

Modelování systémů a procesů

prof. Miroslav Vlček

28. dubna 2011



Obsah

1 Inverzní z-transformace

2 Příklady použití



Obsah

- 1 Inverzní z-transformace
- 2 Příklady použití



Metody výpočtu inverzní z-transformace

Zpětná z-transformace má tvar integrálu

$$y(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbf{C}} Y(z) z^{n-1} dz \equiv \mathcal{Z}^{-1} [Y(z)]$$

podél uzavřené křivky \mathbf{C} , která obsahuje všechny singulární body racionální lomené funkce

$$Y(z) = \frac{Q(z)}{N(z)}.$$



Metody výpočtu inverzní z-transformace

O racionální lomené funkci

$$\frac{Q(z)}{N(z)}$$

říkáme, že má **nulové** body $z_{0\nu}$, jestliže

$$Q(z_{0\nu}) = 0,$$

a že má **póly** $z_{\infty\mu}$, jestliže

$$N(z_{\infty\mu}) = 0.$$



Rozklad racionální lomené funkce na parciální zlomky

Pokud má funkce $\frac{Q(z)}{N(z)}$ jednoduché póly, potom

$$N(z) = \prod_{\mu=1}^N (1 - z_{\infty\mu} z^{-1}) = (1 - z_{\infty 1} z^{-1})(1 - z_{\infty 2} z^{-1}) \dots$$
$$\dots (1 - z_{\infty N} z^{-1})$$



Rozklad racionální lomené funkce na parciální zlomky

a platí

$$\begin{aligned}\frac{Q(z)}{N(z)} &= \sum_{\mu=1}^N \frac{k_{\mu}}{1 - z_{\infty\mu} z^{-1}} \\ &= \frac{k_1}{1 - z_{\infty 1} z^{-1}} + \frac{k_2}{1 - z_{\infty 2} z^{-1}} + \dots \\ &\quad \dots + \frac{k_N}{1 - z_{\infty N} z^{-1}}\end{aligned}$$



Rozklad racionální lomené funkce na parciální zlomky

kde

$$\begin{aligned}k_{\mu} &= \lim_{z \rightarrow z_{\infty\mu}} (1 - z_{\infty\mu} z^{-1}) \frac{Q(z)}{N(z)} \\&= Q(z_{\infty\mu}) \lim_{z \rightarrow z_{\infty\mu}} (1 - z_{\infty\mu} z^{-1}) \frac{1}{N(z)} \\&= Q(z_{\infty\mu}) \lim_{z \rightarrow z_{\infty\mu}} \frac{1}{\frac{N(z)}{1 - z_{\infty\mu} z^{-1}}} \\&= Q(z_{\infty\mu}) \frac{1}{N'(z_{\infty\mu})}\end{aligned}$$



Rozklad racionální lomené funkce na parciální zlomky

Pro jednoduchost budeme dále psát $z_{\infty\mu} \rightarrow z_{\mu}$.

Protože pro $|az^{-1}| < 1$ platí

$$z^{-1} \left[\frac{1}{1 - az^{-1}} \right] = z^{-1} \left[\sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} \right] = a^n$$



Rozklad racionální lomené funkce na parciální zlomky

dostaneme

$$\mathcal{Z}^{-1} \left[\frac{Q(z)}{N(z)} \right] = \mathcal{Z}^{-1} \left[\sum_{\mu=1}^N \frac{k_{\mu}}{1 - z_{\mu} z^{-1}} \right] = \sum_{\mu=1}^N k_{\mu} z_{\mu}^n.$$



Diferenční rovnice - mikroekonomický model

Rovnice nabídky - nabídka **dnes** závisí na **včerejší** ceně a to tak, že nabídka stoupá s rostoucí cenou. Pro $C > 0$ platí

$$n(k) = Cc(k - 1) + Ax(k). \quad (1)$$



Diferenční rovnice - mikroekonomický model

Rovnice poptávky - poptávka **dnes** závisí na **dnešní** ceně a to tak, že poptávka klesá s rostoucí cenou. Pro $\mathcal{D} > 0$ platí

$$p(k) = -\mathcal{D}c(k) + \mathcal{B}x(k). \quad (2)$$



Diferenční rovnice - mikroekonomický model

Rovnost nabídky a poptávky

$$n(k) = p(k) \quad (3)$$

pak vede na diferenční rovnici prvního řádu

$$c(k) + \frac{C}{D}c(k-1) = \frac{B-A}{D}x(k). \quad (4)$$



Řešení diferenční rovnice 1.řádu

Pro jednoduchost označíme

$$\frac{\mathcal{C}}{\mathcal{D}} \equiv \gamma \quad \frac{\mathcal{B} - \mathcal{A}}{\mathcal{D}} \equiv \alpha.$$

Diferenční rovnice má v označení $c(k) \equiv y(k)$ tvar

$$y(k) + \gamma y(k - 1) = \alpha x(k)$$



Řešení diferenční rovnice 1.řádu

Za předpokladu $x(k) \equiv 1(k)$ a $y(k) = 0$ pro $k < 0$ dostaneme s použitím z transformace algebraickou rovnicí

$$Y(z) + \gamma z^{-1} Y(z) = \frac{\alpha}{1 - z^{-1}}$$

s řešením v rovině z ve tvaru

$$Y(z) = \frac{\alpha}{(1 - z^{-1})(1 + \gamma z^{-1})}.$$



Řešení diferenční rovnice 1.řádu

Rozkladem na parciální zlomky

$$Y(z) = \frac{\alpha}{(1 - z^{-1})(1 + \gamma z^{-1})} = \frac{k_1}{1 - z^{-1}} + \frac{k_2}{1 + \gamma z^{-1}},$$

kde

$$k_1 = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) Y(z) = \frac{\alpha}{1 + \gamma},$$

$$k_2 = \lim_{z \rightarrow -\gamma} (1 + \gamma z^{-1}) Y(z) = \frac{\alpha \gamma}{1 + \gamma}.$$



Řešení diferenční rovnice 1.řádu

Zpětná transformace funkce

$$Y(z) = \frac{\alpha}{1 + \gamma} \left(\frac{1}{(1 - z^{-1})} + \frac{\gamma}{1 + \gamma z^{-1}} \right)$$

vede na řešení diferenční rovnice

$$y(k) = \frac{\alpha}{1 + \gamma} \left(1 - (-\gamma)^{k+1} \right) 1(k),$$

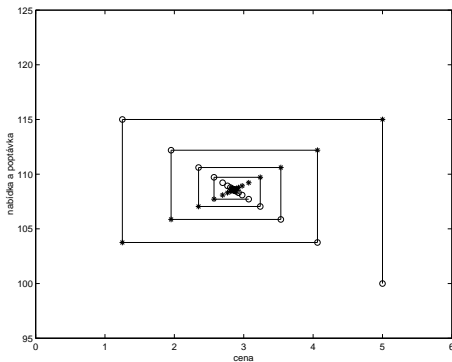
které v případě stabilního trhu $\gamma = \frac{C}{D} < 1$ určuje limitní velikost ceny

$$\lim_{k \rightarrow \infty} c(k) = \frac{\alpha}{1 + \gamma} = \frac{B - A}{C + D}.$$



Řešení diferenční rovnice 1.řádu

Pro následující obrázek byly zvoleny hodnoty
 $A = 100$, $B = 120$, $C = 3$, $D = 4$.



Řešení diferenční rovnice 2.řádu

Hledejme řešení diferenční rovnice druhého řádu, která popisuje LTI diskrétní systém,

$$y(n+2) + a_1y(n+1) + a_2y(n) = b_0x(n+2) + b_1x(n+1) + b_2x(n) \quad (5)$$

splňující počáteční podmínky ve tvaru

$$x(0) = x(1) = 0 \quad \text{a} \quad y(0) = y(1) = 0. \quad (6)$$



Řešení diferenční rovnice 2.řádu

Rovnici (5) řešíme pomocí z-transformace. Protože platí

$$\mathcal{Z}\{y((n+m))\} = z^m \left(Y(z) - \sum_{\nu=0}^{m-1} y(\nu)z^{-\nu} \right)$$

$$\mathcal{Z}\{y(n)\} = Y(z),$$

$$\mathcal{Z}\{y(n+1)\} = z^1(Y(z) - y(0)),$$

$$\mathcal{Z}\{y(n+2)\} = z^2(Y(z) - y(0) - z^{-1}y(1)).$$



Řešení diferenční rovnice 2.řádu

Transformací nalezneme algebraický tvar diferenční rovnice (5) a s použitím počátečních podmínek platí

$$Y(z) \left(z^2 + a_1 z^1 + a_2 \right) = X(z) \left(b_0 z^2 + b_1 z^{-1} + b_2 \right) . \quad (7)$$



Řešení diferenční rovnice 2.řádu

Přenosová funkce $H(z)$ je definována jako podíl obrazu výstupu k obrazu vstupu $\frac{Y(z)}{X(z)}$ pro nulové počáteční podmínky a tedy

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} \\ &= \frac{b_2}{a_2} + \frac{\left[b_0 - \frac{b_2}{a_2} \right] + \left[b_1 - a_1 \frac{b_2}{a_2} \right] z^{-1}}{(1 - z_1 z^{-1})(1 - z_2 z^{-1})} \\ &= \frac{b_2}{a_2} + \frac{c_0 + c_1 z^{-1}}{(1 - z_1 z^{-1})(1 - z_2 z^{-1})}, \end{aligned} \tag{8}$$



Řešení diferenční rovnice 2.řádu

kde z_1, z_2 jsou póly přenosové funkce

$$z_{1,2} = \left(-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2} \right) / 2. \quad (9)$$

a

$$c_0 = b_0 - \frac{b_2}{a_2} \quad \text{a} \quad c_1 = b_1 - a_1 \frac{b_2}{a_2}. \quad (10)$$



Řešení diferenční rovnice 2.řádu

Impulsní odezvu určíme jako inverzní z-transformaci přenosové funkce.

Potože platí

$$\lim_{z \rightarrow z_1} H(z)(1 - z_1 z^{-1}) = \frac{c_0 z_1 + c_1}{z_1 - z_2},$$
$$\lim_{z \rightarrow z_2} H(z)(1 - z_2 z^{-1}) = -\frac{c_0 z_2 + c_1}{z_1 - z_2},$$

obdržíme impulsní odezvu ve tvaru



Řešení diferenční rovnice 2.řádu

$$\begin{aligned}h(n) \equiv \mathcal{Z}^{-1}\{H(z)\} &= \mathcal{Z}^{-1}\left(\frac{b_2}{a_2} + \frac{\left[b_0 - \frac{b_2}{a_2}\right] + \left[b_1 - a_1 \frac{b_2}{a_2}\right] z^{-1}}{(1 - z_1 z^{-1})(1 - z_2 z^{-1})}\right) \\ &= \frac{b_2}{a_2} \delta(n) + \left(c_0 \frac{z_1^{n+1} - z_2^{n+1}}{z_1 - z_2} + c_1 \frac{z_1^n - z_2^n}{z_1 - z_2}\right)\end{aligned}$$



