(M\,p^2 + k_\mathrm{t})\,(m\,p^2 + k_\mathrm{d}\,p + k_\mathrm{s}) + m\,(k_\mathrm{d}\,p + k_\mathrm{s})\,p^2}$$

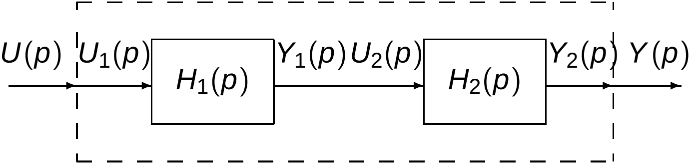
kde $*$ označují prvky inverzní matice, které nemusíme pro přenosovou funkci počítat a Δ je determinant $\Delta = \det(p\mathbf{1} - \mathbf{A})$.

Kaskádní řazení

$$\boxed{H(p) = H_1(p).H_2(p)}$$

Pro výslednou přenosovou funkci kaskádního řazení dvou subsystémů platí

$$H(p) = \frac{Y_1(p)}{U(p)} \cdot \frac{Y(p)}{Y_1(p)} = \frac{Y_1(p)}{U_1(p)} \cdot \frac{Y(p)}{U_2(p)} = H_1(p).H_2(p)$$
$$H(p) = H_1(p) \times H_2(p)$$



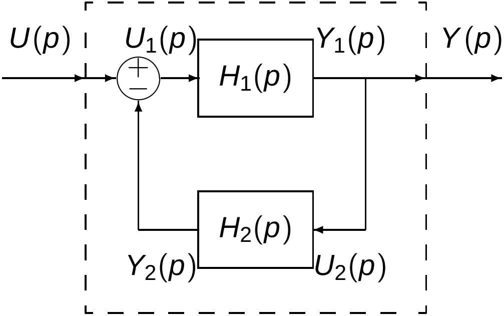
$$\boxed{H(p) = H_1(p) + H_2(p)}$$

Pro výslednou přenosovou funkci paralelního řazení dvou subsystémů platí

$$H(p) = \frac{Y_1(p)}{U(p)} + \frac{Y_2(p)}{U(p)} = H_1(p) + H_2(p)$$

Zpětnovazební řazení

$$\boxed{H(p) = \frac{H_1(p)}{1 + H_1(p).H_2(p)}}$$



Zpětnovazební řazení

Pro výslednou přenosovou funkci zpětnovazebního řazení dvou subsystémů odvodíme postupně

$$\begin{array}{rl} \text{na výstupu} & Y_1(p) = Y(p) = U_2(p) \\ \text{na vstupu} & U_1(p) = U(p) - Y_2(p)\,. \end{array}$$

Nyní vyjádříme výstupní $Y_1(p)$ a $Y_2(p)$ pomocí dílčích přenosových funkcí a dostaneme

$$\begin{aligned} Y(p) &= H_1(p)U_1(p) \\ &= H_1(p)\,(U(p) - Y_2(p)) \\ &= H_1(p)\,(U(p) - H_2(p)U_2(p)) \\ &= H_1(p)\,(U(p) - H_2(p)Y(p)) \end{aligned}$$

Zpětnovazební řazení

Vyjádříme nakonec

$$Y(p) + H_1(p)H_2(p)Y(p) = H_1(p)U(p)$$

a je

$$H(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{H_1(p)}{1 + H_1(p)H_2(p)}$$

Zpětnovazební řazení

Přenos systému s jednoduchou zápornou zpětnou vazbou je dán poměrem přenosu přímé větve ku přenosu celé rozpojené smyčky zvětšenému o 1.

Pokud je zpětný signál na vstupu přičítán, hovoříme o kladné zpětné vazbě s znaménko ve jmenovateli je opačné

$$H(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{H_1(p)}{1 - H_1(p)H_2(p)}$$

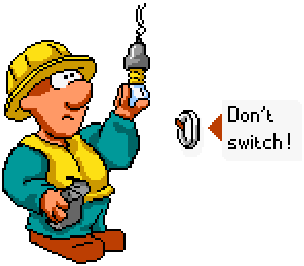
Dynamické vlastnosti spojovaných subsystémů

Na dynamických vlastnostech a časových odezvách se podílejí póly dílčích přenosových $\left[p_{1\infty\mu}, p_{2\infty\mu}\right]$ funkcí. Pro výsledný

- kaskádní systém se poloha pólů nemění
- paralelní systém se poloha pólů nemění
- zpětnovazební se poloha pólů významně mění

Domácí úkol

Opakujte si Laplaceovu transformaci...



... neboť přijde další test!