Modelování systémů a procesů

prof. Miroslav Vlček

12. května 2011

Obsah

Obsah

Obsah

Obsah

Vztah vstup-výstup

$$\xrightarrow{\qquad} u(n) \ \boxed{h(n)} \ y(n) \xrightarrow{\qquad}$$

Vstup-výstup v rovině diskrétního času

$$\xrightarrow{\qquad} U(z) \ \boxed{H(z)} \ Y(z) \xrightarrow{\qquad}$$

Vstup-výstup v rovině z

Diferenční rovnice

$$
\begin{aligned}
a_N y(n+N) + a_{N-1} y(n+N-1) + \ldots a_0 y(n) \\
= b_N u(n+N) + b_{N-1} u(n+N-1) + \ldots b_0 u(n)
\end{aligned}
$$

Diferenční rovnice

Pokud chceme nalézt odpovídající přenosovou funkci, musíme mít na paměti, že všechny počáteční podmínky

$$y(0) = y(1) = \cdots = y(N-1) = 0$$

a

$$u(0) = u(1) = \cdots = u(N-1) = 0$$

jsou nulové!

Diferenční rovnice a přenosová funkce

Potom z-transformace je jednoduchá

$$(a_N z^N + a_{N-1} z^{N-1} + \ldots a_0) Y(z) \\ = (b_N z^N + b_{N-1} z^{N-1} + \ldots b_0) U(z)$$

Přenosovoá funkce

Přenosová funkce je potom $H(z) = \dfrac{Y(z)}{U(z)}$ a má tvar racionální lomené funkce v proměnné z^{-1}

$$H(z) = \frac{\displaystyle\sum_{m=0}^{N} b_{N-m} z^{-m}}{\displaystyle\sum_{n=0}^{N} a_{N-n} z^{-n}} \equiv \frac{Q(z)}{N(z)} \tag{1}$$

Vztah mezi přenosovou funkcí $H(z)$ a impulsní odezvou $h(n)$ je dán z transformací

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n) z^{-n} \,. \tag{2}$$

Vnější a vnitřní popis

Nalezněte přenosovou funkci $H(z)$ diskrétního LTI systému popsaného stavovými rovnicemi

$$\begin{aligned} x(n+1) &= \mathbf{M}\,x(n) + \mathbf{N}\,u(n) \\ y(n) &= \mathbf{C}\,x(n) \end{aligned}$$

Při odvození použijte z-transformaci ! Která matice ve stavovém popisuje je rozhodující pro stabilitu řešení ?

Vnější a vnitřní popis

S pomocí vztahů pro z-transformaci transformujeme rovnice

$$\begin{aligned} x(n+1) &= \mathbf{M}\,x(n) + \mathbf{N}\,u(n) \\ y(n) &= \mathbf{C}\,x(n) \end{aligned}$$

na

$$\begin{aligned} z(X(z) - x(0)) &= \mathbf{M}\,X(z) + \mathbf{N}\,U(z) \\ Y(z) &= \mathbf{C}\,X(z). \end{aligned}$$

Řešení diferenčních rovnic

Protože přenosová funkce je definována pro $x(0) = 0$, obdržíme z první rovnice

$$X(z) = (z\mathbf{1} - \mathbf{M})^{-1}\mathbf{N}\,U(z)$$

a dosazením do druhé rovnice je

$$Y(z) = \mathbf{C}\,(z\mathbf{1} - \mathbf{M})^{-1}\mathbf{N}\,U(z).$$

Přenosová funkce $H(z)$ je tedy

$$H(z) = \mathbf{C}\,(z\mathbf{1} - \mathbf{M})^{-1}\mathbf{N}.$$

Převod spojitého systému na diskrétní

Spojitý systém popsaný stavovými rovnicemi

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\,\mathbf{u}(t), && (3) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t), && (4) \end{aligned}$$

můžeme převést na ekvivalentní diskrétní systém tak, že čas t nahradíme diskrétními časovými okamžiky $t = nT$, kde T je vzdálenost mezi následujícími časovými okamžiky.

Převod spojitého systému na diskrétní

Všechny veličiny měříme pouze v čase $t = nT$ a proto

$$x(t) = x(nT) \rightarrow x(n),$$

$$y(t) = y(nT) \rightarrow y(n),$$

$$u(t) = u(nT) \rightarrow u(n).$$

Derivaci stavu $\dot{x}(t)$ nahradíme v prvním přiblížení první diferencí

$$\dot{\mathbf{x}}(t) \approx \frac{\mathbf{x}((n+1)T) - \mathbf{x}(nT)}{T} = \frac{1}{T}(\mathbf{x}(n+1) - \mathbf{x}(n)) \,. \qquad (5)$$

Převod spojitého systému na diskrétní

Dosazení do (1) a (2) dostaneme po úpravě diskrétní tvar stavových rovnic

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(n+1) &= (\mathbf{1}+T\,\mathbf{A})\,\mathbf{x}(n)+T\,\mathbf{B}\,\mathbf{u}(n) \qquad (6)\\ \mathbf{y}(n) &= \mathbf{C}\,\mathbf{x}(n)+\mathbf{D}\mathbf{u}(n) \qquad (7) \end{aligned}$$

resp.

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(n+1) &= \mathbf{M}\,\mathbf{x}(n)+\mathbf{N}\,\mathbf{u}(n) \qquad (8)\\ \mathbf{y}(n) &= \mathbf{C}\,\mathbf{x}(n)+\mathbf{D}\mathbf{u}(n) \qquad (9) \end{aligned}$$

Bilineární transformace

Odvození bilineární transformace, kterou můžeme převést popis spojitého systému na diskrétní, lze odvodit několika ekvivalentními způsoby. Řešení diferenciálních rovnic numerickou integrací lichoběžníkovou metodou vede na bilineární transformaci způsobem, který je používán v **teorii řízení**. Zde je velmi často spojována se jménem Tutsinova transformace [1].

[1] Johnson J. R.: *Introduction to Digital Signal Processing*, Prentice-Hall Inc., 1989

Bilineární transformace

Vzorkování analogového signálu a Laplaceova transformace vzorkovací funkce vede na ekvivalenci

$$z^{-1} \sim e^{-pT} \,. \tag{10}$$

Komplexní kmitočet p lze získat úpravou vztahu (10)

$$p = \frac{1}{T} \ln z \,. \tag{11}$$

Bilineární transformace

Abychom se vyhnuli transcendentním funkcím při vyjadřování přenosových vlastností, rozvineme pravou stranu rovnice (11) v řadu, přičemž v dalších úvahách vezmeme v úvahu jen první člen rozvoje. Platí

$$
\begin{aligned}
\ln z &= \frac{z-1}{1} - \frac{(z-1)^2}{2} + \frac{(z-1)^3}{3} - \cdots \\
&= \frac{z-1}{z} + \frac{1}{2}\left(\frac{z-1}{z}\right)^2 + \cdots \\
&= 2\left[\frac{z-1}{z+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^5 + \cdots\right].
\end{aligned} \tag{12}
$$

Bilineární transformace

Po dosazení do vztahu (11) vždy prvních členů rozvoje funkce $\ln z$ získáme tři transformace $z \to p$, které jsou v literatuře označovány jako FD (forward difference), BD (backward difference) a bilineární transformace.

Bilineární transformace

Všimněme si jakým způsobem bilineární transformace transformuje imaginární osa kmitočtů:

$$
\begin{aligned}
j\Omega &= \frac{2}{T}\frac{1-e^{-j\omega T}}{1+e^{-j\omega T}} = j\frac{2}{T}\frac{e^{j\omega T/2}-e^{-j\omega T/2}}{e^{j\omega T/2}+e^{-j\omega T/2}} \\
&= j\frac{2}{T}\frac{\sin(\omega T/2)}{\cos(\omega T/2)} = j\frac{2}{T}\tan\frac{\omega T}{2}\,. \qquad (13)
\end{aligned}
$$

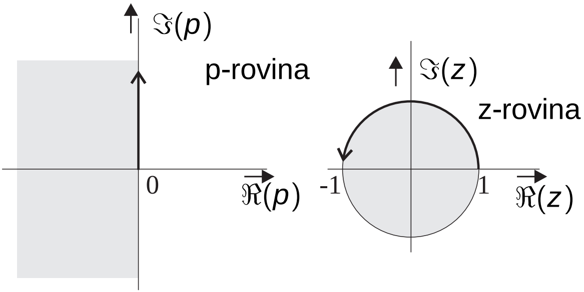
Z rovnice (13) můžeme vyvodit, že kmitočtové osy jsou vzájemně zkreslené a platí

$$
\Omega = \frac{2}{T}\tan\frac{\omega T}{2}\,. \qquad (14)
$$

Bilineární transformace

spojitý čas	diskrétní čas
$\frac{d}{dt}y(t) = x(t)$	
$\int_{(n-1)T}^{nT} \frac{d}{dt}y(t)dt = \int_{(n-1)T}^{nT} x(t)dt$ integrace diferenciální rovnice	$y(nT) - y((n-1)T) = T\frac{x(nT) + x((n-1)T)}{2}$ numerická integrace
	$Y(z)(1 - z^{-1}) = \frac{T}{2}X(z)(1 + z^{-1})$ z-transformace
$pY(p) = X(p)$ Laplaceova transformace	$\frac{2}{T}\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}Y(z) = X(z)$

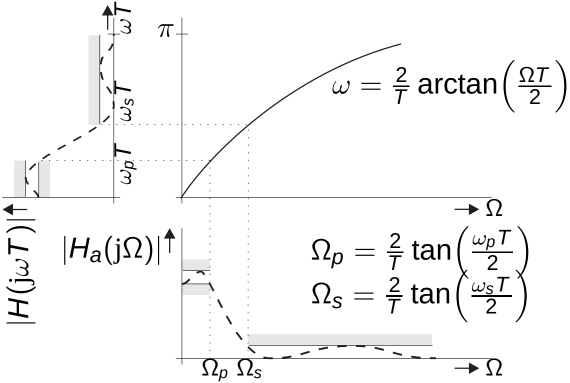
Bilineární transformace



Obrázek: Zobrazení roviny p na rovinu z při transformaci

$$p = \frac{2}{T}\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}.$$

Bilineární transformace



Obrázek: Zkreslení kmitočtových os při bilineární transformaci analogového dolní propusti na číslicovou dolní propust.


Don't
switch!