Systémy a procesy

prof. RNDr. Miroslav Vlček, DrSc.

2. března 2006

Obtíže definice systému
Definovat systém bývá obvykle složitější než ho pojmenovat, či ukázat na něj. Bývá obtížné nalézt definici systému tak, abychom mohli být přesvědčeni o universálnosti tohoto pojmu. Běžně se snažíme vymezit systém charakteristickými vlastnostmi, se kterými vystačíme při modelování:

- systém považujeme za část prostředí, kterou lze od jejího okolí oddělit fyzickou nebo myšlenkovou hranicí,
- systém se skládá z podsystémů, vzájemně propojených součástí.

Pro naše účely budeme považovat za systém část našeho světa, která se svým okolím nějak interaguje, například prostřednictvím vstupu a výstupu.

Vnitřní modely systémů
Vnitřní modely jsou stavové modely, které transformují vektor vstupů u na vektor vnitřních stavů x a ten na vektor výstupních veličin y. Stavové modely popisujeme soustavou diferenciálních rovnic prvního řádu pro systémy se spojitým časem a soustavy diferenčních rovnic prvého řádu pro systémy s diskrétním časem. Stavový popis vystihuje vnitřní strukturu systému.

Vnější modely systémů
Vnější model vychází z popisu systému vektorem vstupu u a vektorem výstupu y. Systém tak chápeme jako černou skříňku, o jejíchž vlastnostech se dozvíme pouze tehdy, jestliže budeme zkoumat jeho reakci na vnější události (signály, data). Když na vstup systému přivedeme definovaný signál obdržíme na opačném konci výstupní odezvu. Analýzou vstupního a výstupního signálu můžeme systém identifikovat. Vnější modely systémů mohou být modely analytické, parametrické nebo neparametrické. Vnější modely v případě spojitého, resp. diskrétního času popisujeme diferenciálními, resp. diferenčními rovnicemi, které jsou obecně vyššího řádu než prvního.

Spojitý a diskrétní čas

spojitý čas	diskrétné čas
diferenciální rovnice	diferenční rovnice
Laplaceova transformace	z-transformace
přenosová funkce $H(p)$	přenosová funkce $H(z)$

Pozornost bude věnována systémům s diskrétním časem. Tento záměr se opírá o následující důvody:

- praktické případy pozorování vstupních a výstupních signálů se odehrávají v diskrétních časových okamžicích
- simulace systému nebo jeho řízení počítačem se vždy týká diskrétních dat

Role matematiky
Matematika sama je systémem, který má na vstupu jisté abstraktní axiomy a na výstupu tvrzení, která mohou být velmi často verifikována jinými prostředky. Matematika nepřináší odpověď na otázku prvního hybatele, avšak umožňuje nám díky své logické struktuře odpovědět na otázku, zda naše modely čehokoliv jsou dobré nebo špatné. Matematika je nástroj. Avšak hodný obdivu. Hvězd se dotýká. Mám na mysli třeba Fermatovu větu, tzv. Fermat's Last Theorem (neexistují přirozená $n > 2$, pro která má rovnice $x^n + y^n = z^n$ přirozená řešení x, y, z) a jako důsledek jejího, teprve nedávno dosaženého důkazu, jednoznačnou a jedinečnou platnost Pythagorovy věty a tedy možnost vytvořit pravoúhlý systém ($x = 3, y = 4, z = 5$) souřadnic kdekoliv a kýmkoliv v celém vesmíru.
Nedávejme proto vinu statistice, když si myslíme, že údaje o porodnosti, o demografickém vývoji, inflaci či o počtu narkomanů jsou podle naší zkušenosti jiné než publikují různé instituce. Chyba je někde jinde. Někdy v axiomech, někdy v metodě pořizování vstupních dat, jindy v počtářích samotných.

Matematika jako nástroj

Novodobý příběh dvojic prvočísel a neb jak pošetilý matematik nachytal firmu INTEL při předstírání, že chyba Pentia neexistuje (1995). Matematik Thomas Nicely, z Lynchburg College ve Virginii studoval tzv. párová prvočísla. V základním kursu matematiky se dokazuje, že harmonická řada složená ze všech přirozených čísel diverguje

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \to \infty. \tag{1}$$

Pokud zvolíme všechna prvočísla, lze ukázat, že takto sestavená harmonická řada je rovněž divergentní a tedy

$$\sum_{\forall p}^{\infty} \frac{1}{p} \to \infty, \tag{2}$$

kde p označuje prvočíslo. Jestliže z množiny prvočísel ponecháme podmnožinu tzv. párových prvočísel, zjistíme, že taková harmonická řada již konverguje a platí

$$\sum_{\forall p_2}^{\infty} \frac{1}{p_2} = \frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{29}+\frac{1}{31}+\ldots\frac{1}{p}+\frac{1}{p+2}+\ldots \tag{3}$$

Není teoreticky známo, k jaké hodnotě uvedená řada konverguje, proože není známá obecná formule pro generování prvočísel. Na tomto místě nastupuje experimentální matematika, kterou také používal Thomas Nicely. Při přechodu z PC486 na první Pentium zjistil, že mu sumy typu (3) dávají zcela jiné výsledky než dostával v minulosti. Prostřednictvím internetu seznámil se svým podezřením matematickou veřejnost, s tím, že aritmetická jednotka chybně reprezentuje prvočísla. A mezi matematiky se strhla lavina příkladů chybného výpočtu s Pentiem. Typickým příkladem bylo počítání některých zlomků s prvočísly, které uváděl Tim Coe z Vitesse Semiconductor, Southern California. Pro hodnotu podílu

$$c = \frac{4195835}{3145727} = \frac{5 \times 7 \times (2^3 \times 3^4 \times 5 \times 37 + 1)}{3 \times 2^{20} - 1} = \\ = 1.33382044\ldots$$

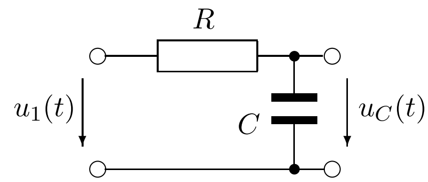
Pentium procesor dával hodnotu

$$c = \frac{4195835}{3145727} = \frac{5 \times 7 \times 119881}{13 \times 241979} = 1.33373906\ldots$$

Firma INTEL se pod tíhou faktů rozhodla stáhnout chybné procesory a aritmetickou jednotku opravit. Naučení z tohoto příběhu je jednoduché. Člověk, homo technicus dělá chyby, matematika nikoliv.

Některé příklady

- Integrační RC článek - diferenciální rovnice pro napětí $u_C(t)$



Protože platí jednoduchá rovnice pro napětí na odporu $u_R(t)$ a napětí na kondenzátoru $u_C(t)$

$$u_1(t) = u_R(t) + u_C(t), \tag{4}$$

a dále je

$$u_R(t) = Ri(t) = RC\frac{du_C}{dt}, \tag{5}$$

dostáváme diferenciální rovnici prvního řádu

$$RC\frac{du_C}{dt} + u_C = u_1. \tag{6}$$

- Mikroekonomický model variace ceny vlivem nabídky a poptávky - diferenční rovnice
Rovnice nabídky - nabídka *dnes* závisí na *včerejší* ceně a to tak, že nabídka stoupá s rostoucí cenou. Pro $\mathcal{C} > 0$ platí

$$n(k) = \mathcal{C}c(k-1) + \mathcal{A}x(k). \tag{7}$$

Rovnice poptávky - poptávka *dnes* závisí na *dnešní* ceně a to tak, že poptávka klesá s rostoucí cenou. Pro $\mathcal{D} > 0$ platí

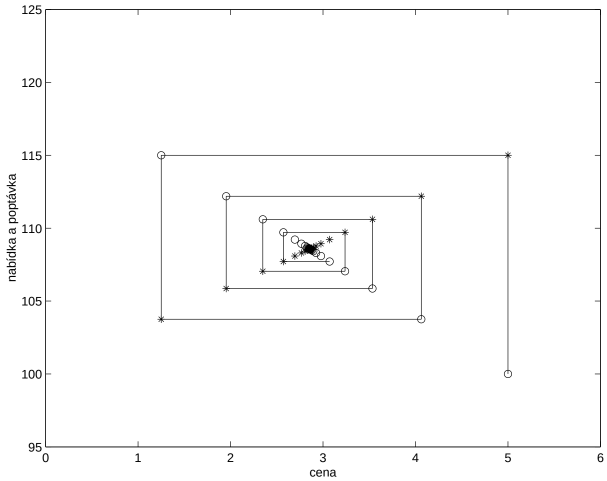
$$p(k) = -\mathcal{D}c(k) + \mathcal{B}x(k). \tag{8}$$

Rovnost nabídky a poptávky

$$n(k) = p(k) \tag{9}$$

pak vede na diferenční rovnici prvního řádu

$$c(k) + \frac{\mathcal{C}}{\mathcal{D}}c(k-1) = \frac{\mathcal{B}-\mathcal{A}}{\mathcal{D}}x(k). \tag{10}$$



Obrázek 1: Pavučinkový diagram

.

Literatura

([1]) M. Svítek, J. Borka, M.Vlček: Modelování systémů a procesů,
Vydavatelství ČVUT, Praha 2001

[2] G. E. Carlson: Signal and Linear System Analysis with MATLAB, John Wileys and Sons., Inc. 1998

[3] P. Horáček: Systémy a modely, Vydavatelství ČVUT, Praha 1999

[4] V. Soukup: Teorie dynamických systémů, Vydavatelství ČVUT, Praha 1998

[5] P. Zítek, R. Petrová: Matematické simu- lační modely, Vydavatelství ČVUT, Praha 1996

[6] J. Štecha, V. Havlena: Teorie dynamických systémů, Vydavatelství ČVUT, Praha 1993

[7] S. Thomas Alexander : *Adaptive Signal Processing,* Springer Verlag, New York Inc. 1986

[8] R.G.D. Allen : *Matematická ekonomie,* ACADEMIA, Praha 1971