Vniřní a vnější popis systému

prof. RNDr. Miroslav Vlček, DrSc.

23. března 2006

Příklad stavového modelu z reálného světa

Příklad 3 Vznik nové fakulty a výpočet například předpokládaných absolventů takové fakulty jsou ukázkou diskrétního stavového systému, ve kterém složka stavového vektoru x_i reprezentuje počet studentů v i-tém ročníku. Předpokládejme, že do prvního ročníku budeme přijímat pravidelně každý rok $u(n)$ studentů. Jestliže z každého ročníku postoupí bez potíží $a_1 x_i$ studentů, opakuje $a_2 x_i$ studentů a fakultu opustí $a_3 x_i$ studentů, kde $a_1 + a_2 + a_3 = 1$, nalezněte počty absolventů, pokud úspěšnost u státních závěrečných zkoušek je a α.
Stavový popis této vzorové situace je

$$\begin{bmatrix} x_1(n+1) \\ x_2(n+1) \\ x_3(n+1) \\ x_4(n+1) \\ x_5(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & a_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_1 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \\ x_3(n) \\ x_4(n) \\ x_5(n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(n)$$

$$y(n) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \\ x_3(n) \\ x_4(n) \\ x_5(n) \end{bmatrix}.$$

Pokud chceme zjistit, jak se bude vyvíjet celkový počet studentů, bude mít výstup tvar součtu stavových veličin

$$y(n) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \\ x_3(n) \\ x_4(n) \\ x_5(n) \end{bmatrix}.$$

Převod spojitého systému na diskrétní

Spojitý systém popsaný stavovými rovnicemi

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\,\mathbf{u}(t), && (1) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t), && (2) \end{aligned}$$

můžeme převést na ekvivalentní diskrétní systém tak, že čas t nahradíme diskrétními časovými okamžiky $t = nT$, kde T je vzdálenost mezi následujícími časovými okamžiky. Všechny veličiny měříme pouze v čase $t = nT$ a proto

$$x(t) = x(nT) \rightarrow x(n),$$

$$y(t) = y(nT) \rightarrow y(n),$$

$$u(t) = u(nT) \rightarrow u(n).$$

Derivaci stavu $\dot{x}(t)$ nahradíme v prvním přiblížení první diferencí

$$\dot{\mathbf{x}}(t) \approx \frac{\mathbf{x}((n+1)T) - \mathbf{x}(nT)}{T} = \frac{1}{T}(\mathbf{x}(n+1) - \mathbf{x}(n)). \qquad (3)$$

Dosazení do (1) a (2) dostaneme po úpravě diskrétní tvar stavových rovnic

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(n+1) &= (\mathbf{1} + T\mathbf{A})\,\mathbf{x}(n) + T\mathbf{B}\,\mathbf{u}(n) && (4) \\ \mathbf{y}(n) &= \mathbf{C}\,\mathbf{x}(n) + \mathbf{D}\mathbf{u}(n) && (5) \end{aligned}$$

V rovnici (4) identifikujeme $\mathbf{M} = \mathbf{1} + T\mathbf{A}$ a $\mathbf{N} = T\mathbf{B}$ a obdržíme stavový popis v diskrétním čase tak, jak byl zaveden v předchozí přednášce.

Vztah vnějšího a vnitřního popisu systému

Diferenciální rovnice (6) druhého řádu s počátečními podmínkami ve tvaru (7)

$$\ddot{y}(t) + a_1\,\dot{y}(t) + a_0\,y(t) = u(t) \qquad (6)$$

$$y(0) = c_1 \quad \text{a} \quad \dot{y}(0) = c_2, \qquad (7)$$

udává vztah vstupu $u(t)$ a výstupu $y(t)$ lineárního stacionárního systému. Tento vnější popis převedeme na stavový popis volbou stavového vektoru

$$\begin{aligned} x_1(t) &= y(t)\,, \\ x_2(t) &= \dot{y}(t)\,. \end{aligned}$$

Dosadíme nejprve $x_2(t) = \dot{y}(t)$ do původní diferenciální rovnice a je

$$\dot{x}_2(t) + a_1\, x_2(t) + a_0\, x_1(t) = u(t)\,. \tag{8}$$

Současně platí

$$\dot{x}_1(t) = \dot{y}(t) = x_2(t)\,. \tag{9}$$

Dostáváme tak

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \tag{10}$$

nebo

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \mathbf{B}u(t)\,. \tag{11}$$

Rovnici pro výstup vyjádříme z definice stavových veličin

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + 0\, u(t)\,. \tag{12}$$

Matice $\mathbf{D}$ je tedy nulová a pro výstupní matici dostáváme

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\,. \tag{13}$$

Je vhodné podotknout, že počáteční podmínky se transformují do stavového popisu takto

$$y(0) = x_1(0) = c_1 \quad \text{a} \quad \dot{y}(0) = x_2(0) = c_2\,. \tag{14}$$

Lineární systém, který má matici $\mathbf{D}$ nulovou, se nazývá ryzí systém.

Obecný případ nalezení stavových rovnic z diferenciální rovnice n-tého řádu

Předpokládejme opět, že systém je popsán diferenciální rovnicí

$$\begin{aligned} & y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \dots \\ & \qquad \dots + a_1 y^{(1)}(t) + a_0 y(t) = u(t) \end{aligned} \tag{15}$$

Ukážeme nyní, jak se koeficienty diferenciální rovnice objeví ve stavových maticích. Postup je zobecněním předcházejícího příkladu. Stavové veličiny volíme jako derivace hledaného řešení $y(t)$ takto

$$\begin{aligned} x_1(t) &= y(t)\,, \\ x_2(t) &= y^{(1)}(t)\,, \\ x_3(t) &= y^{(2)}(t)\,, \\ &\vdots \\ x_n(t) &= y^{(n-1)}(t)\,, \end{aligned} \tag{16}$$

Ze soustavy (12) a diferenciální rovnice plyne postupně

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t)\,, \\ \dot{x}_2(t) &= x_3(t)\,, \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1}(t) &= x_n(t)\,, \\ \dot{x}_n(t) &= u(t) - a_0 x_1(t) - a_1 x_2(t) - \dots - a_{n-1} x_n(t)\,, \end{aligned} \tag{17}$$

a tedy

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & \vdots & & & \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

V souladu s obecným značením pro stavový popis LTI systémů označíme

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & \vdots & & & \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

a

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Dále platí

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix},$$

takže

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

a

$$D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}.$$

Počáteční podmínky mají tvar

$$\begin{aligned} y(0) &= x_1(0) = & c_1\,, \\ y^{(1)}(0) &= x_2(0) = & c_2\,, \\ y^{(2)}(0) &= x_3(0) = & c_3\,, \\ & \vdots & \\ y^{(n-1)}(0) &= x_n(0) = & c_n\,, \end{aligned} \tag{18}$$