

# OBSAH

## 1. STACIONÁRNÍ MAGNETICKÉ POLE (Malá)

1.1 Vektor magnetické indukce .....	5
1.2 Pohyb nabité částice v magnetickém poli .....	6
1.3 Magnetická síla působící na vodič protékaný elektrickým proudem .....	8
1.4 Proudová smyčka v homogenním magnetickém poli .....	10
1.5 Magnetický moment .....	11
1.6 Biotův-Savartův zákon .....	12
1.7 Ampérův zákon .....	15
Příklady ke kap. 1 .....	18

## 2. ELEKTROMAGNETICKÁ INDUKCE (Malá)

2.1 Magnetický indukční tok .....	20
2.2 Faradayův zákon elektromagnetické indukce .....	20
2.3 Aplikace indukovaného elektromotorického napětí .....	21
2.4 Vířivé proudy .....	22
2.5 Vlastní a vzájemná indukčnost.....	22
2.6 Obvod LR . .....	25
2.7 Hustota energie magnetického pole .....	26
Příklady ke kap. 2 .....	27

## 3. MAGNETICKÉ POLE V LÁTKÁCH (Malá)

3.1 Magnetizace .....	29
3.2 Magnetická susceptibilita a permeabilita .....	31
3.3 Diamagnetismus .....	34
3.4 Paramagnetismus .....	34
3.5 Feromagnetismus .....	35
Příklady ke kap. 3 .....	37

## 4. ELEKTROMAGNETICKÉ POLE (Malá)

4.1 Maxwellovy rovnice .....	39
4.2 Rovinná elektromagnetická vlna .....	42
4.3 Přenos energie elektromagnetickým vlněním, tlak vlnění .....	45
4.4 Spektrum elektromagnetických vln .....	47
Příklady ke kap. 4 .....	48

## **5. GEOMETRICKÁ OPTIKA (Novák)**

5.1 Podstata světla, rychlost světla .....	50
5.2 Zobrazování optickými soustavami.....	50
5.3 Optické přístroje .....	56
5.4 Optická vlákna .....	57
Příklady ke kap.5 .....	59

## **6. VLNOVÁ OPTIKA (Novák)**

6.1 Základní pojmy a veličiny vlnové optiky.....	61
6.2 Odraz a lom světla .....	62
6.3 Interference světla.....	64
6.4 Interference na tenkých vrstvách .....	67
6.5 Interferometry .....	67
6.6 Difrakce světla .....	70
6.7 Difrakční mřížky, holografie .....	72
6.8 Polarizace světla .....	75
Příklady ke kap. 6 .....	76

## **7. KVANTOVÝ CHARAKTER ELEKTROMAGNETICKÉHO ZÁŘENÍ**

(Nováková)

7.1 Interakce elektromagnetického záření s látkou .....	78
7.2 Vyzařování těles .....	79
7.3 Záření absolutně černého tělesa .....	80
7.4 Fotoelektrický jev .....	81
7.5 Comptonův jev .....	84
7.6 Tvoření elektron-pozitronových párů .....	86
7.7 Fotony a elektromagnetické vlny .....	86
Příklady ke kap. 7 .....	87

## **8. ZÁKLADY KVANTOVÉ MECHANIKY (Nováková)**

9.1 Vlnová povaha částic .....	90
9.2 Heisenbergovy relace neurčitosti .....	93
9.3 Vlnová funkce a Schrödingerova rovnice .....	94
9.4 Volná částice .....	95
9.5 Elektron v jednorozměrné potenciálové jámě .....	96
9.6 Tunelování .....	102
9.7 Harmonický oscilátor .....	103
Příklady ke kap. 8 .....	114

## **9. VODÍKOVÝ ATOM (Nováková)**

9.1 Emisní a absorpční spektra atomů .....	104
9.2 Kvantověmechanické řešení atomu vodíku .....	105

9.3 Spin elektronu .....	109
9.4 Orbitální a spinový magnetický dipólový moment elektronu .....	110
9.5 Jaderná magnetická rezonance .....	110
Příklady ke kap. 9 .....	111

## **10. VÍCEELEKTRONOVÉ ATOMY (Nováková)**

10.1 Pauliho vylučovací princip.....	112
10.2 Elektronové konfigurace .....	112
10.3 Periodická soustava prvků .....	114
10.4 Rentgenová spektra.....	116
10.5 Lasery .....	117
Příklady ke kap. 10 .....	121

## **11. FYZIKA PEVNÝCH LÁTEK (Novák)**

11.1 Charakteristika pevných látek .....	122
11.2 Krystalová struktura .....	124
11.3 Mřížkové roviny .....	126
11.4 Difrakce záření krystalem .....	127
11.5 Vazby v pevných látkách .....	128
11.6 Kmity krystalové mřížky.....	131
11.7 Tepelné kapacity pevných látek .....	132
Příklady ke kap. 11 .....	132

## **12. KOVY, IZOLANTY, POLOVODIČE (Novák)**

12.1 Elektron v periodickém potenciálu .....	134
12.2 Pásová struktura pevných látek .....	137
12.3 Kovy .....	138
12.4 Polovodiče .....	139
Příklady ke kap. 12 .....	144

## **13. ATOMOVÉ JÁDRO (Nováková)**

13.1 Základní charakteristiky atomového jádra .....	146
13.2 Hmotnost a náboj jádra .....	146
13.3 Poloměr a tvar atomového jádra .....	147
13.4 Spin jádra a magnetický moment .....	148
13.5 Vazebná energie jádra .....	149
13.6 Energetické hladina v jádře .....	150
13.7 Jaderné síly .....	150
13.8 Stabilita jader a jejich přeměny .....	150
13.9 Radioaktivní přeměny .....	152
13.10 Zákony zachování v radioaktivních přeměnách .....	152
13.11 Přeměna alfa .....	153

13.12 Přeměna beta .....	154
13.13 Emise záření gama .....	155
13.14 Datování radionuklidy .....	156
Příklady ke kap. 13 .....	156

#### **14. PROCESY UVOLŇUJÍCÍ JADERNOU ENERGII (Nováková)**

14.1 Štěpení těžkých jader .....	158
14.2 Termojaderná fúze .....	159
Příklady ke kap. 14 .....	160

# 1. Stacionární magnetické pole

Při řešení problematiky elektrického pole jsme ukázali, že v případě, kdy se náboje pohybují v jednom směru, dochází ke vzniku elektrického proudu. Pokud do blízkosti vodiče, kterým prochází proud, umístíme kompas, zjistíme, že se střelka kompasu vychýlí. Toto vychýlení je známkou toho, že v okolí vodiče, kterým prochází proud, existuje nějaké silové pole. Ukazuje se, že se jedná o silové pole, se kterým jsme se prozatím ještě nesetkali. Jeho studiu bude věnována tato kapitola.

## 1.1 Vektor magnetické indukce

Uvažujme částici s elektrickým nábojem  $Q$ . Tato částice prochází prostorem (pro jednoduchost vakuem), ve kterém je zaveden souřadný systém a kde není žádné elektrické pole. Může nastat situace, že se nabitá částice bude v určité části prostoru vychylovat ze své původní trajektorie (přímky) vůči zavedenému souřadnicovému systému. Na nabitou částici musí tedy v této části prostoru působit nějaká síla. Z pozorování se dá určit, že velikost působící síly závisí na velikosti náboje částice a velikosti rychlosti, se kterou se částice pohybuje. Velikost působící síly dále závisí na směru, pod kterým do této části prostoru vletí. Směr síly závisí na tom, zda je náboj kladný či záporný. Dá se ukázat, že na nabitou částici působí síla

$$\vec{F} = Q\vec{v} \times \vec{B}, \quad (1.1)$$

kde  $\vec{B}$  je veličina charakterizující přítomné silové pole. Toto silové pole se nazývá **magnetické** a veličina  $\vec{B}$  se nazývá **vektor magnetické indukce**. Její jednotkou v SI je tesla, ( $T = N \cdot A^{-1} \cdot m^{-1}$ ). Velikost 1 T je značná, v běžné praxi se setkáme se silnými magnetickými poli elektromagnetů, elektromotorů a transformátorů do 2 T, magnetické pole Země na zemském povrchu má velikost přibližně  $3 \cdot 10^{-5}$  T.

Magnetické pole vzniká kolem vodičů protékaných proudem, dále kolem určitých látek – magnetik. Z některých magnetik se zhotovují magnety, které se v běžné praxi používají např. v reproductorech, k zachycování železných předmětů atd.

Ze vztahu (1.1) plyne, že magnetická síla je vždy kolmá na rychlost  $\vec{v}$ , tedy na okamžitou tečnu k trajektorii pohybující se částice. Z tohoto důvodu nemůže magnetická síla konat práci,

$$A = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0. \quad (1.2)$$

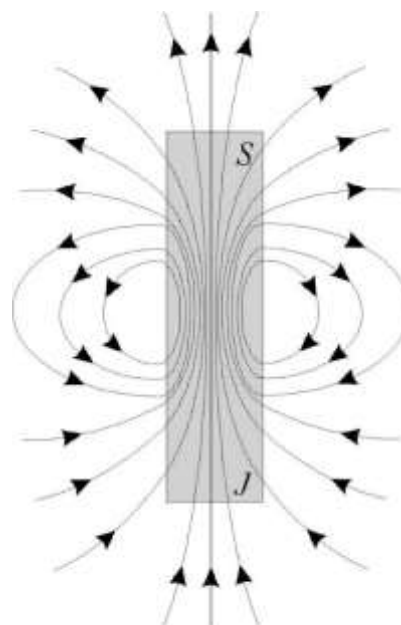
Stacionárním magnetickým polem se proto nemůže dodávat energie nabitým částicím (pro urychlení nabitých částic je třeba použít pole elektrické).

Pokud se nabitá částice pohybuje částí prostoru, kde je jak elektrické tak i magnetické pole, je síla, která působí na tuto částici, dána výrazem

$$\vec{F} = Q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}). \quad (1.3)$$

Síla popsaná výrazem (1.3) se nazývá **Lorentzova síla**.

Podobně jako znázorňujeme elektrické pole pomocí elektrických siločar, znázorňujeme magnetické pole **magnetickými indukčními čarami**. Magnetické indukční čáry jsou vždy uzavřené křivky. Směr magnetické indukce  $\vec{B}$  je v každém bodě tečnou k indukční čáře (obr. 1.1).



Obr. 1.1

## 1.2 Pohyb nabité částice v magnetickém poli

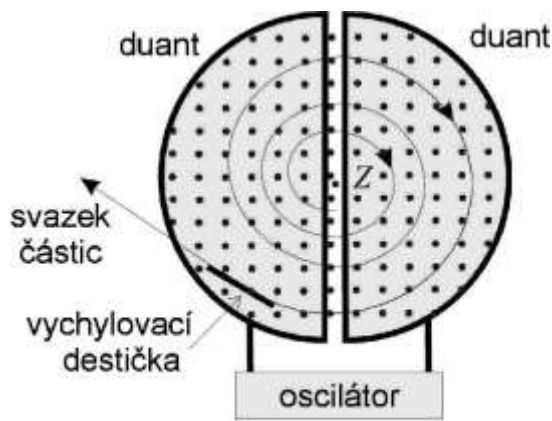
Uvažujme nyní, že v části prostoru existuje pouze homogenní magnetické pole. Obecně je trajektorie nabité částice v homogenním magnetickém poli šroubovice. Jsou však možné dva speciální případy. Pokud nabitá částice vletí do magnetického pole rovnoběžně s magnetickými indukčními čarami, je podle vztahu (1.1) síla, která na částici působí, nulová. Trajektorie nabité částice bude v tomto případě přímka rovnoběžná se směrem indukčních čar. Druhý speciální případ je, když nabitá částice vletí do magnetického pole kolmo na magnetické indukční čáry. Velikost síly je rovna  $F = QvB$  a síla je v každém okamžiku kolmá na rychlost a na vektor magnetické indukce. Velikost síly se nemění. Odpovídající trajektorii částice je kružnice. Pro její poloměr plyne z rovnosti sil odstředivé a Lorentzovy  $QvB = m \frac{v^2}{r}$  vztah

$$r = \frac{mv}{QB} \quad (1.4)$$

a pro úhlovou rychlost pohybu částice po kružnici

$$\omega = \frac{QB}{m}. \quad (1.5)$$

Úhlová rychlost pohybu nabitě částice ve výrazu (1.5) se nazývá cyklotronová úhlová frekvence. Označení pochází z názvu urychlovače nabitých částic **cyklotronu** (obr. 1.2). Jeho princip je založen na tom, že úhlová frekvence  $\omega$  podle výrazu (1.5) je charakteristická pro danou částici, závisí pouze na poměru  $\frac{Q}{m}$  jejího náboje a hmotnosti a na velikosti magnetické indukce  $B$  a nezávisí na rychlosti pohybu nabitě částice ani na poloměru její dráhy. V cyklotronu je homogenní magnetické pole, a proto všechny částice se stejným poměrem  $\frac{Q}{m}$  obíhají po kružnicích stejnou frekvencí  $\frac{\omega}{2\pi}$ .



Obr. 1.2

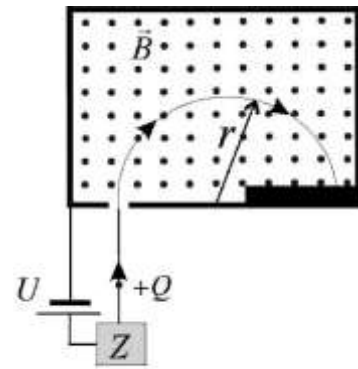
Cyklotron má dvě duté, proti sobě otevřené elektrody ve tvaru písmene D. Obě elektrody, až na mezeru, kterou jsou odděleny, tvoří povrch nízkého válce. Jsou vyrobeny z neferomagnetického, elektricky vodivého materiálu (např. měděných plechů) a nacházejí se v ploché vakuové komoře. Tyto tzv. duanty jsou částí elektrického oscilátoru, který vytváří střídavé napětí ve šterbině mezi nimi. Celá komora i s duanty se nachází mezi póly (o průměru až několika metrů) silného elektromagnetu (např.  $B = 1,5 \text{ T}$ ). Magnetické pole má směr rotační osy válce elektrod. Na elektrody se přivádí elektrické napětí  $U$ , které v mezeře vytvoří elektrické pole o intenzitě  $\vec{E}$ . Uvnitř elektrod je elektrické pole nulové (jako musí být nulové elektrostatické pole uvnitř každého vodiče). Pokud do cyklotronu vletne ze zdroje  $Z$ , který je umístěn ve středu cyklotronu, nabitá částice, bude se pohybovat po kruhové dráze a při průchodu mezi elektrodami bude urychlena elektrickým polem. Bude-li napětí  $U$  měnit znaménko cyklotronovou frekvencí, bude nabitá částice vstupovat do mezery vždy ve chvíli, kdy je vektor intenzity elektrického pole  $\vec{E}$  orientovaný podle okamžitého směru pohybu částice, a ke změně směru  $\vec{E}$  dojde vždy v době, kdy je částice uvnitř elektrody, v prostoru bez elektrického pole. Během jednoho oběhu tak částice zvýší svou rychlost a energii. Cyklotron vždy urychluje celý shluk částic. Při dosažení maximální rychlosti a tím také maximálního poloměru dráhy jsou částice vyvedeny přidavnou elektrodou ven z cyklotronu.

Pokud mají protony energii vyšší než asi 50 MeV ( $1 \text{ eV} = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J}$ ), začínají při jejich urychlování klasickými cyklotrony selhávat z principiálních důvodů. Základním předpokladem pro činnost cyklotronu je nezávislost frekvence obíhání nabitě částice na její rychlosti. Pokud částice dosahují velkých rychlostí, je nutno problém považovat za relativistický. V tomto případě hmotnost částice závisí na její rychlosti (s rostoucí rychlostí se zvětšuje) a nelze ji považovat za konstantu. Podle vztahu (1.5) pak úhlová frekvence částice klesá. Velmi rychlé částice tedy „vypadnou z rytmu“ frekvence cyklotronového oscilátoru.

Dalším problémem je velikost poloměru kruhové dráhy, po které se pohybuje nabitá částice s velkou rychlostí. Magnet vytvářející homogenní magnetické pole by musel mít velkou plochu pólových nástavců.

Zařízení, které odstraňuje obě popsané nevýhody se nazývá **synchrotron**. Velikost magnetické indukce  $B$  ani frekvence oscilátoru  $f_{osc}$  nejsou v tomto případě konstantní. Synchrotron je navržen tak, aby se obě veličiny mohly během urychlovacího cyklu s časem měnit, což způsobí, že frekvence obíhající částice zůstane v rezonanci s oscilátorem po celou dobu urychlování a částice se pohybují po kruhové trajektorii (a ne po spirále jako v případě cyklotronu). Pak stačí, aby se magnetické pole nacházelo pouze kolem této kružnice, a nikoli na celé ploše kruhu. Kružnice však musí mít velký poloměr, má-li být dosaženo vysokých energií.

Silového účinku magnetického pole na pohybující se nabitou částicí se rovněž využívá v hmotnostní spektroskopii nabitých částic. Hmotnostní spektroskopie studuje rozdělení atomů a molekul podle hmotnosti. V **hmotnostním spektrometru** při uspořádání podle obr. 1.3 jsou analyzované částice ionizovány (v ionizačním zdroji  $Z$ ) a získají tím náboj  $Q$ . V místě ionizace je elektrický potenciál o napětí  $U$  vyšší než v separační komoře. Elektrickým polem jsou proto kladné ionty přitahovány do separační komory. Při vstupu do komory mají kinetickou energii, kterou získaly urychlením v elektrostatickém poli



Obr. 1.3

$$\frac{1}{2}mv^2 = QU. \quad (1.6)$$

V separační komoře se vlivem magnetického pole o indukci  $\vec{B}$  pohybují nabitě částice po kruhové dráze o poloměru  $r$  daném výrazem (1.4). Z tohoto vzorce a ze vztahu (1.6) dostaneme poměr hmotnosti a náboje částice

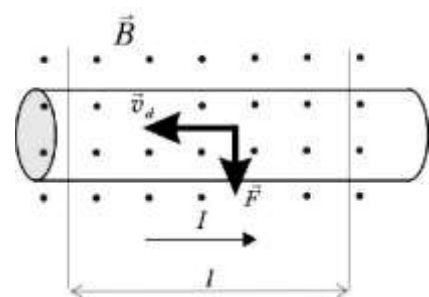
$$\frac{m}{Q} = \frac{B^2 r^2}{2U}. \quad (1.7)$$

Je zřejmé, že při známém napětí  $U$  a velikosti magnetické indukce  $B$  je poměr  $\frac{m}{Q}$  jednoznačně dán poloměrem dráhy  $r$ , který se stanoví z polohy detektoru iontů a vstupní štěrbin. Náboj  $Q$  je také znám, je roven elementárnímu náboji (při vícenásobné ionizaci dvojnásobku nebo trojnásobku elementárního náboje), a tak touto metodou lze získat informaci o hmotnosti částice. Tak lze například stanovit, které izotopy prvku a v jaké koncentraci vystoupily z ionizačního zdroje.

### 1.3 Magnetická síla působící na vodič protékáný elektrickým proudem

V minulém odstavci jsme se zabývali silovými účinky magnetického pole na nabitou částici. V předchozí kapitole, ve které jsme studovali vznik a vlastnosti elektrického proudu, jsme uvedli, že ve vodiči je proud tvořen pohybujícími se elektrony.

Na obrázku 1.4 je znázorněn malý úsek  $l$  vodiče, kterým protéká proud  $I$ , a který je umístěn v homogenním magnetickém poli o indukci  $\vec{B}$ . Vektor  $\vec{B}$  je kolmý na rovinu obrázku a je orientován tak, že z obrázku vystupuje. Elektrony se pohybují driftovou rychlostí  $\vec{v}_d$  v opačném směru než je kladný směr proudu. Plocha průřezu vodiče je  $S$ . Spočtíme sílu působící na úseku  $l$ , tj. sílu na nosiče pohybující se v objemu velikosti  $lS$ .



Obr. 1.4



Počet elektronů pohybujících se v tomto úseku vodiče je

$$N = nSl, \quad (1.8)$$

kde  $n$  je koncentrace nosičů náboje (počet nosičů náboje v jednotkovém objemu). Celková síla magnetického pole působící na všechny elektrony na úseku délky  $l$  vodiče je

$$\vec{F} = -Ne\vec{v}_d \times \vec{B}. \quad (1.9)$$

Jestliže zavedeme vektor délky vodiče  $\vec{l}$  shodný se směrem proudu, pak rychlost  $\vec{v}_d$  elektronů má opačný směr než  $\vec{l}$ . Pak lze výraz (1.9) přepsat do tvaru

$$\vec{F} = nSev_d \vec{l} \times \vec{B}. \quad (1.10)$$

Součin  $nev_d = i$  udává velikost hustoty proudu a  $Sl = I$  je celkový proud. Úpravou dostáváme výraz pro sílu, kterou působí homogenní magnetické pole na přímý vodič délky  $l$

$$\vec{F} = I\vec{l} \times \vec{B}. \quad (1.11)$$

Orientaci síly stanovíme z výrazu (1.11) podle pravidel vektorového součinu. Pro velikost působící síly plyne

$$F = IlB \sin \varphi, \quad (1.12)$$

kde  $\varphi$  je úhel, který svírají vektory  $\vec{l}$  a  $\vec{B}$ . Síla je největší v případě, že vektory  $\vec{l}$  a  $\vec{B}$  jsou na sebe kolmé. Pak velikost síly lze psát ve tvaru

$$F = IlB. \quad (1.13)$$

Všimněme si, že pokud bychom uvažovali pohyb kladných nosičů náboje ve vodiči, dostali bychom pro sílu identický výsledek.

Vztah (1.11) platí pro přímý vodič v homogenním magnetickém poli. Sílu působící na vodič obecného tvaru v nehomogenním magnetickém poli určíme integrací sil, které působí na infinitezimálně malé úseky vodiče  $d\vec{l}$ . Na velmi malém úseku  $d\vec{l}$  vodiče můžeme považovat magnetické pole za přibližně homogenní s indukcí  $\vec{B}$ . Síla na element vodiče je podle (1.11) rovna

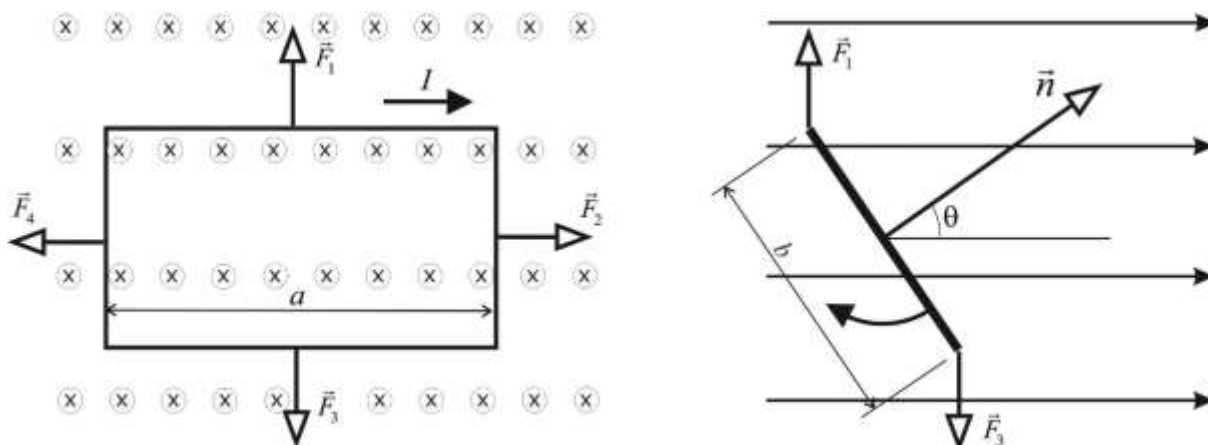
$$d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B}. \quad (1.14)$$

Celkovou sílu působící na vodič dostaneme integrací sil  $d\vec{F}$  po celé délce vodiče

$$\vec{F} = \int I d\vec{l} \times \vec{B}. \quad (1.15)$$

## 1.4 Proudová smyčka v homogenním magnetickém poli

Uvažujme vodič ve tvaru uzavřené křivky, jímž teče elektrický proud a který se nalézá v homogenním magnetickém poli. V homogenním magnetickém poli působí na každý úsek vodiče síla (1.14). Výslednice těchto sil je nulová – smyčka nemá snahu se v magnetickém poli pohybovat, ale výsledný moment sil je nenulový – smyčka má snahu se v poli natočit. Tohoto efektu se využívá v některých elektromotorech.



Obr. 1.5

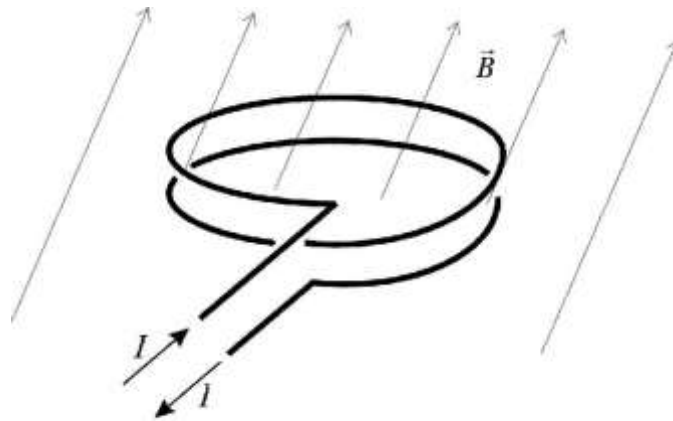
Určeme výslednou sílu v jednoduchém případě obdélníkové smyčky s délkami stran  $a$ ,  $b$  v homogenním magnetickém poli podle obr. 1.5. Síly  $\vec{F}_2$  a  $\vec{F}_4$  jsou stejně velké, opačně orientované a jejich působišťe leží v téže přímce v rovině smyčky. Jejich výslednice i výsledný moment od těchto sil jsou proto nulové. Síly  $\vec{F}_1$  a  $\vec{F}_3$  jsou také stejně velké a opačně orientované. Neleží ale v téže přímce, proto vytvářejí silovou dvojici. Moment silové dvojice má velikost  $M = b \sin \theta F_1$ . Dosadíme-li podle (1.13)  $F_1 = IaB$ , máme  $M = IabB \sin \theta$  - výsledný moment působící na smyčku. Je zřejmé, že velikost  $\vec{M}$  odpovídá výrazu pro velikost vektorového součinu vektorů  $I\vec{S}$  a  $\vec{B}$ . Zbývá jen určit význam vektoru  $\vec{S}$ . Zavedme vektor  $\vec{S}$  jako vektor kolmý na plochu smyčky s velikostí  $S$ , která je rovna velikosti plochy smyčky. Jeho orientaci určíme podle směru proudu a pravidla pravé ruky (prsty pravé ruky ukazují směr proudu a palec ukazuje směr vektoru  $\vec{S}$ ). Moment síly  $\vec{M}$  má takový směr, že se snaží otočit smyčku v magnetickém poli tak, aby vektor  $\vec{S}$  byl rovnoběžný s vektorem magnetické indukce  $\vec{B}$ . Z výše uvedeného postupu plyne, že pro moment síly  $\vec{M}$  působící na smyčku v magnetickém poli platí

$$\vec{M} = I\vec{S} \times \vec{B}. \quad (1.16)$$

Rovnice (1.16) platí nejen pro obdélníkovou smyčku, ale také pro rovinou smyčku jakéhokoli tvaru.

V praxi se často setkáváme s vodičem ve tvaru cívky s  $N$  závitů (na obr. 1.6 jsou dva závity). Pokud vedou oba přírodní vodiče blízko sebe, silová působení na ně se vzájemně vyruší (vedou proud navzájem opačným směrem). Každý závit je téměř rovinná smyčka, výsledný otáčivý moment při  $N$  závitěch tedy bude

$$\vec{M} = NIS \times \vec{B}. \quad (1.17)$$



Obr. 1.6

Ve vztahu (1.17) je  $S$  velikost plochy jednoho závitu.

## 1.5 Magnetický moment

Z elektrického pole známe, že elektrický dipól je tvořen dvěma stejně velkými elektrickými náboji velikosti  $Q$ , opačného znaménka, které jsou umístěny ve vzdálenosti  $l$ . Výsledná síla v homogenním elektrickém poli intenzity  $\vec{E}$  působící na elektrický dipól je nulová, ale výsledný moment silové dvojice je dán vztahem

$$\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E},$$

kde elektrický dipólový moment  $\vec{p} = Q\vec{l}$  (vektor  $\vec{l}$  má velikost  $l$  a směr od záporného náboje ke kladnému).

Také v homogenním magnetickém poli je výsledná síla na proudovou smyčku nulová a výsledný silový moment nenulový (obr. 1.5). Abychom dostali výraz podobný výrazu pro silový moment působící na elektrický dipól v elektrickém poli, zavedeme ve vztahu (1.16) vektor  $\vec{m}$

$$\vec{m} = I\vec{S}. \quad (1.18)$$

Vztah (1.16) pak lze psát ve tvaru

$$\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B}. \quad (1.19)$$

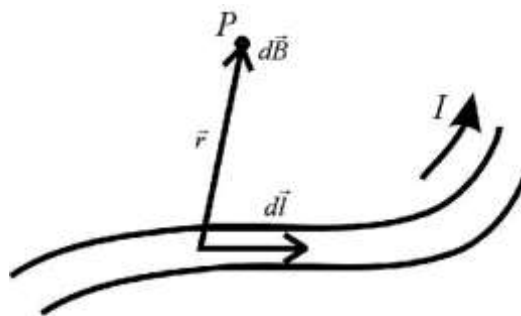
Vektor  $\vec{m}$  se nazývá **magnetický moment** (někdy magnetický dipólový moment, Ampèrův magnetický moment) proudové smyčky. Magnetický moment cívky s  $N$  závity, z nichž každý má plochu velikosti  $S$  a teče jím proud  $I$ , má velikost

$$m = NIS. \quad (1.20)$$

## 1.6 Biotův-Savartův zákon

Vodič, kterým prochází elektrický proud, je zdrojem magnetického pole. Můžeme to zjistit pomocí střílky kompasu, kterou umístíme do blízkosti vodiče. Při průchodu elektrického proudu vodičem dojde k vychýlení střílky kompasu. Magnetické pole vzniklé proudem ve vodiči popsal J.B.Biot (1774-1862) a F.Savart (1791-1841).

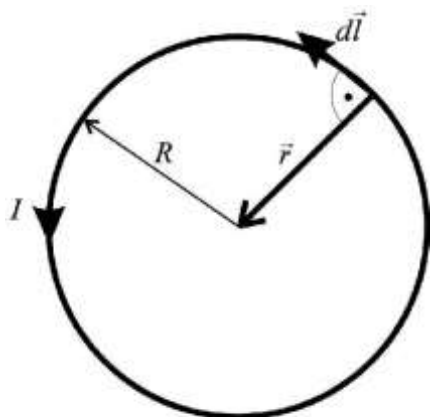
Chceme stanovit magnetickou indukci  $\vec{B}$  v bodě  $P$  v blízkosti vodiče, kterým prochází stálý proud  $I$  (obr. 1.7). Předpokládejme, element vodiče  $d\vec{l}$  o délce  $dl$  a směru a orientaci ve směru proudu v daném místě vodiče přispěje k celkové indukci  $\vec{B}$  příspěvkem  $d\vec{B}$ . Vzájemná poloha uvažovaného elementu a bodu  $P$  je dána polohovým vektorem  $\vec{r}$ , jenž má počátek v elementu  $d\vec{l}$  a koncový bod v bodě  $P$ . Příspěvek  $d\vec{B}$  v bodě  $P$  vyvolaný proudem  $I$  v elementu vodiče  $d\vec{l}$  popisuje **Biotův – Savartův zákon**. Platí pro něj výraz



Obr. 1.7

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I(d\vec{l} \times \vec{r})}{r^3}, \quad (1.21)$$

kde  $d\vec{B}$  je vektor, jehož směr a orientace jsou dány vektorovým součinem  $d\vec{l} \times \vec{r}$ . Veličina  $\mu_0$  se nazývá **magnetická konstanta** (permeabilita vakua). Má hodnotu přesně  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m} \cdot \text{A}^{-1}$ . Magnetické vlastnosti vzduchu jsou blízké vlastnostem vakua, a proto vztah (1.21) můžeme používat také při určování magnetického pole ve vzduchu.



Obr. 1.8

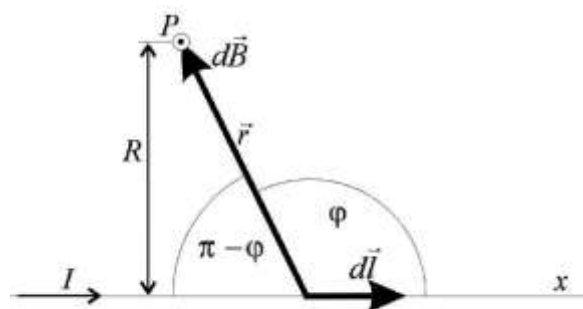
Pomocí Biotova – Savartova zákona určíme magnetické pole ve středu kruhové smyčky (obr. 1.8) poloměru  $R$ , kterou prochází proud  $I$ . Vyjdeme ze vztahu (1.21). Vektory  $d\vec{l}$  a  $\vec{r}$  jsou na sebe kolmé v kterémkoli bodě smyčky, velikost vektoru  $\vec{r}$  je rovna  $R$ , a proto můžeme psát pro velikost magnetické indukce od elementu  $d\vec{l}$

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl r}{r^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl}{R^2}.$$

Směr vektoru  $d\vec{B}$  ve středu kruhového závitu určíme pomocí vlastností vektorového součinu. Příspěvky  $d\vec{B}$  od všech elementů  $d\vec{l}$  mají stejnou orientaci, a to ve směru kolmém na rovinu kruhové smyčky, a tak lze celkovou velikost magnetické indukce určit sečtením všech příspěvků  $dB$  (tedy integrací přes celou kruhovou smyčku).

$$B = \int_0^l \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl}{R^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2} \int_0^l dl = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2} 2\pi R = \frac{\mu_0 I}{2R} \quad (1.22)$$

Pomocí Biotova – Savartova zákona ještě určíme magnetické pole ve vzdálenosti  $R$  od **nekonečně dlouhého přímého vodiče**. Na obr. 1.9 je nakreslena část nekonečně dlouhého přímého vodiče, kterým prochází proud  $I$  ve zvoleném směru. V bodě  $P$  chceme určit magnetickou indukci  $\vec{B}$ . Zvolme na vodiči element  $d\vec{l}$ . Všechny vektory  $d\vec{l}$  a  $\vec{r}$  leží v jedné rovině, v našem případě v rovině papíru. Všechny příspěvky  $d\vec{B}$  mají stejný směr, jsou kolmé na rovinu, ve které leží  $d\vec{l}$  a  $\vec{r}$ . Výsledná magnetická indukce v bodě  $P$  bude součtem jednotlivých příspěvků  $d\vec{B}$



Obr. 1.9

$$\vec{B} = \int d\vec{B}$$

a pro velikost magnetické indukce v tomto případě platí

$$B = \int dB.$$

Zavedeme souřadný systém tak, že ve směru proudu procházejícím vodičem položíme osu  $x$  a počátek zvolíme na vodiči v bodě, který je nejbližší bodu  $P$ . Element  $d\vec{l}$  je ve vzdálenosti  $x$  od počátku. Pro velikost  $dl$  je možno psát  $dl = dx$ . Pro velikost vektoru  $\vec{r}$  platí

$$r^2 = x^2 + R^2.$$

Podle pravidla o velikosti vektorového součinu je

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dx \sin \varphi}{x^2 + R^2}.$$

$\varphi$  a  $x$  nejsou nezávislé veličiny, platí

$$\sin \varphi = \sin(\pi - \varphi) = \frac{R}{(x^2 + R^2)^{1/2}}.$$

Převědeme integraci přes proměnnou  $x$  na integraci přes úhel  $\varphi$ :

$$\cotg(\varphi) = -\cotg(\pi - \varphi) = -\frac{x}{R},$$

$$-\frac{d\varphi}{\sin^2 \varphi} = -\frac{dx}{R}.$$

Pak lze  $dB$  přepsat pouze pomocí úhlu  $\varphi$

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I R d\varphi \sin \varphi}{\sin^2 \varphi (x^2 + R^2)} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\varphi \sin \varphi}{R}.$$

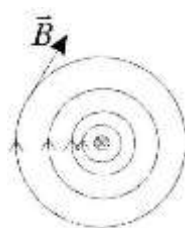
Celková magnetická indukce bude mít v bodě  $P$  velikost

$$B = \int_0^\pi \frac{\mu_0 I \sin \varphi}{4\pi R} d\varphi = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} [-\cos \varphi]_0^\pi = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}.$$

Pro nekonečně dlouhý přímý vodič platí, že ve vzdálenosti  $R$  od vodiče je velikost magnetické indukce rovna

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}. \quad (1.23)$$

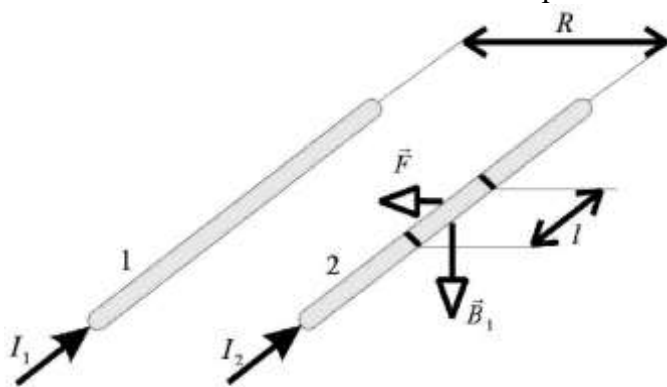
Tento výsledek (1.23) je možno použít jako přibližný i v případě dlouhého konečného vodiče, pro který platí  $R \ll l$ , kde  $l$  je délka vodiče, a bod, ve kterém chceme magnetickou indukci určit, je dostatečně vzdálen od konců vodiče. V případě, že potřebujeme přesně určit magnetickou indukci konečného vodiče, můžeme postupovat stejně jako v případě určení magnetické indukce od nekonečně dlouhého přímého vodiče, ale musíme změnit integrační meze.



Obr. 1.10

Magnetické indukční čáry pole dlouhého přímého vodiče jsou kružnice ležící v rovině kolmé k vodiči a vektor magnetické indukce má směr tečny k nim (obr. 1.10). Orientaci magnetické indukce zjistíme z vektorového součinu ve vztahu (1.21), ale pro přímý vodič ji dostaneme také pomocí pravidla pravé ruky: **uchopíme-li vodič pravou rukou tak, že vzpřímený palec ukazuje směr proudu, ukazují ostatní sevřené prsty směr magnetického pole.**

Umíme-li popsat magnetické pole, které vytváří proud procházející přímým dlouhým vodičem, můžeme stanovit sílu, kterou na sebe působí dva dlouhé tenké rovnoběžné vodiče protékané proudem. Prvním z nich teče proud  $I_1$ , druhým proud  $I_2$  a vzdálenost vodičů je  $R$  (obr. 1.11). Sílu, kterou působí vodič 1 na vodič 2, určíme jako sílu, kterou působí magnetické pole vytvořené vodičem 1 na vodič 2 protékaný proudem. Vektor  $\vec{B}_1$  je přitom kolmý na směr proudu ve vodiči 2. Můžeme proto použít vztah (1.13) a dosazením hodnoty magnetické indukce vytvořené vodičem 1 z výrazu (1.23) dostaneme pro velikost síly působící na délce  $l$  vodiče 2 vztah



Obr. 1.11

$$F = I_2 l B_1 = \frac{\mu_0 I_1 I_2 l}{2\pi R}. \quad (1.24)$$

Podobně odvodíme sílu působící na délce  $l$  vodiče 1, která bude stejně velká, neboť platí princip akce a reakce. Orientaci síly stanovíme z vektorového součinu (1.11). Pro souhlasný směr proudu v obou vodičích se vodiče přitahují, při opačných směrech proudů se vodiče odpuzují.

Pomocí síly působící mezi vodiči protékányi proudem je definována jedna ze základních jednotek SI **ampér**: je definován jako velikost stálého elektrického proudu, který při průtoku dvěma přímými rovnoběžnými a velmi dlouhými vodiči zanedbatelného kruhového průřezu vzdálenými od sebe 1 m ve vakuu vyvolá mezi těmito vodiči sílu  $2 \cdot 10^{-7}$  N na jeden metr jejich délky.

## 1.7 Ampèrův zákon

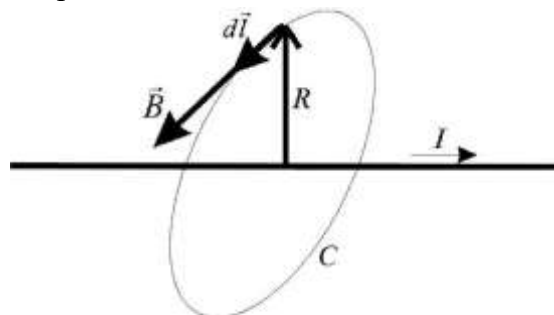
Magnetické indukční čáry popisující magnetické pole, které vzniklo průchodem elektrického proudu v dlouhém přímém vodiči, jsou uzavřené křivky (kružnice). S podobnými uzavřenými křivkami se při popisu elektrostatického pole nesetkáme. Připomeňme si, že elektrostatické pole je pole konzervativní. Protože síla působící na elektrický náboj je úměrná intenzitě elektrického pole a protože v konzervativním silovém poli musí být práce potřebná k přenosu náboje po uzavřené křivce nulová, je i křivkový integrál z působící síly a též křivkový integrál z intenzity elektrického pole po libovolné uzavřené křivce roven nule:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0.$$

V magnetickém poli stejná úvaha neplatí, síla působící na náboj není funkcí souřadnic, ale rychlosti pohybu nabitě částice a nemá směr magnetické indukce. Z těchto důvodů křivkový integrál po uzavřené křivce z vektoru magnetické indukce není roven nule.

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} \neq 0.$$

Ukážeme to na případě magnetického pole dlouhého přímého vodiče. Zvolme za uzavřenou křivku některou kružnici odpovídající magnetické indukční čáře (obr. 1.12). Kružnice má poloměr  $R$ . Na křivce zvolme směr magnetické indukce, po kterém budeme integrovat. Na celé křivce je směr vektoru  $\vec{B}$  rovnoběžný s elementem  $d\vec{l}$  křivky, proto skalární součin  $\vec{B} \cdot d\vec{l} = B dl$ . Velikost  $B$  je konstantní, a proto lze  $B$  vytknout před integrál. Úpravou dostaneme postupně výrazy



Obr. 1.12

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint B dl = B \oint dl = B 2\pi R. \quad (1.25)$$

Velikost magnetické indukce ve vzdálenosti  $R$  od dlouhého přímého vodiče je dána výrazem (1.23), a tak

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} 2\pi R = \mu_0 I. \quad (1.26)$$

Výsledná hodnota křivkového integrálu tedy nezávisí na poloměru zvolené kružnice a je rovna  $\mu_0$ -násobku velikosti proudu, který prochází plochou ohraničenou křivkou.

Tento výsledek lze zobecnit pro libovolné v čase stálé proudy a pro libovolné uzavřené křivky. Označujeme jej jako **Ampèrův zákon** a formulujeme jej takto: Pro magnetické pole vytvořené libovolnými stálými proudy v prostoru platí

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_i I_i, \quad (1.27)$$

kde suma na pravé straně rovnice je součet proudů, které procházejí plochou ohraničenou křivkou  $C$ . Aby Ampèrův zákon platil včetně znaménka, musíme celkový proud tekoucí plochou vymezenou integrační křivkou uvažovat kladný nebo záporný podle směru integrace po zvolené uzavřené křivce: za kladný bereme směr, který ukazuje palec pravé ruky, jestliže její prsty sevřené podél integrační křivky ukazují ve směru integrace. Prochází-li uvažovanou plochou více proudů, počítáme s jejich součtem  $\sum_i I_i$  při dodržení znaménka jednotlivých proudů.

Plocha ohraničená křivkou  $C$  je libovolná, nemusí se jednat o rovinnou plochu.

Z Ampèrova zákona se jednoduše stanoví velikost magnetické indukce v těch případech, kdy se jedná o symetrické uspořádání. Například vztah (1.23) pro magnetickou indukci  $\vec{B}$  ve vzdálenosti  $R$  od nekonečně dlouhého přímého vodiče dostaneme z Ampèrova zákona. Za integrační křivku zvolíme kružnici o poloměru  $R$  se středem ve vodiči a z Ampèrova zákona, rovnice (1.27) dostaneme

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = B \int_C dl = B 2\pi R = \mu_0 I.$$

Odtud lze vyjádřit velikost magnetické indukce

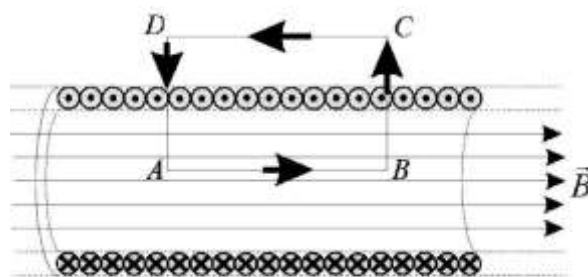
$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}, \quad (1.28)$$

a dostáváme vztah totožný s výrazem (1.23).

Pomocí Ampèrova zákona odvodíme **velikost magnetické indukce uvnitř dlouhého štíhlého solenoidu**. Solenoid je vodič navinutý na plášť válce, ideální solenoid je nekonečně dlouhý a hustě vinutý (obr. 1.13). Magnetické pole solenoidu vzniká superpozicí příspěvků od jednotlivých závitů. V případě ideálního solenoidu se magnetické pole vně solenoidu vyruší a uvnitř solenoidu bude magnetické pole homogenní a bude mít směr podélné osy solenoidu. Směr magnetického pole uvnitř solenoidu vyplývá z tvaru Biotova - Savartova zákona, vztahu (1.21) a dá



se určit pomocí pravidla pravé ruky: prsty pravé ruky ukazují směr proudu v závitech, pak palec pravé ruky ukazuje orientaci magnetické indukce uvnitř solenoidu.



Obr. 1.13

Za uzavřenou křivku v tomto případě zvolíme obdélník  $ABCD$ , zobrazený na obr. 1.13. Pro integraci platí

$$\oint_{ABCD} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_{AB} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_{BC} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_{CD} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_{DA} \vec{B} \cdot d\vec{l}.$$

$\vec{B} \perp d\vec{l}$  pro části  $BC$  a  $DA$  uzavřené křivky  $ABCD$ , proto

$$\int_{BC} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_{DA} \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0.$$

Pro ideální solenoid je indukce magnetického pole vně solenoidu nulová, a tak

$$\int_{CD} \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0.$$

Zůstává tak pouze integrál přes  $AB$  a podle Ampèrova zákona (1.27) je velikost tohoto integrálu rovna

$$\oint_{ABCD} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_{AB} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_i I_i.$$

Na části  $AB$  uzavřené křivky je  $\vec{B} \parallel d\vec{l}$  a  $B$  je konstantní. Počet závitů na části  $AB$  označíme  $N_1$ , délku části  $AB$  označíme  $l_1$ . Délka celého solenoidu je  $l$  a celkový počet závitů je  $N$ . Hustotu závitů na celém solenoidu předpokládáme konstantní, a proto lze psát

$$\int_{AB} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_{AB} B dl = B \int_{AB} dl = Bl_1 = \mu_0 N_1 I = \mu_0 N \frac{l_1}{l} I.$$

Odtud vyplývá pro velikost magnetické indukce uvnitř ideálního solenoidu

$$B = \mu_0 \frac{IN}{l}. \quad (1.29)$$

V solenoidu konečné délky je pole poblíž konců slabší a nehomogenní (rozbíhá se směrem k okrajům solenoidu), vně konečného solenoidu je magnetické pole slabé, ale ne nulové.

I když je vztah (1.29) odvozen pro ideální solenoid, lze ho použít pro reálný solenoid, počítáme-li magnetickou indukci v bodech uvnitř solenoidu dostatečně daleko od jeho konců.

## Příklady ke kap. 1

### Příklad 1.1

Určete celkovou sílu působící na část vodiče ve tvaru polokružnice o poloměru  $R$ , ke které vedou dva přímé přívody (obr. 1.14). Vodič leží v homogenním magnetickém poli o indukci  $\vec{B}$  kolmé na rovinu vodiče a vodičem protéká proud  $I$ .

#### Řešení:

Vyjdeme ze vztahů

$$d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B}$$

$$\vec{F} = \int_l d\vec{F},$$

kde  $l$  délka vodiče. V kterémkoli bodě vodiče je  $\vec{B} \perp d\vec{l}$ ,  $d\vec{l}$  je element vodiče, proto je velikost síly, která působí na element vodiče  $d\vec{l}$  rovna

$$dF = I B dl.$$

Vektor síly  $d\vec{F}$  má v různých místech vodiče různý směr, proto musíme počítat zvlášť velikost síly ve směru osy  $x$  a zvlášť ve směru osy  $y$ . Podle obr. 1.14 je

$$dF_x = dF \cos \varphi = IB dl \cos \varphi$$

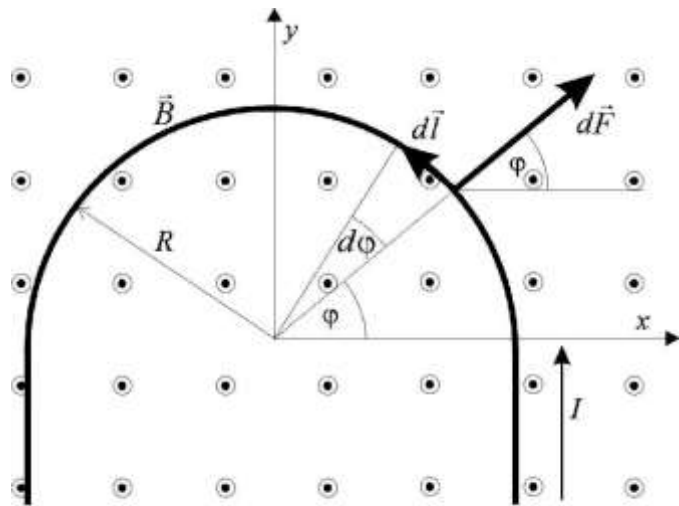
$$dF_y = dF \sin \varphi = IB dl \sin \varphi$$

a složky výsledné síly dostaneme integrací po půlkružnici vodiče. Úhel  $\varphi$  se přitom mění od 0 do  $\pi$  a pro délku elementu  $dl$  platí  $dl = R d\varphi$ . Dostaneme tak

$$F_x = IRB \int_0^\pi \cos \varphi d\varphi = IRB (\sin \pi - \sin 0) = 0$$

$$F_y = IRB \int_0^\pi \sin \varphi d\varphi = IRB (\cos \pi - \cos 0) = 2IRB.$$

Výsledná síla působící na vodič tvaru půlkružnice má směr osy  $y$  a velikost  $2IRB$ .



Obr. 1.14

### Příklad 1.2

Určete magnetické pole na ose kruhového závitu ve vzdálenosti  $x$  od roviny závitu, jehož poloměr je  $R$ . Závitem prochází proud  $I$ .

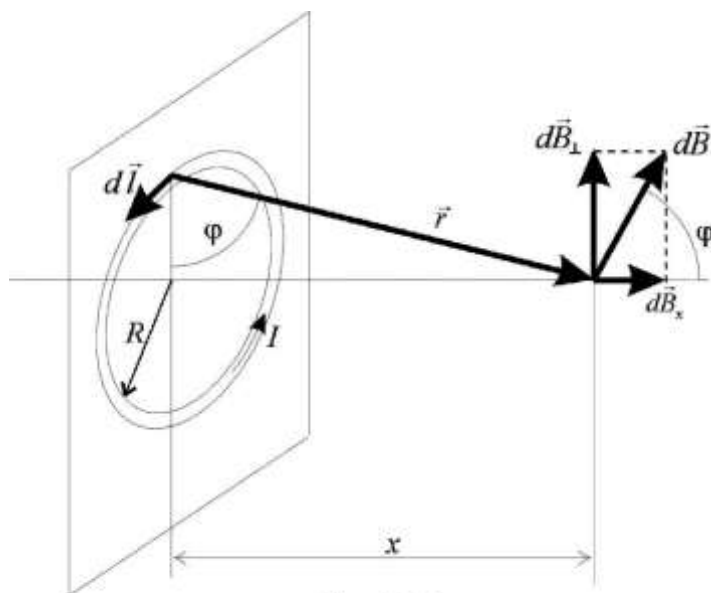
#### Řešení:

Na ose závitu vybereme bod ve vzdálenosti  $x$  od roviny závitu (obr. 1.15). Vyjdeme z Biotova - Savartova zákona

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I(d\vec{l} \times \vec{r})}{r^3}.$$

Příspěvek  $d\vec{B}$  k celkové magnetické indukci  $\vec{B}$  od elementu vodiče  $d\vec{l}$  se dá rozložit do směru osy závitu  $d\vec{B}_x$  a do směru kolmého na osu závitu  $d\vec{B}_\perp$ .

$$dB_x = dB \cos \varphi$$



Obr. 1.15

K elementu vodiče  $d\vec{l}$  lze najít element symetrický podle středu závitu, pro který platí, že jeho příspěvek  $d\vec{B}_\perp$  k magnetické indukci do směru kolmého na osu závitu se vyruší s příspěvkem symetricky umístěného elementu. Příspěvky do směru osy závitu  $d\vec{B}_x$  mají stejný směr, a proto se sčítají. Z obrázku je také zřejmé, že platí  $d\vec{l} \perp \vec{r}$ .

Odtud vyplývá

$$B = B_x = \int dB_x = \int \frac{\mu_0 I dl \cos \varphi}{4\pi r^2}.$$

$$\text{Platí } r^2 = x^2 + R^2 \text{ a } \cos \varphi = \frac{R}{r} = \frac{R}{(x^2 + R^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Pro všechny elementy  $d\vec{l}$  vodiče je  $x$ ,  $R$ ,  $\cos \varphi$  stejné, a tak

$$B = \int \frac{\mu_0 I dl \cos \varphi}{4\pi r^2} = \frac{\mu_0 IR}{4\pi (x^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} \int dl = \frac{\mu_0 IR}{4\pi (x^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} 2\pi R.$$

Pro magnetickou indukci na ose kruhového závitu platí, že má směr osy závitu a její velikost ve vzdálenosti  $x$  od roviny závitu je dána výrazem

$$B = \frac{\mu_0 IR^2}{2(x^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Pokud chceme určit velikost magnetické indukce ve středu závitu, položíme  $x = 0$ . Dostaneme tak výraz

$$B = \frac{\mu_0 I}{2R},$$

který je totožný se vztahem (1.22).

## 2. Elektromagnetická indukce

V předchozí kapitole jsme se zabývali problematikou magnetických polí vyvolaných proudy ve vodičích. V této kapitole se budeme zabývat opačným případem, kdy magnetické pole je zdrojem elektrického pole.

### 2.1 Magnetický indukční tok

Magnetický indukční tok zvolenou plochou se definuje obdobně jako elektrický indukční tok v Gaussově větě elektrostatiky. Uvažovanou plochu je třeba rozdělit na infinitezimálně malé plošky velikosti  $dS$ , jimž přiřadíme vektor  $d\vec{S}$  o velikosti  $dS$  a směru normály k ploše. **Magnetický indukční tok**  $\Phi$  pak udává výraz

$$\Phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}. \quad (2.1)$$

V případě magnetického pole, na rozdíl od elektrického, neexistují magnetické náboje, z nichž by vycházely magnetické indukční čáry. Magnetické indukční čáry jsou vždy uzavřené křivky, proto libovolnou uzavřenou plochou musí vždy projít zevnitř ven stejný počet indukčních čar jako z vnějšku dovnitř. Proto je magnetický indukční tok libovolnou uzavřenou plochou vždy roven nule

$$\oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0. \quad (2.2)$$

Jednotkou magnetického indukčního toku je weber (Wb), fyzikální rozměr je  $[\Phi] = \text{m}^2 \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{A}^{-1}$ .

Pokud je cívka tvořena  $N$  závitů vodiče, z nichž každý má plochu velikosti  $S$ , je celkový magnetický indukční tok  $\Phi$  procházející všemi závitů cívky roven

$$\Phi = N\Phi_1, \quad (2.3)$$

kde  $\Phi_1$  je magnetický indukční tok procházející jedním závitů cívky.

### 2.2 Faradayův zákon elektromagnetické indukce

Prochází-li vodivou smyčkou umístěnou v magnetickém poli proud, bude na ni působit magnetické pole momentem síly. Zajímá nás nyní otázka, co se stane, když smyčkou v magnetickém poli proud neprochází, ale bude se otáčet. Odpověď zní: začne jí procházet proud. Tento fyzikální proces se nazývá **elektromagnetická indukce**.

Elektromagnetická indukce se řídí **Faradayovým zákonem**, který můžeme vyslovit takto: **Velikost elektromotorického napětí indukovaného ve vodivé smyčce je rovna časové změně magnetického indukčního toku procházejícího smyčkou.** Matematický zápis Faradayova zákona elektromagnetické indukce je dán rovnicí

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}, \quad (2.4)$$

kde  $\mathcal{E}$  je elektromotorické napětí, které se indukuje ve smyčce, a  $\Phi$  magnetický indukční tok smyčkou. Znaménko  $-$  (minus) ve výrazu (2.4) vyjadřuje skutečnost, že indukované elektromagnetické napětí brání změně magnetického indukčního toku.

Použijeme-li namísto smyčky cívku s  $N$  závitů, je výsledné elektromotorické napětí rovno

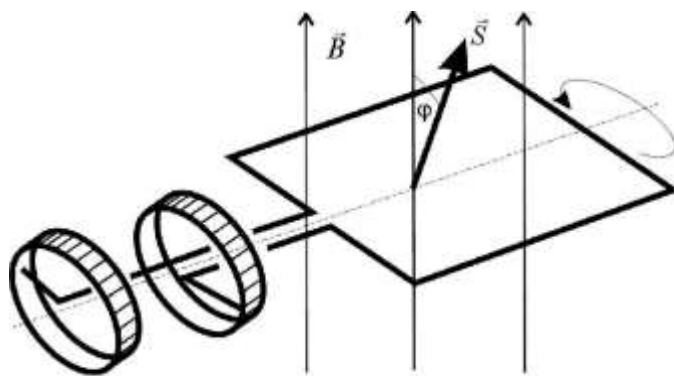
$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -N \frac{d\Phi_1}{dt},$$

kde  $\Phi_1$  je magnetický indukční tok procházející jedním závitkem.

Orientaci indukovaného elektromotorického napětí udává **Lenzovo pravidlo**, které lze formulovat takto: **Elektromotorické napětí a jím vyvolaný proud mají takovou orientaci, že působí proti změně, která je vyvolala.**

## 2.3 Aplikace indukovaného elektromotorického napětí

Z Faradayova indukčního zákona a definice indukčního toku vyplývá, že napětí lze indukovat dvěma způsoby, proměnným magnetickým polem nebo změnou vektoru  $\vec{S}$ , a to buď změnou velikosti plochy nebo změnou orientace plochy v prostoru. Jev elektromagnetické indukce se využívá k výrobě elektrické energie v generátorech střídavého proudu. Základem generátoru je vodivá cívka otáčející se v homogenním magnetickém poli.



Obr. 2.1

Předpokládejme vodivou smyčku, jejíž plocha má obsah  $S$ . Smyčka se otáčí kolem osy procházející jejím středem stále úhlovou rychlostí  $\omega$  a umístíme ji do homogenního magnetického pole, které je kolmé k ose otáčení (obr. 2.1). Okamžité natočení  $\varphi$  normály smyčky vzhledem ke směru magnetické indukce lze vyjádřit vztahem  $\varphi = \omega t$ . Natáčení plochy se projeví i ve změně magnetického indukčního toku  $\Phi$  procházející smyčkou

$$\Phi = BS \cos \varphi = BS \cos \omega t. \quad (2.5)$$

Elektromotorické napětí indukované ve smyčce je podle Faradayova zákona elektromagnetické indukce dáno výrazem

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}(BS \cos \omega t) = BS\omega \sin \omega t. \quad (2.6)$$

V případě, že místo jedné smyčky uvažujeme cívku o  $N$  závitů, bude výsledné elektromotorické napětí  $N$  – krát větší. Platí relace

$$\mathcal{E}_N = NBS\omega \sin \omega t. \quad (2.7)$$

Ze vztahu (2.7) je zřejmé, že indukované napětí má harmonický průběh, jeho amplituda je  $NBS\omega$ . Větší amplitudu napětí lze získat buď větším počtem závitů nebo zvýšením úhlové rychlosti otáčení. Z rotující smyčky se napětí odvádí pevnými elektrickými kontakty (kartáči), které se dotýkají rotujících smyček (symbolicky znázorněny na obr. 2.1).

Indukovat napětí lze také tak, že vodivá smyčka bude v klidu a magnetické pole bude proměnné. Tohoto principu se využívá v alternátorech, kde rotuje zdroj magnetického pole. Tím dochází ke změně magnetického indukčního toku a k indukování elektromotorického napětí ve smyčce. Zdrojem magnetického pole bývá malý permanentní magnet nebo, ve velkých alternátorech, elektromagnet vytvořený cívku napájenou stejnosměrným proudem.

## 2.4 Vířivé proudy

Měnicí se magnetické pole vyvolá ve vodivé smyčce elektrické napětí a ve vodivé uzavřené smyčce pak poteče i elektrický proud. Každá uzavřená dráha v bloku vodivého materiálu je uzavřenou vodivou smyčkou, proto ve vodivém materiálu vloženém do měnicího se magnetického pole potečou indukované proudy po různých uzavřených drahách. Těmto proudům říkáme **vířivé proudy**.

Indukování proudu v bloku materiálu vede k přeměně mechanické energie na Jouleovo teplo, proto jedním z projevů vířivých proudů je zahřívání bloků vodivých materiálů vlivem měnicího se magnetického pole. Zpravidla jde o nežádoucí jev, který je možné potlačit: železná jádra transformátorů a elektromotorů se nedělají z bloku materiálu, ale skládají se z jednotlivých, vzájemně izolovaných plechů – přes izolaci mezi plechy nemohou vířivé proudy téci. Jindy se ohřev měnicím se magnetickým polem vytváří záměrně – jedná se o indukční ohřev. Při vaření na indukční varné desce je cívka, umístěná přímo pod varnou plochou, napájena vysokofrekvenčním střídavým proudem. Magnetické pole vytvořené tímto proudem indukuje vířivé proudy ve vodivém dnu nádoby. Protože má materiál nenulový odpor, vyvíjí se v ní teplo a tím dochází k ohřevu jídla, které se v ní připravuje. Sama varná plocha se přitom nezahřívá.

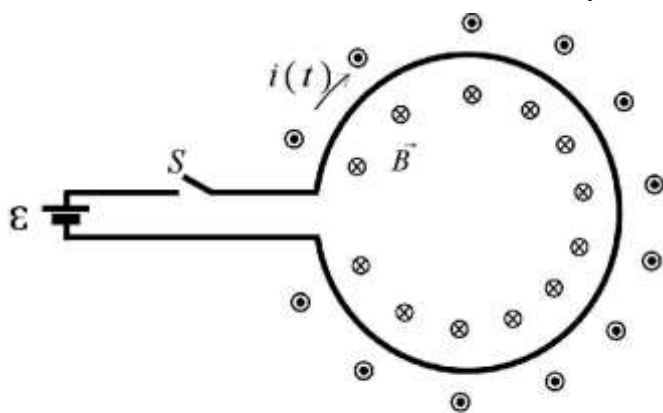
## 2.5 Vlastní a vzájemná indukčnost

Uvažujme smyčku, která je připojena ke zdroji elektromotorického napětí (obr. 2.2) a je umístěna ve vakuu nebo ve vzduchu. Pokud smyčkou prochází proud, vytváří se v jejím okolí magnetické pole, jehož velikost závisí na procházejícím proudu  $i$ . (Malým písmenem označujeme

**okamžité** hodnoty časově proměnných elektrických veličin.) Plochou smyčky prochází magnetický indukční tok  $\Phi$ , který závisí na velikosti proudu tekoucího smyčkou

$$\Phi = Li. \quad (2.8)$$

Konstanta úměrnosti  $L$  ve vztahu (2.8) se nazývá **vlastní indukčnost** smyčky a je závislá pouze na geometrickém tvaru smyčky.



Obr. 2.2

Vlastní indukčnost jsme zavedli pro jednoduchou smyčku vodiče. Stejným vztahem (2.8) lze zavést vlastní indukčnost libovolného elektrického obvodu nebo jeho části. V soustavě SI je jednotkou vlastní indukčnosti henry  $[L] = \text{H} = \text{V} \cdot \text{s} \cdot \text{A}^{-1}$ .

Odvoďme nyní vlastní indukčnost solenoidu o délce  $l$ , průřezu  $S$  a počtu závitů  $N$ . Uvnitř solenoidu, pokud jím prochází proud  $i$ , je homogenní magnetické pole o velikosti magnetické indukce

$$B = \mu_0 \frac{iN}{l}.$$

Celkový magnetický tok  $N$  závitů solenoidu je roven

$$\Phi = BNS.$$

Jestliže dosadíme za indukční tok  $\Phi$  ze vztahu (2.8) a uplatníme výraz pro velikost magnetické indukce  $B$ , můžeme vyjádřit  $L$  vztahem

$$L = \mu_0 \frac{N^2 S}{l}. \quad (2.9)$$

Solenoid je zvláštním případem, kdy lze vlastní indukčnost určit výpočtem.

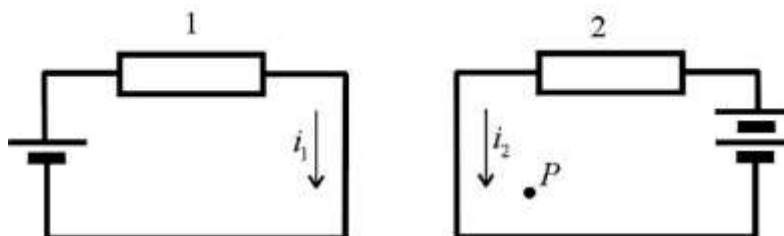
Vlastní indukčnost vodiče vyjadřuje jeho schopnost vytvářet magnetické pole. Jde tedy o veličinu, která je v jistém smyslu analogická kapacitě vodiče.

Při změně proudu procházejícího vodičem se ve vodiči podle Faradayova zákona indukuje elektromotorické napětí, které lze pomocí vlastní indukčnosti vodiče psát ve tvaru

$$\mathcal{E} = -L \frac{di}{dt}. \quad (2.10)$$

Vztah (2.10) lze využít pro definici vlastní indukčnosti v případě, že neplatí přímá úměra mezi magnetickým indukčním tokem a proudem procházejícím vodičem. Pak vlastní indukčnost takového prvku závisí na proudu. Dále se budeme zabývat prvky, jejichž vlastní indukčnost je na proudu nezávislá.

Budeme se zabývat případem dvou v blízkosti umístěných obvodů (obr. 2.3). Magnetické pole vytvořené proudem v jednom obvodu zasahuje i do druhého obvodu a změna proudu v jednom obvodu proto vyvolá elektromagnetickou indukci i ve druhém obvodu. Odpovězme nyní na otázku, jak lze vyjádřit vztah mezi těmito obvody. V daném okamžiku obvodem 1 teče proud  $i_1$  a obvodem 2 proud  $i_2$ . Magnetická indukce vytvořená obvodem 1 bude podle Biotova – Savartova zákona úměrná proudu okamžité hodnoty  $i_1$  a magnetická indukce vytvořená obvodem 2 úměrná okamžité hodnotě proudu  $i_2$ . Magnetický indukční tok  $\Phi_2$  plochou obvodu 2 lze vyjádřit jako součet příspěvků přímo úměrných protékajícím proudům



Obr. 2.3

$$\Phi_2 = L_2 i_2 + M_{12} i_1. \quad (2.11)$$

První člen na pravé straně výrazu (2.11) závisí na proudu  $i_2$  a druhý člen na proudu  $i_1$  v obvodě 1.  $L_2$  je vlastní indukčnost obvodu 2,  $M_{12}$  je konstanta úměrnosti mezi magnetickým indukčním tokem vyvolaným proudem  $i_1$ , procházejícím plochou obvodu 2 a proudem  $i_1$ . Tato konstanta se nazývá **vzájemná indukčnost** obvodů 1 a 2. Jsou-li oba obvody daleko od sebe, bude jejich vzájemná indukčnost malá.

Pro magnetický indukční tok procházející plochou obvodu 1 obdobně (2.11) platí

$$\Phi_1 = L_1 i_1 + M_{21} i_2. \quad (2.12)$$

Dá se dokázat, že vzájemné indukčnosti ve vztazích (2.11) a (2.12) se rovnají

$$M_{12} = M_{21}. \quad (2.13)$$

Změna magnetického indukčního toku plochou obvodu 1 v něm vyvolá indukované elektromotorické napětí

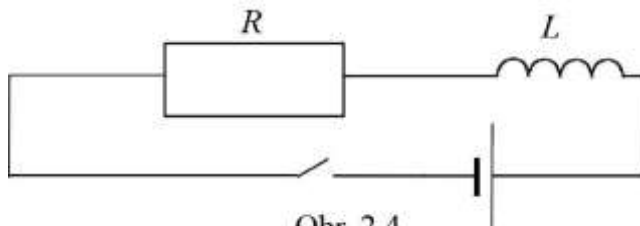
$$\mathcal{E}_1 = -\frac{d\Phi_1}{dt} = -L_1 \frac{di_1}{dt} - M_{12} \frac{di_2}{dt}. \quad (2.14)$$

Indukované elektromotorické napětí v obvodu 1 závisí na změnách proudů v obou obvodech.



## 2.6 Obvod LR

Na obrázku 2.4 je znázorněn obvod, ve kterém jsou za sebou zapojeny rezistor o odporu  $R$  a cívka s vlastní indukčností  $L$ . Prvky jsou spínačem připojeny ke zdroji elektromotorického napětí  $\mathcal{E}_0$ . Pomocí



Obr. 2.4

2. Kirchoffova zákona sestavíme základní diferenciální rovnici pro okamžitou hodnotu proudu  $i$ . Platí rovnice

$$Ri = \mathcal{E}_0 - L \frac{di}{dt}, \quad (2.15)$$

kteřou lze přepsat do tvaru

$$L \frac{di}{dt} + Ri = \mathcal{E}_0. \quad (2.16)$$

Nebudeme se zde zabývat řešením této diferenciální rovnice. Zajímá nás pouze přenos energie v LR obvodu. Jestliže rovnici (2.16) vynásobíme proudem  $i$ , dostaneme rovnici

$$Li \frac{di}{dt} + Ri^2 = \mathcal{E}_0 i, \quad (2.17)$$

kde na pravé straně je výkon zdroje. Energie dodávaná zdrojem se spotřebuje jednak disipací na rezistoru (člen  $Ri^2$  představuje výkon této disipace), část energie, která není disipována se mění v energii magnetického pole cívky.

V cívce o indukčnosti  $L$  se průchodem proudu vytváří indukované napětí velikosti  $L \frac{di}{dt}$ , proto při přechodu přes cívku působí nosiče náboje výkonem

$$p = ui = Li \frac{di}{dt}. \quad (2.18)$$

Zda cestou přes cívku nosiče potenciální energii získávají nebo ztrácejí záleží na tom, jak se v daném okamžiku mění velikost proudu. Pokud velikost proudu roste ( $\frac{di}{dt} > 0$ ), je indukované napětí  $u = -L \frac{di}{dt}$  záporné vzhledem ke směru proudu a nosiče na své cestě potenciální energii ztrácejí. Podobně při zmenšujícím se proudu potenciální energii získávají. Protože v cívce mohou nosiče ztrácet i získávat potenciální energii, musí být tato energie měněna na jinou formu energie a uchována v cívce. Tato forma energie vzniká, když nosiče ztrácejí svou potenciální energii, tedy při nárůstu proudu, a zaniká při poklesu proudu.

Vezměme případ cívky, kterou na počátku neteče žádný proud a kterou připojíme ke zdroji napětí. Po ustálení proudu na maximální hodnotě  $i_m$  se proud dál nemění, neindukuje se žádné

napětí a v cívice nedochází k přeměně energie. Než k ustálení dojde, mění se v cívice výkon  $p$  podle vztahu (2.18) a za každý čas  $dt$  se přemění energie

$$dW = p dt = Li di.$$

V okamžiku, kdy cívkou prochází proud  $i_m$ , se přeměnilo celkové množství energie

$$W = \int dW = \int_0^{i_m} Li di = \frac{1}{2} Li_m^2 \quad (2.19)$$

V cívice, kterou prochází proud  $i$ , je proto skryta energie magnetického pole

$$W_m = \frac{1}{2} Li^2. \quad (2.20)$$

## 2.7 Hustota energie magnetického pole

Z teorie elektrostatického pole víme, že hustota energie elektrostatického pole ve vakuu je dána výrazem

$$w_e = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2,$$

kde  $E$  je velikost intenzity elektrického pole. Budeme hledat podobný výraz pro hustotu energie magnetického pole.

Pro názornou představu vezměme dlouhý štíhlý solenoid s délkou  $l$ , průřezem  $S$  a počtem závitů  $N$ . Pokud solenoidem teče proud  $i$ , je v magnetickém poli solenoidu uchována energie podle vztahu (2.20)  $W_m = \frac{1}{2} Li^2$ . Dosadíme-li za vlastní indukčnost cívky ze vztahu (2.9)  $L = \mu_0 \frac{N^2 S}{l}$ , dostáváme

$$W_m = \frac{1}{2} \mu_0 N^2 \frac{S}{l} i^2. \quad (2.21)$$

Velikost magnetické indukce v solenoidu je dána výrazem  $B = \mu_0 \frac{Ni}{l}$ . Kombinací tohoto vztahu a výrazu (2.21) dostaneme pro energii magnetického pole ve vakuu vyjádření ve tvaru

$$W_m = \frac{1}{2} \frac{1}{\mu_0} B^2 Sl, \quad (2.22)$$

odkud pro **hustotu energie magnetického pole** solenoidu za předpokladu, že magnetické pole je homogenní v celém prostoru solenoidu, vyplývá

$$w_m = \frac{W_m}{V} = \frac{1}{2} \frac{1}{\mu_0} B^2. \quad (2.23)$$

Vztah (2.23) jsme odvodili pro hustotu energie magnetického pole solenoidu. Platí však pro hustotu energie jakéhokoli magnetického pole ve vakuu. Pokud známe hustotu energie magnetického pole, lze integrací přes objem, kde se magnetické pole nachází, určit celkovou energii magnetického pole

$$W_m = \int_V w_m dV. \quad (2.24)$$

## Příklady ke kap. 2

### Příklad 2.1

Kruhový závit o poloměru  $r = 40$  mm se otáčí kolem svého průměru, který je kolmý ke směru indukce homogenního magnetického pole. Závit koná 1 800 otáček za minutu. Velikost indukce magnetického pole  $B = 0,5$  T. Jaká je velikost okamžitého elektromotorického napětí indukovaného v závitě, když normála roviny závitu svírá se směrem indukce magnetického pole úhel  $\alpha = 30^\circ$  ?

#### Řešení:

Podle Faradayova zákona elektromagnetické indukce platí pro velikost indukovaného elektromotorického napětí

$$\mathcal{E} = \left| \frac{d\Phi}{dt} \right|.$$

Magnetický indukční tok je definován vztahem

$$\Phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S},$$

který lze pro homogenní magnetické pole a kruhový závit přepsat na tvar

$$\Phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iint_S B \cos \alpha dS = B \cos \alpha \iint_S dS = B \cos \alpha S = B\pi r^2 \cos \alpha.$$

Uvážíme-li, že  $\alpha = \omega t$ , pak pro indukované elektromotorické napětí platí

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \left| \frac{d\Phi}{dt} \right| = \left| \frac{d(B\pi r^2 \cos \alpha)}{dt} \right| = B\pi r^2 \left| \frac{d(\cos \alpha)}{dt} \right| = B\pi r^2 \left| \frac{d(\cos \omega t)}{dt} \right| = \\ &= B\pi r^2 \omega \sin \omega t = B\pi r^2 \omega \sin \alpha. \end{aligned}$$

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \frac{1800}{60} \text{ s}^{-1} = 60\pi \text{ s}^{-1}$$

Dosadíme-li nyní hodnoty, dostáváme

$$\mathcal{E} = B\pi r^2 \omega \sin \alpha = 0,5 \cdot \pi \cdot 0,04^2 \cdot 60\pi \sin 30^\circ = 0,237 \text{ V}.$$

### Příklad 2.2

Energie magnetického pole vytvořeného cívkou, kterou protéká proud  $I = 60 \text{ mA}$ , je  $W_m = 25 \cdot 10^{-5} \text{ J}$ . vypočtete indukčnost  $L$  cívky. Jaký proud  $I'$  je nutný, aby energie vytvořeného magnetického pole byla čtyřikrát větší?

**Řešení:**

Podle vztahu (2.20) můžeme psát

$$W_m = \frac{1}{2} LI^2 \Rightarrow L = \frac{2W_m}{I^2}.$$

Po dosazení dostáváme

$$L = \frac{2W_m}{I^2} = \frac{2 \cdot 25 \cdot 10^{-5}}{60^2 \cdot 10^{-6}} \text{ H} = 139 \text{ mH}$$

Energie magnetického pole má být v případě proudu  $I'$  4-krát větší  $\Rightarrow$

$$4W_m = \frac{1}{2} LI'^2$$

$$4 \cdot \frac{1}{2} LI^2 = \frac{1}{2} LI'^2$$

$$4I^2 = I'^2 \Rightarrow I' = 2I = 120 \text{ mA}$$

### 3. Magnetické pole v látkách

Zatím jsme uvažovali pouze magnetické pole ve vakuu. V této kapitole se budeme zabývat vzájemným působením magnetického pole a různých látek. Zjistíme, že se látky rozdělují podle magnetického chování do tří skupin.

#### 3.1 Magnetizace

Vložíme-li látku do magnetického pole, bude některá látka magnetickým polem přitahována silně, jiná přitahována slabě a další odpuzována (slabě). Látka, která bude magnetickým polem odpuzována, se nazývá **diamagnetická**. Látka, která bude slabě přitahována, je **paramagnetická** a látka silně přitahovaná magnetickým polem se nazývá **feromagnetická**.

Přesné vysvětlení různého chování látek v magnetickém poli dává **kvantová fyzika**, jejíž základy jsou v tomto skriptu vysvětleny v některé další kapitole. Některé vlastnosti látek v magnetickém poli se dají vysvětlit i pomocí klasické fyziky.

Podle představ klasické fyziky (Ampèra) elektrony obíhající po uzavřených orbitách kolem atomového jádra, vytvářejí proudové smyčky, kterým lze přiřadit magnetické momenty  $\vec{m} = I\vec{S}$ . Pokud budeme uvažovat, že se elektron, jehož hmotnost je  $m_e$ , pohybuje po kruhové dráze o poloměru  $r$  rovnoměrně rychlostí velikosti  $v$ , magnetický moment takové proudové smyčky určíme následovně. (Náboj elektronu je  $-e$ .)

$$I = \frac{-e}{T},$$

kde  $T$  je perioda oběhu. Pokud se elektron pohybuje rovnoměrně je  $T = \frac{2\pi r}{v}$  a pro proud  $I$  dostaneme

$$I = -\frac{ev}{2\pi r}.$$

Velikost magnetického momentu proudové smyčky je pak podle vztahu (2.18) dána výrazem

$$m = IS = -\frac{ev}{2\pi r} \pi r^2 = -\frac{1}{2} evr. \quad (3.1)$$

Elektron se pohybuje po kruhové dráze, má tedy také vzhledem k rotační ose smyčky moment hybnosti o velikosti

$$L = rm_e v. \quad (3.2)$$

Porovnáním výrazů (3.1) a (3.2) a určením směrů vektorů z jejich definic dostaneme vztah mezi magnetickým momentem elektronu a jeho orbitálním momentem hybnosti

$$\vec{m} = -\frac{e}{2m_e} \vec{L}. \quad (3.3)$$

Vztah (3.3) platí stejně i v kvantové fyzice. Z kvantové fyziky však ještě vyplývá, že elektron má vlastní spinový moment hybnosti  $\vec{L}_s$  a jemu odpovídající spinový magnetický moment  $\vec{m}_s$ . Je mezi nimi vztah

$$\vec{m}_s = -\frac{e}{m_e} \vec{L}_s. \quad (3.4)$$

Z výlučně kvantových důvodů se výrazy (3.3) a (3.4) liší koeficientem  $\frac{1}{2}$ .

Vnější magnetické pole působí na soubor magnetických momentů silami, které se snaží orientovat je do směru magnetického pole. Je-li těleso homogenně magnetované, je magnetický moment celého tělesa dán součtem magnetických momentů všech jeho atomů. Magnetický moment vztažený na jednotku objemu se nazývá **magnetizace**  $\vec{M}$

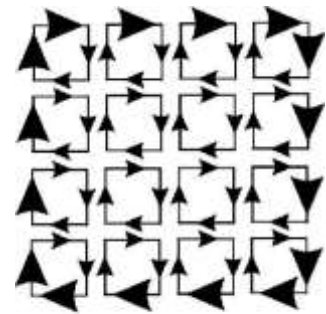
$$\vec{M} = \frac{\sum \vec{m}}{V}. \quad (3.5)$$

Pokud je těleso zmagnetováno nehomogenně je magnetizace dána výrazem

$$\vec{M} = \frac{d\vec{m}}{dV}. \quad (3.6)$$

Magnetizace charakterizuje stupeň zmagnetování hmotného prostředí.

Ampère zavedl hypotézu o existenci molekulárních a atomárních proudů. Předpokládal, že příčinou magnetické aktivity látek jsou mikroskopické proudy, které se uzavírají v molekulárních rozměrech. Úvahy tohoto druhu lze dále rozvíjet, když si uvědomíme, že soustava elementárních („molekulárních“) proudových smyček může reprezentovat i určité makroskopické proudy. Vznik takových proudů lze kvalitativně pochopit z obr. 3.1, který schematicky znázorňuje řez zmagnetovaným tělesem s magnetizací kolmou k rovině nákresny. Plochu řezu si můžeme představit rozdělenou na malé plošky, z nichž každá reprezentuje proudovou smyčku, po jejímž obvodu protéká elementární proud  $I_e$ . Je zřejmé, že pokud budou proudy ve všech



Obr. 3.1

smyčkách stejné, budou se vzájemně rušit ve společných stranách sousedících smyček a zůstanou pouze proudy na povrchu tělesa. **Lze tedy tvrdit, že magnetické pole vytvořené homogenně zmagnetovaným tělesem bude totožné s polem vhodně zvolených makroskopických plošných proudů tekoucích po povrchu tělesa.**

Nebudou-li proudy ve všech smyčkách uvnitř tělesa stejné, nebudou se vzájemně rušit a uvnitř tělesa budou moci vznikat objemové makroskopické proudy. Objemové makroskopické proudy mohou reprezentovat nehomogenity v magnetizaci těles.

Na základě právě uvedených úvah lze očekávat, že magnetické pole libovolného zmagnetovaného tělesa bude možné vyjádřit jako pole makroskopických plošných proudů tekoucích po povrchu tělesa a makroskopických objemových proudů tekoucích uvnitř tělesa. Tyto proudy se nazývají **magnetizační proudy** a označují se  $I_M$ .

Nadále se budeme zabývat pouze homogenně zmagnetovanými tělesy.

### 3.2 Magnetická susceptibilita a permeabilita

Při studiu magnetických vlastností látek ve statických magnetických polích se úloha redukuje na stanovení magnetického momentu v závislosti na vnějším magnetickém poli, teplotě apod.

Celková indukce magnetického pole  $\vec{B}$  v určitém místě v prostoru je dána vektorovým součtem magnetické indukce  $\vec{B}_0$  vnějšího pole (např. vytvářeného proudem tekoucím solenoidem) a magnetické indukce  $\vec{B}_M$  pole vzniklého přítomností zmagnetovaného tělesa. (Nadále pro něj budeme používat termíny magnetická látka nebo magnetikum).

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_M \quad (3.7)$$

Vztah mezi magnetizací  $\vec{M}$  a magnetickou indukcí  $\vec{B}_M$  magnetika odvodíme pro magnetikum - jádro umístěné v dutině solenoidu o  $N$  závitěch, délky  $l$ , o ploše průřezu  $S$ . Magnetická indukce uvnitř ideálního solenoidu je podle (2.29) rovna

$$B_0 = \mu_0 \frac{IN}{l},$$

kde  $I$  je proud procházející solenoidem. Předpokládáme, že solenoid se nachází ve vzduchu. Analogicky uvažujeme magnetickou indukcí  $\vec{B}_M$  jako důsledek elementárních proudů. Výsledný magnetizační proud  $I_M$  teče po povrchu jádra. (Zdůrazněme, že tento proud je pomyslný a nelze ho měřit.) Pomyslný počet závitů na jádře je  $N_M$ . Pro velikost magnetické indukce v magnetiku platí vztah

$$B_M = \frac{\mu_0 N_M I_M}{l}. \quad (3.8)$$

Magnetizaci lze podle definice (3.5) vyjádřit vztahem

$$M = \frac{N_M I_M S}{V} = \frac{N_M I_M}{l}. \quad (3.9)$$

Porovnáním výrazů (3.8) a (3.9) dostaneme vztah mezi magnetickou indukcí magnetické látky a její magnetizací. Pokud uvážíme i orientace příslušných vektorů dostáváme výraz

$$\vec{B}_M = \mu_0 \vec{M}. \quad (3.10)$$

Dá se dokázat, že výraz (3.10) platí obecně, a ne pouze pro látku, z níž je jádro solenoidu. Celkovou magnetickou indukci  $\vec{B}$  lze tedy psát ve tvaru

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \mu_0 \vec{M}. \quad (3.11)$$

Nyní zobecníme Ampèrův zákon i na případ magnetických látek

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 (I + I_M). \quad (3.12)$$

Ve vztahu (3.12) musí na pravé straně vystupovat proud skutečný i magnetizační. Do vztahu (3.12) dosadíme za magnetickou indukci výraz (3.11), dostaneme tak

$$\oint_C (\vec{B}_0 + \mu_0 \vec{M}) \cdot d\vec{l} = \mu_0 (I + I_M), \quad (3.13)$$

což lze rozepsat jako

$$\oint_C \vec{B}_0 \cdot d\vec{l} + \oint_C \mu_0 \vec{M} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I + \mu_0 I_M.$$

Pro pole o magnetické indukci  $\vec{B}_0$  vytvářené proudem  $I$  platí  $\oint_C \vec{B}_0 \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$  a pro magnetizační proud dostaneme výraz

$$\oint_C \mu_0 \vec{M} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_M. \quad (3.14)$$

Výraz (3.14) lze považovat za definici magnetizačního proudu  $I_M$ . Porovnáním vztahu (3.12) a výrazu (3.14) dostaneme

$$\oint_C \left( \frac{\vec{B} - \mu_0 \vec{M}}{\mu_0} \right) \cdot d\vec{l} = I. \quad (3.15)$$

Zavedeme veličinu **intenzita magnetického pole**  $\vec{H}$  vztahem

$$\vec{H} = \frac{\vec{B} - \mu_0 \vec{M}}{\mu_0}. \quad (3.16)$$

Pak lze vztah (3.15) přepsat do tvaru

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = I. \quad (3.17)$$

Vztah (3.17) je jiným vyjádřením zobecněného Ampèrova zákona, kde se již nevyskytuje magnetizační proud, který nelze stanovit. Použití intenzity magnetického pole k popisu magnetického pole zmagnetovaných látek umožňuje vyloučit z explicitních úvah magnetizační proudy. Je samozřejmé, že pro vyjádření fyzikálních účinků magnetického pole (pro vyjádření sil působících na pohybující se náboje, pro vyjádření jevu elektromagnetické indukce) zůstává i v látkovém prostředí určující veličinou vektor magnetické indukce.

Intenzita magnetického pole  $\vec{H}$  je analogická vektoru elektrické indukce  $\vec{D}$  v elektrostatice, který závisí pouze na volných nábojích a nezávisí na přítomnosti dielektrika. Vektory  $\vec{M}$  a  $\vec{B}$



jsou analogií vektorů  $\vec{P}$  (polarizace) a  $\vec{E}$  (intenzita elektrického pole) v elektrostatice. Fyzikální rozměr intenzity magnetického pole je  $[H] = \text{A}\cdot\text{m}^{-1}$ . Stejný fyzikální rozměr má i magnetizace  $\vec{M}$ .

Neuvažujeme-li látky v supravodivém stavu, je možné z hlediska chování v magnetickém poli rozdělit všechny látky do dvou velkých skupin. Do první skupiny se zařazují látky, jejichž magnetizace nabývá jen malých hodnot. Mluvíme o látkách **slabě magnetických** (patří mezi ně látky diamagnetické a paramagnetické). Do druhé skupiny se zařazují látky, jejichž magnetizace může nabývat značných hodnot. Jde o látky **silně magnetické** (klasickými představiteli jsou látky feromagnetické).

Pro **slabě magnetické** látky je až na výjimky charakteristická lineární závislost mezi intenzitou magnetického pole a magnetizací, která je velmi přesně splněna do značně vysokých polí (s výjimkou oboru velmi nízkých teplot). Je zvykem ji zapisovat ve tvaru

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H}, \quad (3.18)$$

kde konstanta úměrnosti  $\chi_m$  se nazývá **magnetická susceptibilita** látky. Dosadíme-li vztah (3.18) do výrazu (3.16), získáme vztah mezi magnetickou indukcí a intenzitou magnetického pole

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0 (\vec{H} + \chi_m \vec{H}) = \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{H} = \mu_0 \mu_r \vec{H} = \mu \vec{H}, \quad (3.19)$$

kde veličina  $\mu = \mu_0 (1 + \chi_m)$  se nazývá **permeabilita** látky. Poměr  $\frac{\mu}{\mu_0}$  je **relativní permeabi-**

**lita**  $\mu_r$ ,

$$\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0}.$$

Pro vakuum je  $\chi_m = 0$  a tedy  $\mu = \mu_0$  a  $\mu_r = 1$ . Magnetická susceptibilita zavedená vztahem (3.18) je skalární veličina. Vektor magnetizace je v tomto případě vždy rovnoběžný s vektorem intenzity magnetického pole. To však platí jen v případě izotropních látek. V anizotropních látkách (např. v některých krystalech) je směr magnetizace obecně různý od směru intenzity magnetického pole. Magnetickou susceptibilitu je pak nutno považovat za symetrický tenzor druhého řádu.

Magnetická susceptibilita  $\chi_m$  může být kladná i záporná. Podle velikosti a znaménka magnetické susceptibility lze rozdělit magnetické látky do tří skupin, jak je uvedeno v tabulce 3.1.

Tab. 3.1

látky diamagnetické	$\chi_m < 0$	$-\chi_m \ll 1$	$\mu_r \doteq 1$	$\mu < \mu_0$
látky paramagnetické	$\chi_m > 0$	$\chi_m \ll 1$	$\mu_r \doteq 1$	$\mu > \mu_0$
látky feromagnetické	$\chi_m > 0$	$\chi_m \gg 1$	$\mu_r \gg 1$	$\mu \gg \mu_0$

### 3.3 Diamagnetismus

Diamagnetismus vykazují všechna látky. Je ale tak slabý, že je překryt, když látka vykazuje také paramagnetismus nebo feromagnetismus.

Chování diamagnetických látek lze vysvětlit i klasicky, i když víme, že magnetické vlastnosti látek se dají vyčerpávajícím způsobem vyložit pouze kvantově.

První kvalitativní výklad diamagnetismu podal v roce 1905 P. Langevin a později byl zpřesněn W. Paulim. Podle Langevina je diamagnetismus způsoben elektromagnetickou indukcí v uzavřených proudových drahách elektronů v atomech. Protože děj elektromagnetické indukce nezávisí na uspořádání těchto drah je diamagnetismus obecnou materiálovou vlastností. Avšak u látek, které mají v nepřítomnosti vnějšího magnetického pole magnetický moment od nuly různý, je diamagnetismus překryt mnohem silnějším paramagnetickým jevem.

Přiložme na uvažovanou látku vnější magnetické pole tak, že je zesilujeme z nuly do jisté koncové hodnoty. Při tom se magnetický indukční tok tohoto pole plochami ohraničenými proudovými smyčkami, které vytvářejí elektrony obíhající kolem jádra atomu, mění. Na elektron působí tři síly: Coulombova síla, kterou je elektron vázán k jádru, Lorentzova síla, kterou působí na elektron přiložené magnetické pole. Tyto dvě síly udržují elektron na kruhové dráze. Třetí silou je síla od indukovaného elektrického pole vyvolaného změnou indukčního magnetického toku proudovou smyčkou. Atom tak získá přídavný magnetický moment, který bude nenulový a bude mířit proti směru vnějšího magnetického pole. Indukovaný magnetický moment získaný během změny vnějšího magnetického pole pak trvá po celou dobu, kdy se látka nachází v magnetickém poli.

Je-li vnější magnetické pole homogenní, nepůsobí na diamagnetickou látku žádná výsledná síla. Je-li ale vnější magnetické pole nehomogenní, pak je diamagnetická látka „vytlačována ven z pole“ (tj. z oblasti s větší hodnotou magnetické indukce do oblasti s menší hodnotou magnetické indukce).

Absolutní hodnota diamagnetické susceptibility je malá, řádově  $10^{-6}$  a nižší. P. Curie na základě experimentů dospěl k zákonu, který říká, že **susceptibilita diamagnetických látek nezávisí na teplotě**.

Mezi diamagnetické látky patří inertní plyny, velký počet kovů, většina organických látek, voda. Silně diamagnetický je vizmut, jehož susceptibilita má hodnotu  $-14 \cdot 10^{-6}$ . (Vizmut byl první látka, u které byl diamagnetismus objeven.)

### 3.4 Paramagnetismus

V paramagnetických látkách se spinové a orbitální magnetické momenty elektronů nevykompenzují, takže atomy nebo molekuly mají i bez přítomnosti vnějšího magnetického pole nenulový magnetický moment. Za nepřítomnosti vnějšího magnetického pole jsou jednotlivé atomové magnetické momenty orientovány náhodně a výsledný moment je tedy nulový. Vložíme-li paramagnetickou látku do vnějšího magnetického pole o indukci  $\vec{B}$ , snaží se magnetické momenty orientovat do směru vnějšího magnetického pole, takže látka získá výsledný nenulový magnetický moment. Jeho orientace je opačná, než která se projevuje u diamagnetismu. Snaze

magnetického pole o orientaci momentů však brání tepelný pohyb atomů, který usiluje o dosažení stavu maximální neuspořádanosti. Protože tepelný pohyb atomů s teplotou vzrůstá, počet uspořádaných magnetických momentů se vzrůstající teplotou klesá.

Zmíněnou závislost susceptibility paramagnetických látek na teplotě  $T$  lze vyjádřit **Curieovým zákonem**

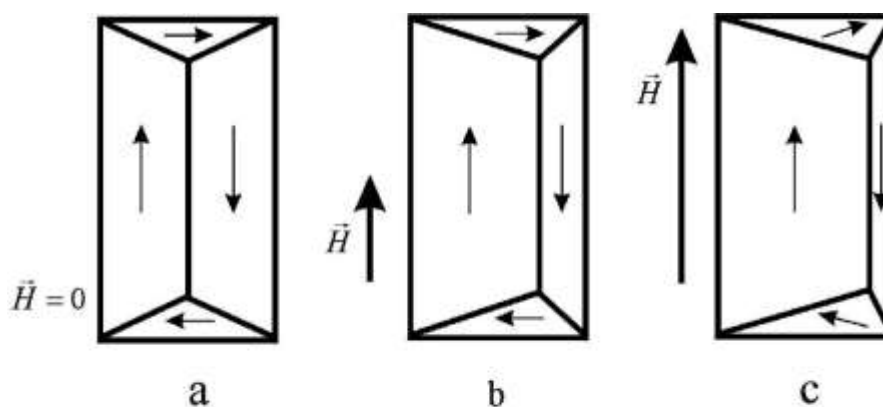
$$\chi_m = \frac{C}{T}, \quad (3.20)$$

ve kterém je  $C$  je Curieova konstanta, která představuje veličinu charakteristickou pro danou paramagnetickou látku. Susceptibilita paramagnetických látek je řádu  $10^{-6}$  a vyšší, v některých případech dosahuje až hodnot řádu  $10^{-3}$ . Mezi paramagnetické látky patří např. kyslík, sodík, hliník, platina.

### 3.5 Feromagnetismus

Feromagnetické látky jsou látky silně magnetické. Neliší se od slabě magnetických látek pouze velikostí magnetizace, ale jejich dalším charakteristickým rysem je složitá závislost magnetizace na intenzitě magnetického pole, na historii vzorku, i na mnoha dalších faktorech. Představiteli feromagnetických látek jsou železo, kobalt, nikl, gadolinium, dysprozium a slitiny těchto i některých jiných (i neferomagnetických) prvků.

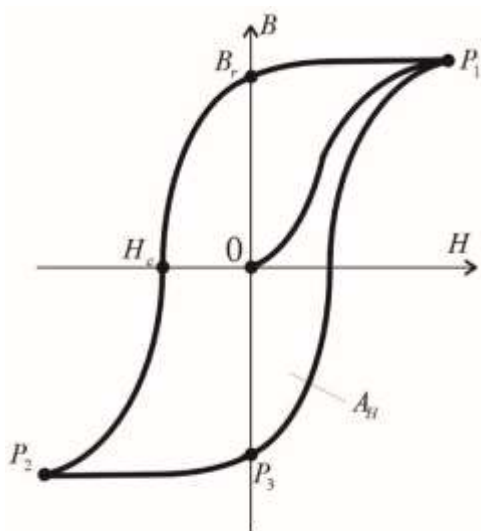
Feromagnetismus se dá vysvětlit pouze kvantově na základě jevu nazývaného výměnná interakce. Při tomto procesu se spiny elektronů jednoho atomu vzájemně ovlivňují se spiny sousedních atomů. Výsledkem je souhlasná orientace magnetických momentů atomů. Pokud zvýšíme teplotu feromagnetického materiálu nad jistou kritickou hodnotu nazývanou **Curieova teplota**, výměnná interakce již k uspořádání momentů nepostačí a materiál se stane paramagnetickým. Curieova teplota pro železo je  $770^\circ\text{C}$ .



Obr. 3.2

Podle této teorie by se pod Curieovou teplotou měla feromagnetická látka spontánně zmagnetovat, ze zkušenosti víme, že tomu tak není. Krystal feromagnetické látky je rozdělen do určitého množství **domén** (oblastí, ve kterých jsou magnetické momenty atomů orientovány souhlasně). Nepůsobí-li vnější pole, budou domény rozloženy jako na obr. 3.2 a (důvodem je, že

systém se snaží zaujmout stav s co nejnižší energií). Se vrůstající hodnotou intenzity magnetického pole  $\vec{H}$  budou domény výhodněji orientované vzhledem ke směru pole (menší potenciální energie v magnetickém poli) zvětšovat svůj objem na účet domén orientovaných nevýhodně. Změna objemu jednotlivých domén se děje při malých intenzitách magnetického pole posunem hranic oddělujících sousední domény (**Blochovy stěny**) – obr. 3.2 b. Dosáhne-li magnetické pole určité velikosti, začne se vektor spontánní magnetizace  $\vec{M}$  v jednotlivých doménách natičat do směru pole  $\vec{H}$  (obr. 3.2 c).



Obr. 3.3

Magnetizační křivky feromagnetických materiálů nemají stejný průběh v procesu zesilování a v procesu zeslabování vnějšího magnetického pole. Závislost magnetické indukce  $\vec{B}$  na intenzitě magnetického pole  $\vec{H}$  je na obr. 3.3. (Používáme pro popis vnějšího magnetického pole intenzitu magnetického pole  $\vec{H}$ , neboť toto pole může být např. vytvářeno proudem  $I$  procházejícím solenoidem.) Křivka  $OP_1$  se nazývá **magnetizační panenská křivka** nebo také **křivka prvotního magnetování** (na počátku je materiál nezmagnetovaný). Při nízkých hodnotách  $H$  je děj z velké části vratný (při snížení magnetické intenzity na nulu bude materiál opět nemagnetický) a děje se posuvy stěn. Při vyšších hodnotách  $H$  (lineární část panenské křivky) dochází k posuvům nevratným, které se dějí po skocích. Na konci lineární části dochází ke stáčení vektoru magnetizace v doménách. Tento proces je obvykle energeticky náročnější než proces posuvu Blochových stěn, a proto jsou třeba k němu silnější magnetická pole. Křivka končí v bodě  $P_1$ , ve kterém magnetizace dosahuje nasycené hodnoty  $M_s$  (všechny magnetické momenty jsou orientovány do směru vnějšího pole).

Budeme-li nyní snižovat magnetické pole až na nulovou hodnotu, magnetizace nevytizí, křivka bude protínat osu, na kterou se vynáší velikost magnetické indukce. Magnetická indukce má v tomto bodě velikost  $B_r$ , která se nazývá **magnetická remanence**. Toto remanentní (zbytkové) pole je dáno tím, že posuv doménových stěn není procesem zcela vratným, a tak materiál i při nulové hodnotě vnějšího magnetického pole zůstává částečně zmagnetován. Změníme-li nyní směr vnějšího pole v opačný, zjistíme, že pro určitou nenulovou hodnotu intenzity magnetického pole  $H_c$ , je velikost magnetické indukce nulová.  $H_c$  se nazývá **koercitivní síla**.

Zvyšujeme-li dále magnetické pole v opačném směru dospějeme znovu do stavu nasycení v bodě  $P_2$  a opětným snižováním magnetického pole a jeho přepólováním se zase dostaneme do bodu  $P_1$ .

Závislost  $B$  na  $H$  podle obr. 3.3, tedy to, že  $B$  závisí nejen na hodnotě  $H$ , ale i na tom, jakou cestou k magnetizaci došlo, se nazývá **hystereze** a křivka na obr. 3.3 se nazývá **hysterezní smyčka**.

Pro feromagnetické látky lze zavést pojem permeability  $\mu$  a relativní permeability  $\mu_r$ . Definiuje se

$$\mu = \frac{B}{H}, \quad \mu = \mu_0 \mu_r, \quad (3.21)$$

přičemž se požaduje, aby magnetizace probíhala po panenské křivce.

Magnetické materiály rozdělujeme podle jejich magnetických vlastností na materiály magneticky měkké (např. železo) a magneticky tvrdé (např. tvrdá ocel). Magnetická měkkost a tvrdost souvisí s tvarem magnetizační křivky. Materiály magneticky měkké se vyznačují strmou panenskou křivkou a úzkou hysterezní smyčkou o malé ploše. Materiály magneticky tvrdé mají panenskou křivku s malou strmostí a širokou hysterezní smyčku o velké ploše.

Zmagnetované feromagnetické látky mohou sloužit jako trvalé magnety. Pro tento typ použití je žádoucí, aby magnetický stav látky byl pokud možno stálý, tedy aby co nejméně závisel na různých vnějších vlivech, speciálně na vnějších polích. Tento požadavek bude splněn, bude-li látka mít co největší hodnotu koercitivního pole.

Při změně magnetizace materiálů vykazujících magnetickou hysterezi dochází k přeměně energie magnetizace v teplo. Velikost této energie je úměrná ploše hysterezní smyčky. Proto se v aplikacích, kde je třeba měnit magnetizaci s malými ztrátami energie (magnetická jádra elektrických transformátorů napětí, jádra cívek s velkou indukčností, magnetická jádra elektrických motorů, magnetická jádra hlav pro snímání informace ze záznamových magnetických médií) používají materiály magneticky měkké. Magneticky tvrdé materiály se používají tam, kde je potřeba zachovat zmagnetovaný stav materiálu, tedy v permanentních magnetech a v záznamových magnetických médiích.

Silný magnetismus látek může mít i jinou fyzikální podstatu než feromagnetismus. Například technicky důležité magnetické materiály, nazývané ferity, jsou **ferimagnetika**. Bez ohledu na konkrétní podstatu silného magnetismu je pro tyto látky vždy charakteristické nelineární chování a hystereze. Pro přesný popis magnetického pole v takových látkách je tudíž vždy nutné znát příslušnou magnetizační křivku či smyčku.

## Příklady ke kap. 3

### Příklad 3.1

Ukažte, že energie ztracená v železném jádře solenoidu objemu  $V$ , které je podrobena hystereznímu cyklu je dána výrazem  $W = VA_H$ , kde  $A_H$  je plocha hysterezní smyčky.

#### Řešení:

Hysterezní smyčka je na obr. 3.3.

Elektromotorické napětí indukované v solenoidu, který má  $N$  závitů a délku  $l$ , a jehož závit má velikost plochy  $S$ , je podle Faradayova zákona elektromagnetické indukce úměrné

$$\mathcal{E} = \frac{d\Phi}{dt} = NS \frac{dB}{dt}.$$

Výkon, se kterým je dodávána energie ze zdroje do solenoidu je

$$\frac{dW}{dt} = \mathcal{E}I = NS \frac{dB}{dt} \frac{Hl}{N}.$$

Odtud plyne

$$dW = lSH dB = VH dB ,$$

kde  $V$  je objem solenoidu a také objem železného jádra.

Energie dodaná zdrojem bude

$$W = \int VH dB = V \int H dB .$$

$B$  není jednoznačnou funkcí  $H$ , a proto integrál  $\oint H dB$  po uskutečnění jednoho cyklu není nulový, ale je roven velikosti plochy  $A_H$  uzavřené hysterezní smyčkou.

$$\oint H dB = A_H .$$

Energie dodaná zdrojem magnetické látky během jednoho cyklu je tak rovna

$$W = V \oint H dB = VA_H .$$

Tato energie se „ztrácí“. Je ztracena z hlediska elektromagnetických dějů, železo se jí zahřívá. Takovýmto ztrátám se říká hysterezní ztráty.

## 4. Elektromagnetické pole

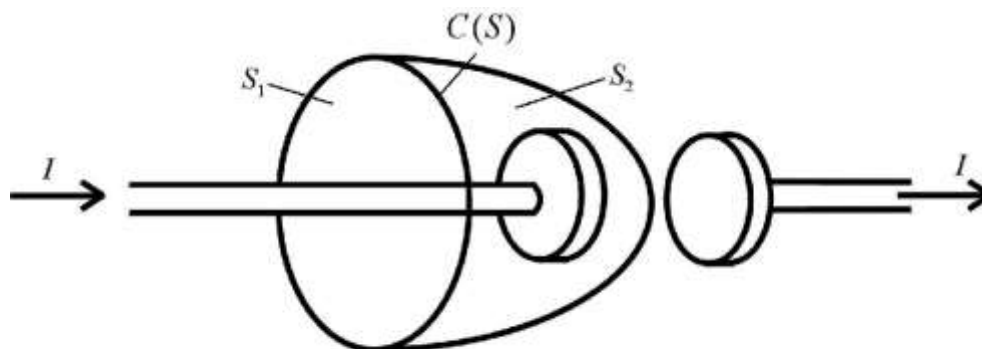
V šedesátých letech 19. století vypracoval skotský fyzik J.C.Maxwell (1831 – 1879) formální sjednocení zákonitostí elektrického a magnetického pole. Toto sjednocení vyjádřil soustavou rovnic, kterou dnes nazýváme Maxwellovy rovnice, a která popisuje pole elektrické a magnetické prostřednictvím čtyř vektorů: intenzity elektrického pole  $\vec{E}$ , magnetické indukce  $\vec{B}$ , elektrické indukce  $\vec{D}$  a intenzity magnetického pole  $\vec{H}$ . S významem těchto vektorů jsme se seznámili v předchozích kapitolách. Vlastní Maxwellův přínos, a to velmi důležitý, spočívá v tom, že upozornil na skutečnost, že časově proměnné elektrické pole je zdrojem magnetického pole, podobně jako časově proměnné magnetické pole je zdrojem pole elektrického (Faradayův indukční zákon). Na základě tohoto zobecnění Maxwell zavedl pojem posuvného proudu a především provedl analýzu soustavy rovnic, podle níž předpověděl existenci elektromagnetického vlnění, které se šíří prostorem rychlostí světla.

### 4.1 Maxwellovy rovnice

Ampèrův zákon (2.27) ve tvaru

$$\oint_{C(S)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu \iint_S \vec{i} \cdot d\vec{S} = \mu \sum I$$

uvádí závislost mezi prostorovým proudem s proudovou hustotou  $\vec{i}$  a magnetickým polem, které tento proud vyvolává. Počítá pouze s proudem vyvolaným ustáleným pohybem volného náboje a nebere v úvahu obecně všechny možnosti šíření proudu. Maxwell zobecnil Ampèrův zákon pro nestacionární případ na základě následující úvahy:



Obr. 4.1

Mějme elektrický obvod tvořený kovovým vodičem a zapojme do něj deskový kondenzátor, takže tímto obvodem nemůže protékat ustálený elektrický proud. Uvažujme situaci krátce potom, co byl obvod připojen ke zdroji napětí a kondenzátor se nabíjí. Sledujme pole v blízkosti kondenzátoru na základě Ampèrova zákona. Podle obr. 4.1 volíme dvě plochy  $S_1$  a  $S_2$ , které

jsou společně ohraničené stejnou křivkou  $C$ . Plochou  $S_1$  protéká indukční proud  $I$ , jehož hodnota v určitém okamžiku  $I(t) = \frac{dQ}{dt}$  je dána přírůstkem volného náboje  $dQ$  na kondenzátoru za čas  $dt$ , a který vyvolává magnetické pole podle Ampèrova zákona. Plochou  $S_2$  ovšem žádný indukční proud neprotéká, a tudíž je zřejmé, že platnost Ampèrova zákona by byla závislá na volbě plochy  $S$ . Protože tato možnost je nepřípustná, musí v prostoru dielektrika kondenzátoru existovat jev ekvivalentní indukčnímu proudu, který rovněž splňuje Ampèrův zákon. Zabývejme se proto dějem probíhajícím mezi deskami kondenzátoru při jeho nabíjení. Kapacita  $C$  deskového kondenzátoru je dána vztahem

$$C = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{A}{d},$$

kde  $A$  je plocha desky kondenzátoru,  $d$  je vzdálenost desek,  $\varepsilon_0$  je elektrická konstanta a  $\varepsilon_r$  je relativní permitivita dielektrika mezi deskami kondenzátoru.

Zanedbáme-li vliv okrajových částí kondenzátoru, můžeme elektrické pole mezi deskami považovat za homogenní a pro napětí  $U$  mezi deskami kondenzátoru platí rovnice

$$U = Ed = \frac{E_0 d}{\varepsilon_r} = \frac{\varepsilon_0 E_0 d}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} = \frac{Dd}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}. \quad (4.1)$$

S využitím definice kapacity kondenzátoru  $C = \frac{Q}{U}$ , vztahu pro kapacitu deskového kondenzátoru a rovnice (4.1) lze pro vztah mezi proudem  $I$  a velikostí elektrické indukce  $D$  v prostoru mezi deskami psát

$$I(t) = \frac{dQ}{dt} = C \frac{dU}{dt} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{A}{d} \frac{d}{dt} \left( \frac{Dd}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} \right) = \frac{d(AD)}{dt}. \quad (4.2)$$

Protože pole mezi deskami kondenzátoru je homogenní, je elektrický indukční tok plochou  $S_2$

$$\Psi = \iint_{S_2} \vec{D} \cdot d\vec{S} = AD \quad (4.3)$$

a účinky časově proměnného vodivostního proudu  $I$  jsou z hlediska Ampèrova zákona ekvivalentní účinku časově proměnného elektrického indukčního toku  $\Psi$ :

$$I = \frac{d(AD)}{dt} = \frac{d\Psi}{dt}. \quad (4.4)$$

V případě časově proměnných elektrických polí je proto nutné Ampèrův zákon (2.27) doplnit o člen vyjadřující tuto skutečnost:

$$\oint_{C(S)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu \left( \sum I + \sum \frac{d\Psi}{dt} \right). \quad (4.5)$$



V obecných případech, kdy se jedná o nehomogenní elektrická pole ( $\vec{D}$  je funkcí času i souřadnic), je třeba ve vztazích (4.2) a (4.4) psát parciální derivace podle času. V takovém případě se pak modifikovaný Ampèrův zákon píše ve tvaru

$$\oint_{c(s)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu \iint_S \left( \vec{i} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S}, \quad (4.6)$$

respektive

$$\oint_{c(s)} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iint_S \left( \vec{i} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S}. \quad (4.7)$$

Člen  $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$  se původně nazýval hustota Maxwellova posuvného proudu. Představa, že původ tohoto proudu je v posunování polarizačních nábojů v dielektriku, se však ukázala nesprávnou, a proto se dnes obvykle užívá termín **Maxwellův proud**, resp. **hustota Maxwellova proudu**. Rovnice (4.6), někdy označovaná jako **Ampèrův – Maxwellův zákon**, ukazuje, že **časově proměnné elektrické pole je zdrojem magnetického pole**.

Zavedení nového členu do Ampèrova zákona Maxwellovi umožnilo předpovědět existenci elektromagnetických vln, které se šíří prostorem rychlostí světla, a jeho předpověď byla poprvé experimentálně potvrzena německým fyzikem Heinrichem Hertzem. Objev elektromagnetických vln byl neobyčejně významný jak v oblasti teoretické, tak v oblasti praktické. Obecně jsou známé dalekosáhlé praktické důsledky (radio, televize, radar), a tento objev proto znamenal významný podnět pro rozvoj techniky. V oblasti teoretické byl patrně nejvýznamnější Maxwellův výklad podstaty světla jako elektromagnetického vlnění.

Maxwellovy rovnice lze psát ve dvou tvarech – ve tvaru integrálním a diferenciálním. Tvar integrální pro pole ve vakuu:

$$\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q^* \quad (4.8)$$

$$\oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (4.9)$$

$$\oint_{c(s)} \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \quad (4.10)$$

$$\oint_{c(s)} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iint_S \left( \vec{i} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S}. \quad (4.11)$$

Rovnice (4.8) je Gaussova věta elektrostatická, která dává do souvislosti elektrickou indukci pole a prostorové rozložení volných nábojů  $Q^*$ .

Rovnici (4.9) je možno označit jako Gaussovu větu pro magnetické pole – vyjadřuje skutečnost, že neexistují magnetické náboje a indukční čáry jsou uzavřené křivky.

Rovnice (4.10) je Faradayův indukční zákon a rovnice (4.11) je Ampèrův – Maxwellův zákon popisující souvislost mezi magnetickým a elektrickým polem a elektrickým proudem.

Tyto rovnice však nemohou popsat všechny závislosti v oblasti elektrického a magnetického pole, protože neobsahují Ohmův zákon, Lorentzovu sílu a vztahy vystihující vliv prostředí na tyto druhy polí. Proto se doplňují dalšími čtyřmi rovnicemi, které se někdy nazývají vedlejší Maxwellovy rovnice:

$$\vec{i} = \gamma \vec{E} \quad (4.12)$$

$$\vec{F} = Q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (4.13)$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H}. \quad (4.14)$$

Soustava čtyř Maxwellových rovnic a rovnic vedlejších umožňuje popis všech známých makroskopických elektrických a magnetických jevů. Zatímco Maxwellovy rovnice v integrálním tvaru popisují vlastnosti elektrického a magnetického pole v makroskopickém měřítku, lze vlastnosti těchto polí popsat také v měřítku mikroskopickém, tj. v jednotlivých bodech pole, pomocí rovnic v diferenciálním tvaru. Na tento tvar lze Maxwellovy rovnice převést pomocí matematických vět Gaussovy a Stokesovy.

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho^* \quad (4.15)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (4.16)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (4.17)$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{i} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \quad (4.18)$$

## 4.2 Rovinná elektromagnetická vlna

Existenci a vlastnosti elektromagnetických vln lze stanovit rozborem Maxwellových rovnic. Pro jednoduchost se budeme zabývat pouze případem rovinné elektromagnetické vlny šířící se v prázdném prostoru ( $\rho^* = 0$ ,  $\vec{i} = 0$ ,  $\varepsilon_r = \mu_r = 1$ ).

Rovnici (4.17) vynásobíme zleva vektorově operátorem  $\vec{\nabla}$  a upravíme podle pravidel vektorové analýzy. Pro levou stranu s použitím (4.15) a (4.12) postupně dostáváme

$$\vec{\nabla} \times \operatorname{rot} \vec{E} = \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{E} - \Delta \vec{E} = -\Delta \vec{E}, \quad (4.19)$$

neboť platí  $\operatorname{div} \vec{D} = \varepsilon_0 \operatorname{div} \vec{E} = 0$ .

Pravou stranu rovnice (4.17) upravíme takto:

$$\vec{\nabla} \times \left( -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{rot} \vec{B}) = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) = -\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (4.20)$$

a porovnáním obou stran docházíme k rovnici

$$\Delta \vec{E} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}. \quad (4.21)$$

Analogicky lze odvodit pro vektor  $\vec{B}$  vztah

$$\Delta \vec{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}. \quad (4.22)$$

Rozepíšeme-li rovnice (4.21) a (4.22) do složek, dostaneme relace

$$\begin{aligned} \Delta E_x &= \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}, & \Delta E_y &= \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}, & \Delta E_z &= \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} \\ \Delta B_x &= \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 B_x}{\partial t^2}, & \Delta B_y &= \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 B_y}{\partial t^2}, & \Delta B_z &= \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 B_z}{\partial t^2}. \end{aligned}$$

Rovnice (4.21), (4.22) pro  $\vec{E}$  a  $\vec{B}$  mají tvar obecné vlnové rovnice

$$\Delta u = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (4.23)$$

Rovnice (4.21) a (4.22) proto popisují elektrické a magnetické vlnění šířící se prostorem a porovnáním rovnice (4.23) s rovnicemi (4.21) a (4.22) docházíme k závěru, že fázová rychlost vlnění je

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}. \quad (4.24)$$

Veličiny  $\vec{E}$  a  $\vec{B}$  mají vlnový charakter. Elektrické a magnetické vlnění jsou ovšem podle rovnic (4.17) a (4.18) navzájem závislé, tvoří nedělitelný celek, a proto je nazýváme **elektromagnetické vlnění**.

Řešení vlnových rovnic v obecném případě je matematicky obtížné, a proto jej ukážeme pouze pro rovinnou polarizovanou vlnu šířící se ve směru osy  $x$ . Vlnoplochou této vlny je rovina kolmá k ose  $x$ , šířící se rychlostí (4.24). Ve všech bodech této roviny je v daném okamžiku stav vlnění stejný, a proto platí

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial y} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial z} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial y} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial z} = 0 \quad (4.25)$$

a s použitím rovnic (4.15) až (4.18) lze ukázat, že platí

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{\partial B_x}{\partial t} = 0. \quad (4.26)$$

To znamená, že šíření elektromagnetického vlnění jako časové změny polí se v našem případě účastní pouze složky kolmé na směr šíření vlny, tj. **elektromagnetické vlnění je vlnění příčné**.

Předpokládejme dále, že se jedná o harmonickou vlnu, a zvolme směr vektoru  $\vec{E}$  ve směru osy  $y$ . Pak můžeme psát

$$E_x = 0, \quad E_y = E_0 \sin(kx - \omega t), \quad E_z = 0 \quad (4.27)$$

a z rovnice (4.17) plyne pro  $y$ -ovou složku vektoru magnetické indukce

$$(\text{rot } E)_y = \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\partial B_y}{\partial t} = 0, \quad (4.28)$$

což znamená, že složka  $B_y$  vektoru  $\vec{B}$  se nepodílí na šíření časové změny pole, a proto je časově proměnná pouze složka  $B_z$ . Lze proto vyslovit závěr, že **elektrická a magnetická složka elektromagnetické vlny jsou jednak kolmé navzájem, jednak jsou kolmé na směr šíření vlny**. Vzájemný vztah vektorů  $\vec{E}$  a  $\vec{B}$  vyplývá z následujícího postupu. Podle rovnic (4.17) a (4.18) platí

$$\begin{aligned} (\text{rot } B)_y &= \frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} \\ (\text{rot } E)_z &= -\frac{\partial E_x}{\partial y} + \frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t} \end{aligned}$$

a po úpravě s použitím (4.25) a (4.27) dostáváme dvě diferenciální rovnice

$$-\frac{\partial B_z}{\partial x} = -\varepsilon_0 \mu_0 \omega E_0 \cos(kx - \omega t) \quad (4.29)$$

$$-\frac{\partial B_z}{\partial t} = k E_0 \cos(kx - \omega t), \quad (4.30)$$

jejichž integrací dospíváme k výsledku

$$B_z = \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} E_0 \sin(kx - \omega t) = B_0 \sin(kx - \omega t). \quad (4.31)$$

Jak vyplývá z rovnic (4.27), (4.24) a (4.31), platí, že **poměr velikosti intenzity elektrického pole  $E_y$  a velikosti magnetické indukce  $B_z$  je roven rychlosti  $c$** .

$$\frac{E_y}{B_z} = \frac{E_0}{B_0} = c. \quad (4.32)$$

Experimenty s elektromagnetickými vlnami prokázaly, že rychlost těchto vln ve vakuu je rovna rychlosti světla ve vakuu. Velikost této rychlosti je jedna z fundamentálních fyzikálních konstant a činí

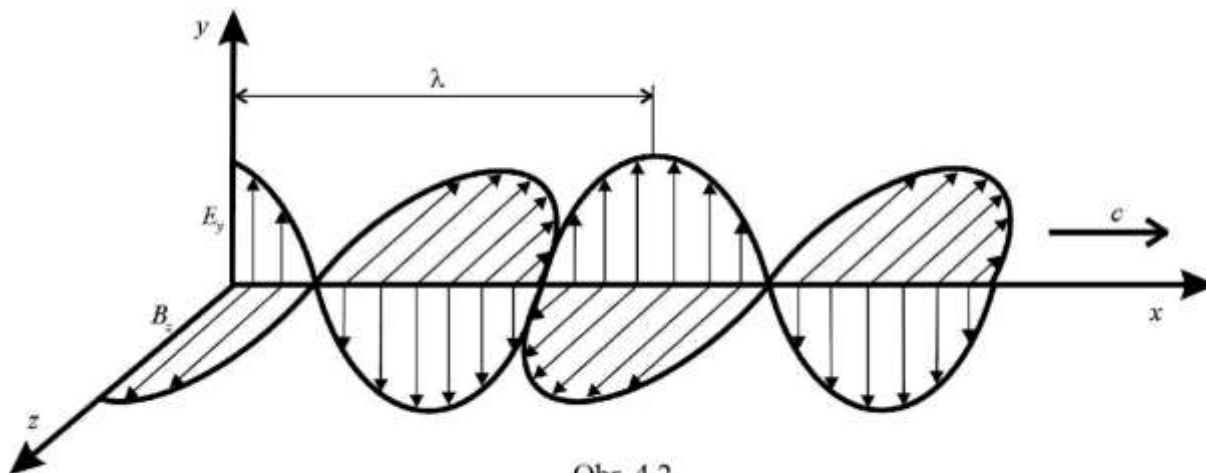
$$c = 2,99792458 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

V případě, že se elektromagnetická vlna šíří jiným prostředím než vakuem, je její rychlost dána výrazem

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon_r \mu_0 \mu_r}}, \quad (4.33)$$

kde  $\varepsilon_r$  je relativní permitivita prostředí a  $\mu_r$  jeho relativní permeabilita.

Shoda velikosti rychlosti světla a jiných druhů elektromagnetického záření přispívá k důkazu oprávněnosti Maxwellovy představy o světle jako elektromagnetickém vlnění. Uvedená hodnota rychlosti  $c$  je odvozena od definic metru a sekundy v současné době platných, a proto platí přesně. Na obr. 4.2 je harmonická polarizovaná elektromagnetická vlna, šířící se ve vakuu rychlostí  $c$  ve směru osy  $x$  zobrazená v určitém čase  $t$ .



Obr. 4.2

### 4.3 Přenos energie elektromagnetickým vlněním, tlak vlnění

Elektromagnetické vlnění přenáší energii a je schopné předávat ji objektům, které toto vlnění absorbují. Energie vlnění obsahuje jak složku energie elektrické, tak složku energie magnetické. Tok energie je kvantitativně vyjádřen množstvím energie  $W$  prošlé za jednotku času jednotkovou plochou  $A$  kolmou ke směru šíření vlny

$$S = \frac{1}{A} \frac{dW}{dt}. \quad (4.34)$$

Přisoudíme-li této veličině směr shodný se směrem šíření elektromagnetické vlny, lze ji označit jako vektor  $\vec{S}$ , který se nazývá **Poyntingův vektor**. Ten je ve vakuu definován vztahem

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}. \quad (4.35)$$

Jednotka velikosti Poyntigova vektoru je  $W \cdot m^{-2}$ .

Protože  $\vec{E}$  a  $\vec{B}$  jsou v elektromagnetické vlně navzájem kolmé, je velikost  $\vec{E} \times \vec{B}$  rovna  $EB$ . Velikost vektoru  $\vec{S}$  pak je

$$S = \frac{1}{\mu_0} EB, \quad (4.36)$$

kde  $S$ ,  $E$ ,  $B$  jsou okamžité hodnoty veličin. V případě harmonické elektromagnetické vlny šířící se ve vakuu lze výraz (4.36) psát ve tvaru

$$S = \frac{1}{\mu_0} E_0 B_0 \sin^2(kx - \omega t). \quad (4.37)$$

Pro praxi je však užitečnější střední energie přenesená za určitou dobu. Musíme tedy najít časovou střední hodnotu  $\bar{S}$ , kterou nazýváme také **intenzita  $\bar{I}$  vlnění**

$$\bar{I} = \bar{S} = \frac{1}{c\mu_0} \overline{E_0^2 \sin^2(kx - \omega t)} \quad (4.38)$$

kde jsme využili vztah (4.32) a pruh nad veličinou značí její střední hodnotu. Označíme-li  $T$  periodu harmonických kmitů elektromagnetické vlny, platí

$$\overline{\sin^2(kx - \omega t)} = \frac{1}{T} \int_T \sin^2(kx - \omega t) dt = \frac{1}{2},$$

a proto lze vztah (4.38) přepsat do tvaru

$$\bar{S} = \bar{I} = \frac{1}{2\mu_0} E_0 B_0. \quad (4.39)$$

Hustota energie  $w$  v elektromagnetickém poli je dána součtem hustot energií elektrického a magnetického pole a v případě časově proměnných polí ve vakuu má okamžitou hodnotu

$$w = w_e + w_m = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2. \quad (4.40)$$

Mezi hustotou energie elektromagnetického pole a intenzitou vlnění platí vztah

$$\bar{I} = c\bar{w}. \quad (4.41)$$

Elektromagnetické vlny mají energii i hybnost. Jestliže povrch tělesa absorbuje celkovou energii vlnění  $W$ , přejal současně i hybnost  $\vec{p}$ , pro jejíž velikost  $p$  platí Maxwellem zavedený vztah

$$p = \frac{W}{c}. \quad (4.42)$$

Tato skutečnost se projevuje jako **tlak elektromagnetického záření** a pro dokonale absorbující těleso je velikost tlaku  $p_r$  dána rovnicí

$$p_r = \frac{S}{c}. \quad (4.43)$$

Pro těleso, které elektromagnetické vlny dokonale odráží, činí hodnota tlaku záření dvojnásobek hodnoty podle (4.43), takže u reálných těles platí

$$\frac{S}{c} < p_r < \frac{2S}{c} \quad (4.44)$$

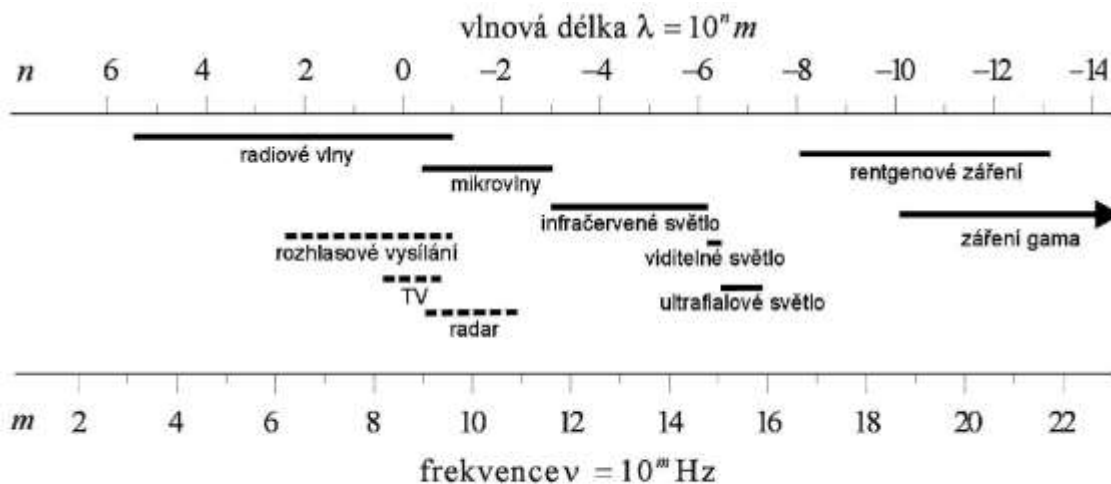
Ačkoli velikost tlaku záření je malá (např. asi  $5 \cdot 10^{-6} \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$  pro přímé sluneční světlo na povrchu Země) je měřitelná např. citlivými torzními vážkami. Výraznější důkazy vlivu tlaku světelného záření lze nalézt v astronomických pozorováních. Vývoj laserové technologie dovolil dosáhnout tlaky záření vyšších hodnot. Svazek laserové světla je možné soustředit na velmi malou plochu s průměrem pouze několika vlnových délek dopadajícího záření. To pak umožňuje předání velmi velké energie malým objektům, na které záření dopadne. Ostře fokusované paprsky lze použít jako laserovou pinzetu.

## 4.4 Spektrum elektromagnetických vln

Vlnová délka  $\lambda$  a frekvence  $\nu$  elektromagnetických vln splňují známý vztah

$$c = \lambda \nu .$$

Na obr. 4.3 jsou uvedeny vlnové rozsahy známých druhů elektromagnetických vln. Jelikož vlnové délky, resp. frekvence, pokrývají rozsah 24 řádů, je pro obrázek zvoleno logaritmické měřítko.



Obr. 4.3

**Radiové vlny** označují vlny vyzařované při zrychleném pohybu nábojů ve vodičích. Jsou generovány pomocí obvodů typu LC apod. a pokrývají interval vlnových délek od  $10^{-1} \text{ m}$  do  $10^5 \text{ m}$ . Část tohoto rozsahu je využívána v komunikačních systémech (rozhlas, televize).

**Mikrovlny** jsou vlny s rozsahem vlnových délek  $10^{-3} \text{ m}$  až  $0,3 \text{ m}$  a jsou rovněž generovány elektrickými obvody. Jsou využívány v radarových systémech a pro studium vlastností molekul

a atomů. Známa je jejich aplikace v mikrovlnných troubách. Síť mobilních telefonů jsou vybudovány pro vlny o vlnové délce asi 30 cm (900 MHz) a 17 cm (1 800 MHz). Systém GPS (Global Positioning System) je satelitní síť 28 družic, které se koordinovaně pohybují kolem Země ve výšce 20 200 km s periodou  $\frac{1}{2}$  dne, vysílají kódované signály na frekvencích 1 227 MHz a 1 575 MHz a umožňují pomocí malého přijímače určit jeho polohu na zemském povrchu s přesností několika metrů.

**Infračervené záření** pokrývá rozsah vlnových délek od  $10^{-6}$  m do  $10^{-3}$  m. Tyto vlny jsou generovány kmitajícími molekulami a atomy a jsou dobře absorbovány většinou známých materiálů. Výsledek této absorpce se projevuje nárůstem teploty tělesa. Aplikace infračerveného záření ve vědě a technice je mnohostranná.

**Viditelné světlo** je část spektra elektromagnetických vln, kterou je schopno vnímat lidské oko. Rozsah vnímaných vlnových délek je zčásti individuální záležitostí, zhruba lze uvést 350 nm až 750 nm. Vlastnostmi a aplikacemi viditelného světla se budeme zabývat v dalších kapitolách.

**Ultrafialové záření** má vlnové délky v rozsahu 60 nm až 350 nm. Kromě četných aplikací ve vědě a technice je problematika záření v tomto oboru aktuální z hlediska ubývání ozonu v zemské atmosféře, protože toto záření je ozonem silně absorbováno. Úbytek ozonu v horních vrstvách atmosféry proto způsobuje nárůst intenzity ultrafialového záření, které může být škodlivé pro živé organismy včetně člověka.

**Rentgenové záření** (záření X) má rozsah vlnových délek řádově od 10 nm do  $10^{-4}$  nm. Nejobyklejším zdrojem rentgenového záření pro technické a medicínské aplikace jsou rentgenky, v nichž dochází k prudkému zpomalení elektronů dopadajících s velkou rychlostí na kovové terče. Rentgenové záření se také využívá ke studiu struktury krystalů.

**Záření gama** ( $\gamma$ ) je elektromagnetické záření emitované při přeměnách v atomových jádrech. Vlnové délky jsou řádově v rozsahu  $10^{-1}$  nm -  $10^{-5}$  nm. V technice je využívána jeho pronikavost a to zejména pro defektoskopické účely.

## Příklady ke kap. 4

### Příklad 4.1

Elektromagnetická vlna se šíří ve směru záporné osy  $y$ . V daném místě a okamžiku má intenzita elektrického pole směr kladné osy  $z$  a velikost  $100 \text{ V}\cdot\text{m}^{-1}$ . Jaký je směr a velikost indukce magnetického pole ve stejném místě a stejném okamžiku?

**Řešení:**

Vektory  $\vec{k}$ ,  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  tvoří v tomto pořadí pravotočivý systém ( $\vec{k}$  je vlnový vektor, jeho směr udává směr šíření vlny), proto  $\vec{B}$  má směr záporné osy  $x$ .

$$\vec{B} = (-B, 0, 0)$$

Podle vztahu (4.32) platí  $\frac{E}{B} = c \Rightarrow$

$$B = \frac{E}{c}.$$



Po dosazení dostaneme

$$B = \frac{E}{c} = \frac{100}{3 \cdot 10^8} \text{ T} = 3,33 \cdot 10^{-7} \text{ T}.$$

### Příklad 4.2

Zjistěte tok energie v kondenzátoru, který se pomalu nabíjí.

#### Řešení:

Uvažujme kondenzátor s kruhovými deskami, které mají poloměr  $r$ , a vzdálenost mezi deskami je  $h$  (obr. 4.4). Proud  $I$ , který prochází obvodem, ve kterém je zapojen kondenzátor není konstantní. V libovolném okamžiku je celková energie elektrického pole  $W$  uvnitř kondenzátoru rovna

$$W = w_e V = w_e \pi r^2 h = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 \pi r^2 h,$$

kde objem uvnitř kondenzátoru je  $V = \pi r^2 h$  a  $w_e$  je hustota energie elektrického pole uvnitř kondenzátoru,  $E$  je intenzita elektrického pole. Pro časovou změnu energie platí

$$\frac{dW}{dt} = \epsilon_0 \pi r^2 h E \frac{dE}{dt}.$$

Se změnou intenzity elektrického pole se mění energie uvnitř kondenzátoru. Energie nepřichází nabitým vodičem, protože  $\vec{E}$  je kolmé na desky a Poyntingův vektor  $\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}$  musí být

kolmý na  $\vec{E}$  a  $\vec{B}$ , a tak Poyntingův vektor musí být rovnoběžný s deskami kondenzátoru. Při nabíjení kondenzátoru vzniká kolem jeho osy magnetické pole. Z aplikace Ampèrova – Maxwelllova zákona (4.11) na nabíjející se kondenzátor plyne

$$2\pi r \frac{1}{\mu_0} B = \epsilon_0 \frac{dE}{dt} \pi r^2 \Rightarrow B = \frac{1}{2} \epsilon_0 \mu_0 r \frac{dE}{dt}.$$

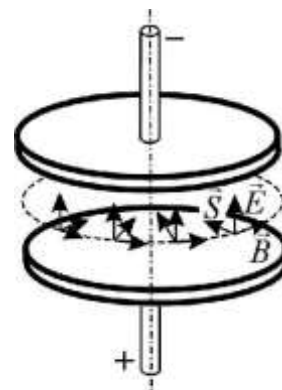
Směr magnetické indukce je na obr. 4.4. Velikost Poyntingova vektoru je rovna

$$S = \frac{1}{\mu_0} |\vec{E} \times \vec{B}| = \frac{1}{\mu_0} EB = \frac{1}{\mu_0} E \frac{1}{2} \epsilon_0 \mu_0 r \frac{dE}{dt} = \frac{1}{2} \epsilon_0 r E \frac{dE}{dt}.$$

Celkový tok energie do kondenzátoru je roven

$$\frac{dW}{dt} = SA = S2\pi rh = \frac{1}{2} \epsilon_0 r E \frac{dE}{dt} 2\pi rh = \epsilon_0 \pi r^2 h E \frac{dE}{dt}$$

a souhlasí se změnou energie elektrického pole uvnitř kondenzátoru.



Obr. 4.4

## 5. Geometrická optika

**Optika** je část fyziky, která zkoumá podstatu světla a zákonitosti světelných jevů, které vznikají při šíření světla a při vzájemném působení světla a látky. Optiku obvykle dělíme na tři dílčí disciplíny: geometrická optika, vlnová optika a kvantová optika. Geometrická optika popisuje šíření světla pomocí modelu světelných paprsků a nezabývá se podstatou světla ani jeho vlnovými vlastnostmi.

### 5.1 Podstata světla, rychlost světla, geometrická optika

**Světlo je elektromagnetické vlnění** na které je citlivé lidské oko, tj. v intervalu vlnových délek 350 nm – 750 nm. Někdy se termín světlo pro stručnost používá i pro optické záření, na které je oko necitlivé a sice pro infračervené záření (pro interval vlnových délek 750 nm – 40 μm) nebo pro ultrafialové záření (1 nm – 350 nm).

Prostředí, kterým se může šířit světlo, se nazývá optické prostředí. Ve vakuu se světlo šíří rychlostí přibližně  $3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ , v látkovém prostředí je rychlost světla menší.

Tělesa, vyzařující světlo, se nazývají světelné zdroje. Zdroje, jejichž příčné rozměry lze vzhledem k ostatním vzdálenostem zanedbat jsou bodové zdroje, ostatní jsou zdroje plošné.

Šíření světla a chování světelných paprsků je v geometrické optice řízeno dvěma základními principy:

#### 1. Huygensův princip

Světlo se šíří prostorem tak, že všechny body, do nichž světlo v daný okamžik dospěje, se stávají bodovými zdroji elementárního vlnění, které se kolem každého bodu rozšíří na elementární vlnoplochy, a nová vlnoplocha je obálkou všech elementárních vlnoploch ve směru, kterým se světlo šíří.

#### 2. Fermatův princip

Světlo se v prostoru šíří z jednoho bodu do druhého po takové dráze, že doba potřebná pro proběhnutí této dráhy má extrémní hodnotu. Obvykle platí, že doba potřebná pro proběhnutí dráhy je nejkratší možná.

Na základě těchto principů je možno odvodit všechny zákony geometrické optiky.

Geometrická optika používá při popisu šíření světla **model světelných paprsků**. Paprsek je definován jako křivka, jejíž tečna v každém bodě určuje směr šíření světla. Směr světelného paprsku v určitém bodě prostředí je dán směrem normály k vlnoploše procházející tímto bodem. **V izotropním optickém prostředí jsou paprsky polopřímky s počátkem ve zdroji světla. To znamená, že v izotropním prostředí se světlo šíří přímočaře.**

### 5.2 Zobrazování optickými soustavami

**Zobrazovací optická soustava** je soubor optických prostředí ohraničených optickými plochami, na nichž se odrazem nebo lomem mění směr paprsků vycházejících z předmětu a vytváří

se tak jeho obraz. Průchod světelných paprsků zobrazovací soustavou se řídí principem přímočarého šíření světla a zákony odrazu a lomu. Mezi zobrazovací optické soustavy řadíme například oko, zrcadla, čočky, mikroskopy a dalekohledy.

Vymežeme hlavní pojmy, se kterými pracuje geometrická optika:

**Předmět** je zobrazovaný objekt, z jehož jednotlivých bodů vycházejí svazky paprsků, které vstupují do zobrazovací soustavy.

**Obraz** je objekt tvořený množinou bodů, v nichž se po průchodu optickou soustavou skutečně nebo zdánlivě protínají paprsky vycházející z jednotlivých bodů zobrazovaného předmětu.

Odpovídající si body předmětu a obrazu jsou **sdrúžené body**.

**Skutečný (reálný) obraz** – vzniká, pokud optická soustava vytváří sbíhavý svazek paprsků, paprsky se po průchodu soustavou protínají a tento obraz lze zachytit na stínítku.

**Zdánlivý (virtuální) obraz** – vzniká, pokud optická soustava vytváří rozbíhavý svazek paprsků, které se zdánlivě protínají před nebo za soustavou a zde vytvářejí neskutečný obraz, který nelze zachytit na stínítku.

**Předmětový prostor** – prostor před optickou soustavou (většinou vlevo), ve kterém se nachází předmět.

**Obrazový prostor** – prostor za optickou soustavou (většinou vpravo), v němž může ležet obraz předmětu.

**Znaménková konvence** – vztahy mezi polohou předmětu a obrazu a mezi velikostí předmětu a obrazu vyjadřují **zobrazovací rovnice**. Obecná platnost těchto rovnic vyžaduje dodržování určité dohody o znaménkách souřadnic. Tato dohoda není vždy stejná a proto se v literatuře setkáváme se zobrazovacími rovnicemi lišícími se ve znaménkách jednotlivých členů. V těchto skriptech budeme dodržovat následující ujednání:

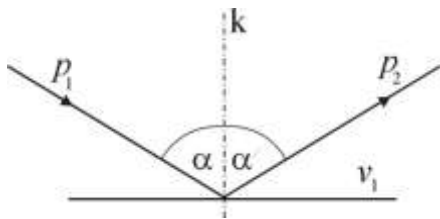
– Počátkem souřadné soustavy je střed optické soustavy, který je totožný s počátky předmětového a obrazového prostoru.

– Poloha předmětu  $x$  a poloha obrazu  $x'$  se měří od středu soustavy. Je-li poloha měřena ve směru chodu paprsků, je kladná, v opačném případě je záporná. Zpravidla platí, že paprsky se šíří zleva doprava.

– Velikost obrazu a předmětu se měří od optické osy a ve směru nahoru je kladná, v opačném případě je záporná.

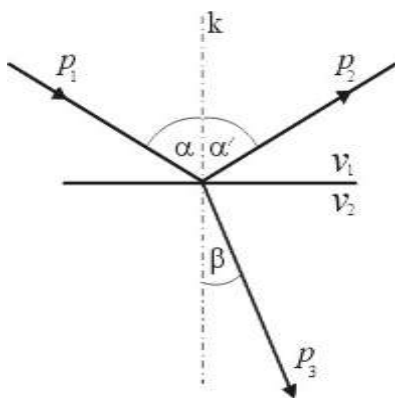
Optické zobrazování se řídí Huygensovým a Fermatovým principem. Používání těchto principů pro řešení konkrétních zobrazovacích úloh by ale bylo nepraktické. Proto se z těchto principů odvodily jednoduché obecné zákony paprskové optiky: zákon přímočarého šíření světla v izotropním prostředí, zákon odrazu a zákon lomu. Z nich lze např. odvodit zobrazovací rovnice.

**Přímočaré šíření světla** – v homogenním izotropním optickém prostředí se světlo šíří přímočaře, v rovnoběžných, rozbíhavých nebo sbíhavých svazcích světelných paprsků. Dopadá-li světelný paprsek na rozhraní optických prostředí, část světla se odráží zpět do prvního prostředí a část se láme do druhého prostředí.



Obr. 5.1

**Zákon odrazu:** Světlo dopadá na rozhraní optických prostředí pod úhlem dopadu  $\alpha$  (obr. 5.1), který paprsek  $p_1$  svírá s kolmicí dopadu  $k$ , vztyčenou v místě dopadu. Paprsek dopadajícího světla a kolmice dopadu leží v rovině, kterou nazýváme rovina dopadu. Odražené světlo se šíří od rozhraní ve směru určeném odraženým paprskem  $p_2$ , ten svírá s kolmicí dopadu úhel odrazu  $\alpha'$ . Platí, že **velikost úhlu dopadu  $\alpha$  se rovná velikosti úhlu odrazu  $\alpha'$** . **Odražený paprsek leží v rovině dopadu.**



Obr. 5.2

**Zákon lomu:** Světlo dopadá na rozhraní do bodu dopadu O, obr. 5.2. Lomený paprsek  $p_3$  směřuje z bodu O druhým prostředím pod úhlem  $\beta$  a leží v rovině dopadu. Úhel lomu se měří rovněž od kolmice dopadu. Pro lom mechanického vlnění jsme již odvodili vztah, který platí i pro světlo. Matematicky je zákon lomu vyjádřen vztahem

$$\frac{\sin \vartheta_1}{\sin \vartheta_2} = \frac{v_1}{v_2} .$$

Podíl rychlostí  $v_1, v_2$ , kterými se světlo šíří v obou prostředích je konstanta, kterou označujeme jako **index lomu** pro dané rozhraní optických prostředí. Kdyby první prostředí bylo vakuum,

pak  $v_1 = c$  a index lomu by byl v tomto případě

$$n = \frac{c}{v_2} = \frac{c}{v} .$$

Takto definovaný index lomu se nazývá **absolutní index lomu** druhého optického prostředí. Z předchozího vztahu vyplývá, že index lomu pro vakuum je roven přesně jedné. Všechna optická prostředí mají index lomu větší než jedna. Index lomu vzduchu se od jedničky liší až na čtvrtém desetinném místě a v praxi se proto zaokrouhluje na hodnotu jedna. Pro rozhraní vzduch, voda je  $n = 1,33$ , pro běžné druhy skla je hodnota indexu lomu v intervalu 1,45 až 1,65.

Jestliže se světlo šíří rychlostí  $v_1$  z optického prostředí s indexem lomu  $n_1$  do prostředí s indexem lomu  $n_2$ , v němž má rychlost  $v_2$ , platí vztah

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{c}{n_1} : \frac{c}{n_2} = \frac{n_2}{n_1} .$$

Dosadíme-li výsledek do pravé strany vyjádření zákona lomu, dostaneme výsledný tvar **zákonu lomu**

$$\frac{\sin \vartheta_1}{\sin \vartheta_2} = \frac{n_2}{n_1} \quad (5.1)$$

Zákon se po svém objeviteli nazývá **zákon Snellův**.

Podle zákona lomu nastává při přechodu světla z opticky řidšího do opticky hustšího (platí  $v_1 > v_2$ ) lom světla ke kolmici ( $\alpha > \beta$ ) a při přechodu z opticky hustšího prostředí do opticky řidšího prostředí nastává lom od kolmice ( $\beta > \alpha$ ). Je-li v tomto případě úhel dopadu větší než **mezní úhel**, dochází k **úplnému (totálnímu) odrazu**, kdy žádná část dopadajícího světla neproniká do druhého optického prostředí. Zobrazování lomem paprsků se využívá například při zobrazování čočkami.

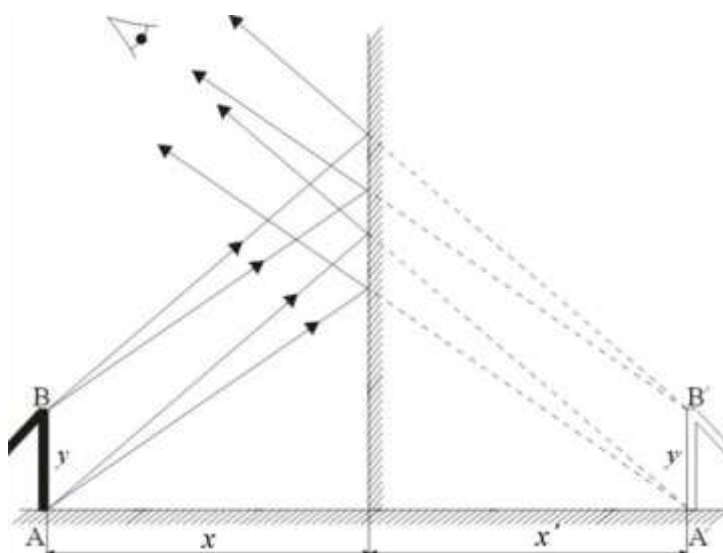
**Nezávislost chodu světelných paprsků** – při odrazu a lomu světla platí, že dopadající a odražený, dopadající a lomený paprsek můžeme vzájemně zaměnit. Světlo dopadající na rozhraní pod úhlem odrazu se odráží pod úhlem dopadu. Tento poznatek o záměnnosti chodu paprsků neplatí pouze pro odraz a lom světla, ale je obecným zákonem paprskové optiky.

**Zobrazování odrazem - pomocí zrcadel**

Ve zobrazovacích soustavách se používají zrcadla rovinná, kulová (sférická), parabolická nebo obecného tvaru (asférická).

### Zobrazení rovinnými zrcadly

Obraz vytvořený rovinným zrcadlem je vždy zdánlivý, přímý a má stejnou velikost jako předmět. Obraz je souměrný s předmětem podle roviny zrcadla a stranově převrácený. Konstrukce obrazu vytvořeného rovinným zrcadlem je znázorněna na obr. 5.3.



Obr. 5.3

### Zobrazování kulovými zrcadly

Pro zobrazování kulovými zrcadly má zvláštní význam přímka procházející středem křivosti  $C$  a vrcholem  $V$  zrcadla. Nazývá se **optická osa**

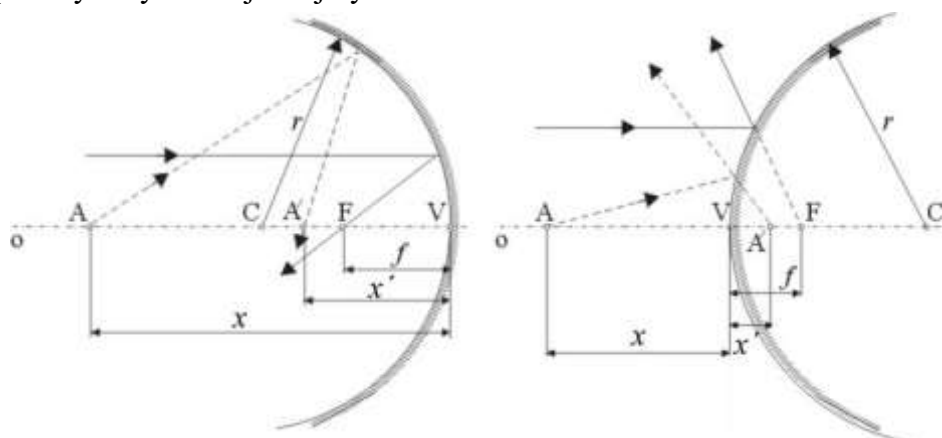
zrcadla, vzdálenost  $r = |CV|$  je **poloměr křivosti** zrcadla. Úsečku  $CV$  půlí bod  $F$ , který se nazývá **ohnisko zrcadla**. Vrchol  $V$  je v tomto případě totožný se středem optické soustavy. Při zobrazování kulovými zrcadly mají zvláštní význam paprsky **procházející středem křivosti  $C$ , procházející ohniskem  $F$  a rovnoběžné s optickou osou**. Paprsky, které procházejí středem křivosti  $C$ , dopadají na zrcadlo kolmo a odrážejí se zpět do bodu  $C$ . Paprsky, které procházejí ohniskem  $F$ , se odrážejí jako paprsky rovnoběžné s optickou osou zrcadla a naopak paprsky dopadající rovnoběžně s optickou osou se odrážejí do ohniska. Vzdálenost ohniska  $F$  od vrcholu kulového zrcadla  $V$  je **ohnisková vzdálenost  $f$** . Pro  $f$  platí  $f = |FV| = \frac{r}{2}$ . Vyznačení zá-

kladných bodů a přímek pro duté zrcadlo je na obr. 5.4 a, pro vypuklé zrcadlo na obr. 5.4 b.

**Zobrazovací rovnice** kulového zrcadla má tvar

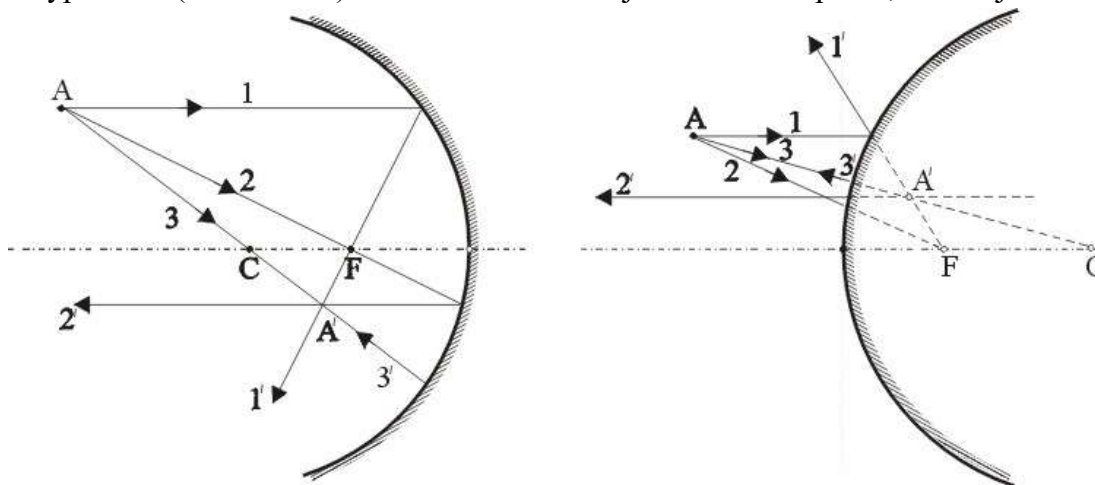
$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x'} = \frac{2}{r} = \frac{1}{f} \quad (5.2)$$

Význam použitých symbolů je zřejmý z obr. 5.4.



Obr. 5.4 a, b

Tento tvar zobrazovací rovnice platí za předpokladu dodržení znaménkové dohody. Připomeňme, že znaménková konvence platí i pro poloměr zrcadla. V případě zobrazeném na obr. 5.4 a se všechny veličiny měří proti chodu paprsků, a proto jsou  $x, x', f, r$  záporné. V případě vypuklého (konvexního) zrcadla na obr. 5.4 b je veličina  $x$  záporná, ostatní jsou kladné.



Obr. 5.5 a,b

Na obr. 5.5 a, b je naznačena konstrukce tří význačných paprsků pro duté a vypuklé zrcadlo, bod  $A$  označuje předmět, bod  $A'$  označuje jeho obraz.

Zvětšení  $Z$  je určeno vztahem

$$Z = \frac{y'}{y} = -\frac{x'}{x} \quad , \quad (5.3)$$

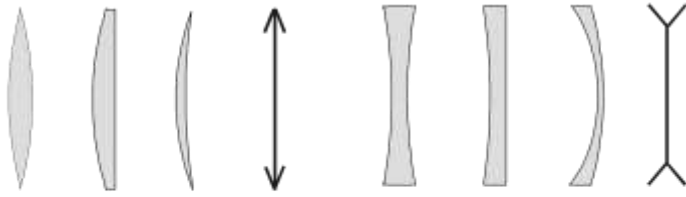
kde  $y', y$  jsou výška obrazu a předmětu. V soulase se znaménkovou konvencí platí, že kladné znaménko u zvětšení znamená, že **obraz je přímý**, tj. stejně orientovaný jako předmět. Záporné znaménko zvětšení přísluší **převrácenému obrazu**.

S pomocí obr. 5.3 ověříme platnost zobrazovací rovnice pro rovinné zrcadlo. V případě rovinného zrcadla platí  $r \rightarrow \infty$ , po dosazení této hodnoty do (5.2) dostáváme rovnost  $x = -x'$  a ze vztahu (5.3) pak plyne  $Z = 1$ . V soulase s obr. 5.3 platí, že obraz je přímý a předmět a obraz jsou souměrně sdružené podle roviny zrcadla.

### Zobrazování pomocí čoček

Čočky jsou optické prvky tvořené transparentním prostředím (sklo, plast), ohraničeným dvěma obvykle kulovými plochami. Paprsky dopadající na čočky se na těchto hraničních plochách lámou a proto se zobrazení čočkami řídí zákonem lomu. Čočky dělíme na dvě hlavní skupiny podle způsobu, kterým ovlivňují dopadající svazky paprsků.

**Spojky** – rovnoběžné paprsky se po průchodu čočkou sbíhají.

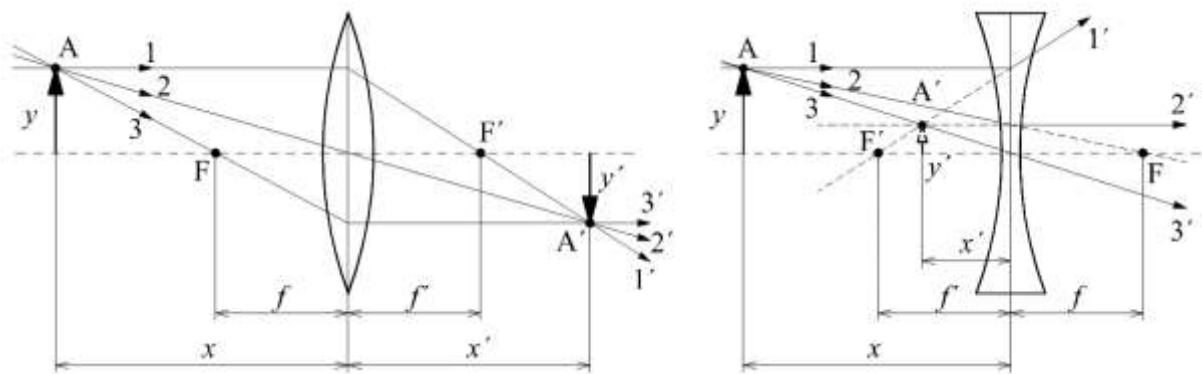


Obr. 5.6

**Rozptylky** – rovnoběžné paprsky se po průchodu čočkou rozbíhají. Předmětový a obrazový prostor je na opačných stranách čočky. Skutečný obraz se vytvoří za čočkou, zdánlivý obraz pozorujeme v té části prostoru, kde je předmět.

Rozdělení čoček podle tvaru je na schématu na obr. 5.6. V pořadí odleva: dvojbypuklá spojka, ploskovypuklá, dutovypuklá, schématické znázornění tenké spojky, dvojdutá rozptylka, ploskodutá, vypuklodutá, schématické znázornění tenké rozptylky.

Pro zobrazování čočkami se opět používají tři významné paprsky, jejichž průchod spojkou a rozptylkou je zobrazen na obr. 5.7 a, b.



Obr. 5.7 a, b

**Paprsek rovnoběžný s optickou osou** se láme po průchodu spojkou do obrazového ohniska  $F'$ , po průchodu rozptylkou pokračuje tak, jakoby vycházel z obrazového ohniska (prodloužený paprsek prochází ohniskem  $F'$  – paprsek č. 1').

**Paprsek procházející optickým středem** nemění svůj směr (paprsek č. 3').

**Paprsek procházející předmětovým ohniskem  $F$** , v případě rozptylky směřující do předmětového ohniska  $F$ , se láme rovnoběžně s optickou osou (paprsek č. 2').

Optické vlastnosti čoček se charakterizují veličinou **optická mohutnost**  $\varphi$ , která je definována vztahem

$$\varphi = \frac{1}{f'} \quad (5.4)$$

kde  $f'$  je obrazová ohnisková vzdálenost čočky. Rozměr optické mohutnosti je  $[\varphi] = \text{m}^{-1}$ .

Jednotkou optické mohutnosti je dioptrie (D). V soulase se znaménkovou konvencí platí, že spojky mají optickou mohutnost kladnou, rozptylky mají optickou mohutnost zápornou.

Pro čočku platí obdobné vztahy jako pro zrcadlo. **Zobrazovací rovnici pro čočky** lze odvodit podle obr. 5.7 z podobnosti trojúhelníků. Rovnice má tvar

$$\frac{1}{x'} - \frac{1}{x} = \frac{1}{f'} \quad (5.5)$$

a vztah pro příčné zvětšení  $Z$  je dán relací

$$Z = \frac{y'}{y} = \frac{x'}{x} . \quad (5.6)$$

Připomínáme, že musíme respektovat dohodnutou znaménkovou konvenci. Např. předmětová ohnisková vzdálenost  $f$  spojek se měří od čočky proti směru chodu paprsků a je proto záporná. U rozptylek leží obrazové ohnisko před čočkou a jejich obrazová ohnisková vzdálenost  $f'$  je proto záporná. Analogická pravidla platí pro souřadnice předmětů a obrazů.

V praxi používané čočky mají **barevnou a otvorovou vadu (aberaci)**. Otvorová vada způsobuje, že široký svazek paprsků se láme tak, že jeho obrazem není bod, ale ploška, a obraz proto není ideálně ostrý. Barevná vada je způsobena tím, že velikost úhlu lomu závisí na vlnové délce světla. Uvedené vady lze do značné míry potlačit vhodnými kombinacemi čoček zhotovenými z materiálů s odlišnými hodnotami indexu lomu.

### 5.3 Optické přístroje

Všechny optické přístroje jsou optické soustavy, které jsou většinou složeny z více optických prvků. Využívají základní principy zobrazování optickými soustavami, zejména platnost zákona odrazu a zákona lomu.

Nejjednodušším optickým přístrojem je **lupa**. Je to spojná čočka s malou ohniskovou vzdáleností. Předmět se umísťuje mezi čočku a ohnisko a lupa proto vytváří obraz přímý, zdánlivý, zvětšený.

**Mikroskop** je optická soustava určená k pozorování malých předmětů. Skládá se z objektivu a okuláru, zvětšení je maximálně 1500x. Omezení v hodnotě zvětšení je dáno vlastnostmi světla (dochází k ohybu světla) a vadami čoček. Mikroskopem nelze pozorovat objekty, jejichž velikost je řádově menší než vlnová délka světla.

Objektiv je spojka, která vytváří obraz skutečný, převrácený, zvětšený. Obraz se pozoruje okulárem, což je spojka použitá jako lupa, takže vznikne obraz zdánlivý, zvětšený, přímý. Vzdálenost mezi obrazovým ohniskem objektivu a předmětovým ohniskem okuláru se nazývá optický interval. Zvětšení mikroskopu je přibližně dané součinem zvětšení objektivu a okuláru.

**Dalekohled** zvětšuje zorný úhel při pozorování vzdálených předmětů. Skládá se z objektivu a okuláru. Zvětšení je dáno poměrem ohniskových vzdáleností objektivu a okuláru. Některé dalekohledy používají i zrcadla.

#### Okno jako optická soustava

Optická soustava oka je tvořena čočkou spojku, která na sítnici vytváří obraz skutečný, převrácený a zmenšený. Oční čočka má proměnlivou ohniskovou vzdálenost. Tuto vlastnost, která umožňuje vytvářet na sítnici ostrý obraz různě vzdálených předmětů, nazýváme **akomodace**



**oka.** Vady oka jsou **krátkozrakost**, kdy se obraz vytváří před sítnicí a koriguje se brýlemi s čočkou rozptylkou a **dalekozrakost**, kdy se obraz vytváří za sítnicí a koriguje se brýlemi s čočkou spojkou.

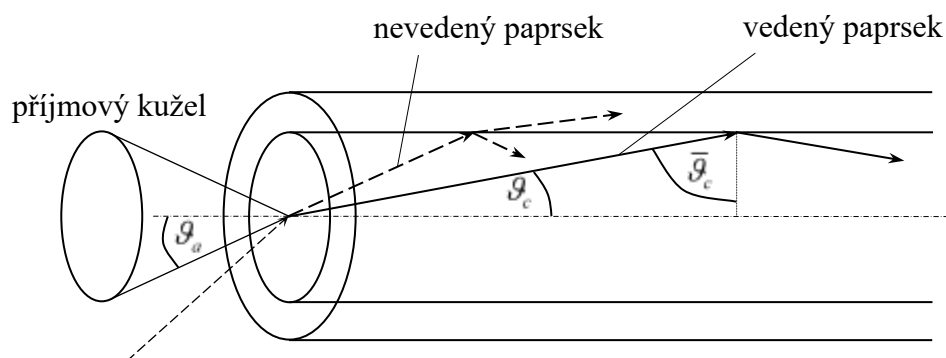
Jako **konvenční vzdálenost** označujeme délku 25 – 30 cm, což je optimální vzdálenost pro pozorování předmětů z hlediska únavy zraku. **Blízký bod** je nejkratší vzdálenost, kdy ještě bod vidíme ostře (6 – 8 cm). **Daleký bod** je nejvzdálenější bod, který oko vidí ostře bez akomodace. Pro oko bez vady je v nekonečnu.

## 5.4 Optická vlákna

Optické vlákno je v podstatě válcový dielektrický vlnovod zhotovený z materiálu, kterým se světlo šíří s nízkými ztrátami, například z křemenného skla. Je tvořeno vnitřním **jádrem**, které slouží k vedení přenášeného záření. Jádrem je uloženo ve vnějším obalu – **plášti** – jehož index lomu je nepatrně nižší než je hodnota indexu lomu jádra. Paprsky, které dopadají na rozhraní pláště a jádra pod úhlem větším než je mezní úhel, se totálně odrážejí a jsou jádrem vedeny, aniž by na rozhraní docházelo k jejich lomu do pláště. Paprsky dopadající na rozhraní pod menšími úhly než mezní se na rozhraní lámou a část přenášeného výkonu se po každém odrazu ztrácí do obalu. Tyto paprsky nejsou jádrem vedeny.

Vlákna se mohou lišit příčným profilem indexu lomu. Vlákno, které má největší hodnotu indexu lomu v ose jádra a tato hodnota směrem k plášti postupně klesá, se nazývají **gradientní vlákna**, zatímco běžná vlákna s konstantní hodnotou indexu lomu v jádře a plášti se nazývají **vlákna se skokovou změnou indexu lomu**.

Při vedení paprsku vláknem se uplatňuje i vlnová povaha světla. Tato skutečnost se projevuje tím, že paprsky šířící se vláknem spolu interferují a vláknem se mohou šířit pouze ty paprsky, které splňují podmínku konstruktivní interference. Tyto paprsky se označují jako **vidy** daného vlákna. Je-li poloměr jádra dostatečně malý, je tato podmínka splněna pouze pro jediný úhel dopadu a vláknem se může šířit pouze jediný vid a proto hovoříme o **jednovidovém vlákně**. Vlákna s větším poloměrem jsou **mnohovidová**. V odborné literatuře se můžete také setkat se starší terminologií, kdy se namísto slova vid používal termín **mód**.



Obr. 5.8

**Vedené paprsky.** Je-li úhel dopadu paprsku na rozhraní jádra a pláště větší než mezní úhel  $\vartheta_c = \arcsin(n_2/n_1)$ , kde  $n_1, n_2$  jsou indexy lomu jádra (pláště), dojde k totálnímu odrazu a paprsek se jádrem šíří prostřednictvím mnohonásobných totálních odrazů. Takový paprsek se označuje jako **vedený paprsek**.

Paprsek dopadající do vlákna se stane vedeným, pokud bude ve vlákně svírat s jeho osou úhel  $\vartheta$ , který je menší než mezní úhel  $\vartheta_c$ , jak je vidět z obr. 5.8. S použitím Snellova zákona pro rozhraní vzduch-jádro můžeme vyjádřit vztah mezi úhlem dopadu  $\vartheta_a$  ve vzduchu a úhlem lomu  $\vartheta_c$  v jádře rovnicí

$$\frac{\sin \vartheta_a}{\sin \vartheta_c} = \frac{n_1}{1}, \quad (5.7)$$

kde  $n_1$  je ve shodě s dřívějším označením index lomu jádra. Odtud dále dostaneme vztahy

$$\sin \vartheta_a = n_1 \sqrt{1 - \cos^2 \vartheta_c} = n_1 \sqrt{1 - \sin^2 \vartheta_c} = n_1 \sqrt{1 - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2} = (n_1^2 - n_2^2)^{\frac{1}{2}} \quad (5.8)$$

Úhel  $\vartheta_a$  je možno z předchozího vztahu vyjádřit relací

$$\vartheta_a = \arcsin NA, \quad (5.9)$$

kde  $NA = (n_1^2 - n_2^2)^{\frac{1}{2}}$  je **numerická apertura** vlákna. Tedy  $\vartheta_a$  je aperturním úhlem, který určuje kužel, ve kterém leží vnější dopadající paprsky, jež budou vláknem vedeny. Numerická apertura tedy vyjadřuje schopnost vlákna přijímat a vést světlo. Vláknem s větší aperturou má větší schopnost přijímat světlo. Hodnota příjmového úhlu (numerická apertura) je rozhodujícím parametrem při návrhu systémů pro vstup světelného paprsku do vlákna.

V současné době jsou již dosahovány extrémně nízké ztráty přenášeného výkonu, například ve skleněném vlákně délky 1 km dochází ke ztrátě asi 3,6 % celkového přenášeného výkonu (útlum 0,16 dB). Optická vlákna proto umožňují nahradit koaxiální měděné kabely dosud používané při přenosu elektromagnetických vln. Kromě nižší ceny je podstatnou výhodou skleněných vláken jejich přenosová kapacita. Teoretická šířka frekvenčního pásma přenášeného optickým kabelem je 50 THz, tj. 50 milionů MHz. Přitom televizní signál vyžaduje pásmo o šířce 6 MHz, telefonní hovor asi 10 kHz. Proto lze jedním vláknem současně přenášet mnoho signálů.

V souvislosti s tím jak roste popularita optických vláken, začínají vlákna pronikat i do jiných odvětví a neomezují se jen na optické komunikace, pro které byla původně určena. Zjistilo se, že optická vlákna lze využít nejen pro přenos informace, ale například i pro snímání veličin. V řídicí a regulační technice pracuje mnoho senzorů na principu optických vláken. Tímto způsobem jsou měřeny různé veličiny, vyhodnocovány vlastnosti látek, snímána poloha předmětů atd.

## Příklady ke kap. 5

### Příklad 5.1

Světelný paprsek dopadá na planoparalelní skleněnou desku o tloušťce  $d = 20$  mm pod úhlem  $\alpha = \frac{\pi}{4}$ . Index lomu skla je  $n = 1,5$ . Paprsek projde deskou tak, že vystupující paprsek je rovnoběžný s dopadajícím paprskem, ale oba paprsky jsou navzájem rovnoběžně posunuty o vzdálenost  $x$ . Určete velikost tohoto posunu.

#### Řešení:

Ze Snellova zákona vyplývá, že dopadající paprsek se láme pod úhlem  $\beta$  splňujícím rovnici

$\sin\alpha = n\sin\beta$ . Délka dráhy  $y$  paprsku ve skle je dána vztahem  $y = \frac{d}{\cos\beta}$ . Z jednoduché

geometrické úvahy vyplývá, že posun  $x$  vypočteme ze vztahu  $x = d \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} - \beta\right)}{\cos\beta}$ .

Po dosazením číselných hodnot dostáváme:  $\beta \doteq 28,13^\circ$  a velikost posuvu  $x \doteq 6,58$  mm.

### Příklad 5.2

Předmět je umístěn ve vzdálenosti  $l = 1,8$  m před stínítkem. Tenká spojka umístěná mezi předmět a stínítko má zobrazit předmět na stínítko se zvětšením  $Z = -2$ . Určete: a) ohniskovou vzdálenost  $f'$  spojky, b) vzdálenost  $x$  čočky od předmětu.

#### Řešení:

Načrtněte si schéma zobrazení podle obr. 5.7 a). Platí:  $l = x' - x$ , podle (5.6)  $\frac{x'}{x} = Z$  a ze zob-

razovací rovnice  $x = f' \frac{(1-Z)}{Z}$ . Po úpravě a dosazení vypočítáte výsledky z rovnic: a)

$$f' = -\frac{Z}{(1-Z)^2} l = -\frac{(-2)}{(1-(-2))^2} \cdot 1,8 = 0,4 \text{ m, b) } x = -\frac{l}{1-Z} = -\frac{1,8}{1-(-2)} = 0,6 \text{ m.}$$

### Příklad 5.3

Duté zrcadlo má poloměr křivosti  $r = -0,35$  m. Určete vzdálenost  $x$  předmětu od vrcholu zrcadla, má-li být zobrazen se zvětšením  $Z = 2,5$ .

#### Řešení:

Pro řešení použijeme obr. 5.4 a) a rovnice (5.2) a (5.3). Znaménko zvětšení je kladné, tj. obraz je přímý. Z uvedených rovnic vyjádříme vzdálenost předmětu od vrcholu zrcadla

$$x = \frac{r(Z-1)}{2Z} = -0,105 \text{ m.}$$

#### Příklad 5.4

Index lomu jádra optického vlákna z křemenného skla je  $n_1 = 1,415$ , index lomu pláště je o 1% nižší, tj.  $n_2 = 1,400$ . Určete numerickou aperturu NA vlákna a mezní úhel dopadu ze vzduchu  $\vartheta_a$ .

#### Řešení:

Použijeme vztahy (5.8) a (5.9)

$NA = 0,198$  ,  $\vartheta_a \doteq 11,4^\circ$ .

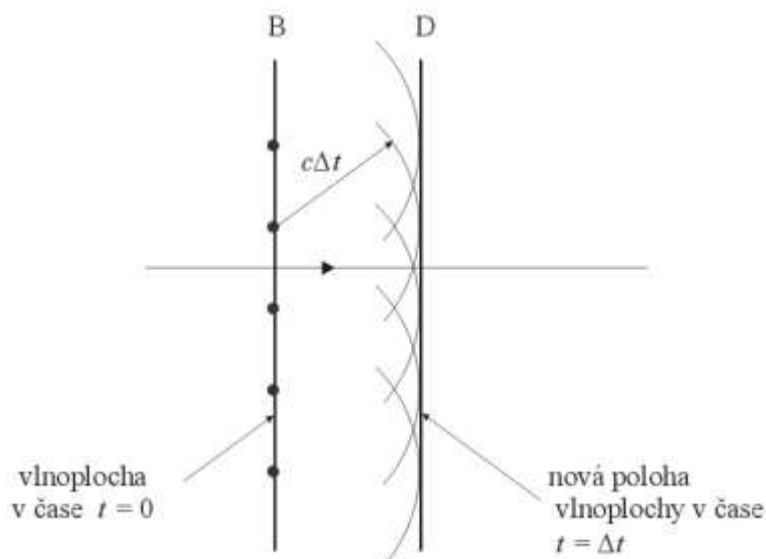
## 6. Vlnová optika

**Vlnová optika** je obor optiky, který studuje vlastnosti světla na základě jeho vlnové podstaty jako elektromagnetického vlnění. Omezíme-li se na viditelné záření (zkratka VIS), jde o záření s vlnovými délkami 0,35 až 0,75  $\mu\text{m}$ . Obecně se vlnová optika zabývá i infračerveným (IR) a ultrafialovým zářením (UV), tj. vlněním s vlnovými délkami v rozsahu 1 nm až 1 mm.

### 6.1 Základní pojmy a veličiny vlnové optiky

V tomto úvodním článku zavedeme základní veličiny a pojmy, které používá vlnová optika. S některými z nich jsme se setkali již v předcházejících kapitolách.

Šíření světla v prostoru se řídí Huygensovým principem. V nejjednodušším případě bodového zdroje světla a opticky homogenního prostředí se světlo šíří v kulových vlnoplochách, jejichž poloměr roste se vzdáleností od zdroje. V místech dostatečně vzdálených od zdroje lze poloměr vlnoploch považovat za nekonečný a vytčenou část vlnoplochy lze považovat za část roviny. Takovou vlnu označujeme jako **rovinnou vlnu** (obr. 6.1).



Obr. 6.1

Šíření světelných vln prostorem je popsáno periodickými funkcemi, které jsou periodické nejen v závislosti na čase, ale i na prostoru. Časovou periodičnost vlnění charakterizuje jeho **perioda**  $T$  nebo jeho **frekvence**  $\nu$ , případně **úhlová frekvence**  $\omega$ . Platí relace

$$T = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{\omega} \quad (6.1)$$

Prostorovou periodičnost vlnění charakterizuje **vlnová délka**  $\lambda$ . Je to nejmenší vzdálenost dvou bodů na též paprsku, v nichž se fáze vlny v daném okamžiku liší o  $2\pi$ . Vlnová délka je rovna vzdálenosti, kterou vlna urazí za dobu jedné periody. Převrácená hodnota vlnové délky se nazývá **vlnočet**  $\sigma$ .  $2\pi$  násobek vlnočtu se nazývá **vlnové číslo** a je to velikost vlnového vektoru, značí se  $k$ . Platí relace

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = 2\pi\sigma = \frac{\omega}{c} \quad (6.2)$$

Pro zjednodušení budeme dále pracovat pouze s **harmonickým vlněním**. V našem případě jde o šíření vektoru intenzity elektrického pole, jehož velikost  $E(\vec{r}, t)$  je popsána funkcí sinus, popřípadě kosinus. Pro popis jednorozměrného šíření velikostí vektoru elektrického pole  $E(x, t)$  proto budeme používat funkci

$$E(x, t) = E_0 \sin(kx - \omega t) \quad , \quad (6.3)$$

kde  $E_0$  je **amplituda velikosti vektoru**  $\vec{E}$  a veličina  $\varphi = kx - \omega t$  je **fáze vlnění** v daném místě a čase. Protože taková vlna je charakterizovaná jedinou úhlovou frekvencí  $\omega$ , budeme jí nazývat **monochromatická** vlna. Lze namítnout, že omezením na harmonické vlnění se zbavujeme možnosti popisovat vlnění charakterizované nějakou obecnou neharmonickou periodickou funkcí. Není to však pravda, protože každou reálnou periodickou funkcí  $f(t)$  s periodou  $T$  lze rozvést do nekonečné trigonometrické řady zvané **Fourierova řada**. Tato řada má tvar

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t) \quad , \quad (6.4)$$

kde  $a_0, a_n, b_n$  jsou reálné koeficienty této řady a  $\omega_0 = 2\pi/T$ . Fourierovy řady převádějí obecnou periodickou funkci na součet harmonických funkcí, a proto šíření vlnění charakterizovaného obecnou periodickou funkcí lze vždy převést na šíření vlnění daného součtem harmonických vln.

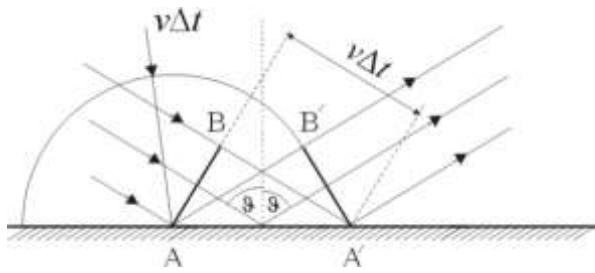
Světlo je příčné elektromagnetické vlnění popsané kmity vektorů  $\vec{E}$  a  $\vec{B}$ , které jsou kolmé ke směru šíření vlnění i k sobě navzájem (odstavec 4.2). Další charakteristikou světelného vlnění je proto směr kmitání těchto paprsků, který charakterizuje **polarizace vlnění**. Dohodou je stanoveno, že za **polarizační rovinu** světelného vlnění považujeme rovinu určenou směrem vektoru  $\vec{E}$  a směrem šíření. Podrobněji se o polarizaci světla zmíníme v odstavci 6.8.

## 6.2 Odraz a lom světla

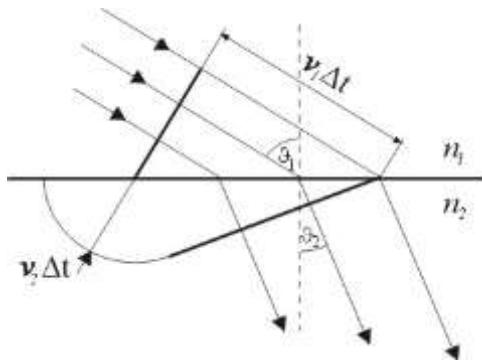
Uvažujme dvě izotropní průhledná (neabsorbující) prostředí o indexech lomu  $n_1$  a  $n_2$  oddělená rovinným rozhraním. V těchto prostředích se světlo šíří fázovými rychlostmi  $v_1, v_2$ . Označíme-li  $c$  rychlost světla ve vakuu, platí vztahy

$$n_1 = \frac{c}{v_1}, \quad n_2 = \frac{c}{v_2} \quad . \quad (6.5)$$

Na rozhraní dopadá z prostředí o indexu lomu  $n_1$  monochromatická rovinná světelná vlna tak, že její směr svírá v místě dopadu s normálou roviny rozhraní úhel  $\vartheta_1$ . V obecném případě se dopadající vlna na rozhraní rozdělí na vlnu odraženou zpět do prostředí s indexem lomu  $n_1$  a vlnu lomenou pod úhlem  $\vartheta_2$  do prostředí s indexem lomu  $n_2$ . Odraz probíhá podle obr. 6.2 tak,



Obr. 6.2



Obr. 6.3

že vlnoplocha  $AB$  postupně dospívá k rozhraní, každý bod rozhraní se podle Huygensova principu stává středem nové elementární vlnoplochy, vlna se šíří zpět rychlostí  $v_1$  a výsledná vlnoplocha je obálkou těchto elementárních vlnoploch. Směr šíření odražené vlny určuje **zákon odrazu** (odstavec 5.2). Podobným způsobem lze podle obr. 6.3 konstruovat i lomenou vlnu. I v tomto případě se každý bod rozhraní stává středem elementární vlnoplochy, která se šíří rychlostí  $v_2$  do prostředí s indexem lomu  $n_2$ . Výsledná vlnoplocha jako obálka těchto elementárních vlnoploch se v tomto prostředí se šíří pod úhlem lomu  $\vartheta_2$ , který je dán **zákonem lomu (Snellovým zákonem)**, odstavec 5.2.

Vlnová optika neřeší pouze tyto geometrické zákonitosti šíření světla, ale odpovídá také na otázky o rozdělení energie mezi

vlnu odraženou a lomenou v závislosti na indexech lomu  $n_1, n_2$ , na úhlu dopadu  $\vartheta_1$  a na polarizaci dopadající vlny vzhledem k rovině dopadu. S využitím Maxwellových rovnic lze provést rozbor chování vektorů  $\vec{E}$  a  $\vec{B}$  popisujících světelnou vlnu při průchodu rozhraním. Výsledkem tohoto značně komplikovaného postupu je soubor relací nazývaných **Fresnelovy vztahy**, které určují poměry mezi amplitudami odražené a lomené vlny s ohledem na jejich polarizaci. Fresnelovy vztahy jsou dosti složité a z jejich podrobné analýzy lze pro chování světelných vln na rozhraní vyvodit řadu obecných závěrů. Uvedeme některé z nich, které použijeme v dalších odstavcích :

1. Dopadající a lomená vlna kmitají se stejnou fází. Při lomu světla se fáze vlny nemění.
2. Při odrazu na prostředí opticky řidším ( $n_1 > n_2$ ) se fáze odražené vlny nemění.
3. Při odrazu na prostředí opticky hustším ( $n_1 < n_2$ ) a malém úhlu dopadu  $\vartheta_1$  se fáze odražené vlny mění o  $\pi$ .

Na závěr tohoto odstavce ještě uvedeme, že při popisu jevů souvisejících s vlnovou povahou světla se v dalších odstavcích zaměříme pouze na elektrickou složku světelných vln. Je to zcela dostačující, protože v daných podmínkách kmitá magnetická složka se stejnou fází jako elektrická, není od této složky oddělitelná a vzájemný vztah těchto složek již známe (odstavec 4.2). Obě složky jsou pro popis světelné vlny rovnocenné a elektrické složce dáváme přednost z toho důvodu, že ji vnímáme zrakem, má fotochemické účinky (fotografie), působí na polovodičové fotosenzitivní prvky atd. Amplitudu vektoru  $\vec{E}$  dopadající vlny označíme  $E_0$ , amplitudu odražené vlny  $E_r$  a amplitudu lomené vlny  $E_l$ . Z hlediska vnímání světelné vlny zrakem i z hlediska měření světla fotosenzitivními prvky nebo fotografickými účinky má rozhodující význam nikoli amplituda, ale **intenzita světelné vlny**. V odstavci 4.3 jsme ukázali, že intenzita

světelné vlny a tím i výkon přenášený světelnou vlnou jsou **úměrné druhé mocnině amplitudy** vlny. Rozdělení energie mezi odraženou a lomenou vlnu na rozhraní charakterizují veličiny reflektance a transmitance.

**Reflektance**  $R$  (činitel odrazu, odrazivost) je poměr výkonu  $P_r$  odraženého optického záření a výkonu  $P_0$  záření dopadajícího na rozhraní. Platí relace

$$R = \frac{P_r}{P_0} = \frac{E_r^2}{E_0^2} . \quad (6.6)$$

**Transmitance**  $T$  (činitel prostupu, prostupnost) je poměr výkonu  $P_t$  záření prošlého rozhraním a výkonu  $P_0$  záření dopadajícího na rozhraní. Platí relace

$$T = \frac{P_t}{P_0} = \frac{E_t^2}{E_0^2} . \quad (6.7)$$

### 6.3 Interference světla

**Interferenci světla** rozumíme skládání (superpozici, překrývání) dvou nebo více světelných svazků. Výsledkem interference je svazek, jehož intenzita není prostým součtem intenzit interferujících svazků, ale jehož intenzita závisí na rozdílech fází interferujících svazků. Aby mohlo k interferenci světla dojít, musí být splněny následující požadavky:

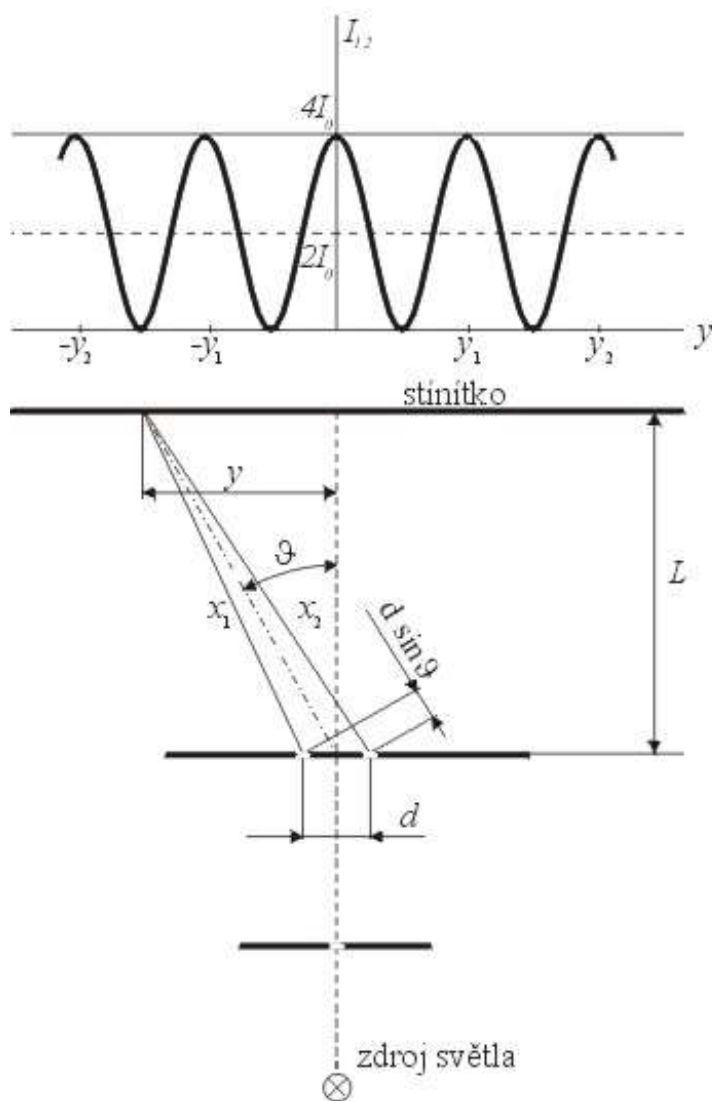
1. Zdroje světelných svazků musí být **monochromatické** nebo alespoň **kvazimonochromatické**, tj. musí vyzařovat světlo buď shodné vlnové délky nebo v úzkých vlnových rozsazích, které se navzájem překrývají.
2. Interferující svazky se musí překrývat tak, aby bylo umožněno vektorové sčítání elektrických a magnetických složek těchto světelných svazků (např. při rovnoběžném nebo téměř rovnoběžném šíření svazků).
3. Zdroje světelných svazků musí být **koherentní**, tj. musí vyzařovat světlo s konstantním fázovým rozdílem.

První a druhý předpoklad nevyžadují podle našeho názoru podrobnější vysvětlení, ale pozornost je třeba věnovat předpokladu třetímu. Klasické zdroje světla jako žárovky nebo výbojky emitují světlo na základě přechodu elektronů v elektronových obalech atomů z vyšších do nižších energetických stavů. Délka trvání těchto přechodů je řádově  $10^{-8}$  až  $10^{-7}$  s, tyto děje v jednotlivých atomech jsou navzájem nezávislé a proto probíhají zcela náhodně. Z toho důvodu se fázové rozdíly mezi světelnými svazky ze dvou nebo více různých zdrojů také mění zcela náhodně, a jejich světlo není koherentní. Do značné míry koherentní svazky můžeme ale získat tak, že svazek z jednoho zdroje rozdělíme na dva nebo více svazků a ty necháme spolu interferovat. I v tomto případě ale platí, že koherence se zachovává pouze po dobu emise světla ze stejných atomů, tj.  $10^{-8}$  až  $10^{-7}$  s. Na rozdíl od klasických zdrojů, moderní zdroje světla, lasery, emitují světlo na základě řízeného přechodu elektronů z vyšších do nižších energetických stavů,



takže doba emise koherentního světla se prodlužuje o několik řádů. Použití laserů tak značně rozšířilo možnosti interferometrie. K problematice koherence se vrátíme ještě v odstavci 6.5. Princip interference lze názorně demonstrovat na **dvoušterbinovém experimentu**. Schéma experimentálního zařízení je na obr. 6.4.

Světlo z monochromatického zdroje dopadá na přepážku s úzkou šterbinou, ta se tak stává zdrojem světelné vlny válcového tvaru, kterou lze v dostatečně velké vzdálenosti od šterbinu považovat za koherentní rovinnou vlnu. Vlna dopadá na druhou přepážku se dvěma úzkými rovnoběžnými šterbinami ve vzdálenosti  $d$ . Šterbinu se stávají zdroji dvou koherentních vln, které v prostoru za šterbinami interferují. Necháme-li vlny dopadnout na stínítko umístěné v dostatečně velké vzdálenosti  $L \gg d$ , pozorujeme na něm interferenční obrazec sestávající ze světlých a tmavých proužků. Tento jev vysvětlujeme takto: Na místo ležící ve vzdálenosti  $y \ll L$  od osy soustavy dopadají paprsky, jejichž optická dráha se liší o **dráhový rozdíl**



Obr. 6.4

$$\Delta x = x_2 - x_1 = d \sin \vartheta \approx \frac{yd}{L}$$

.(6.8)

Přibližný vzorec (6.8) platí pro malé úhly  $\vartheta$ , kdy  $\sin \vartheta \doteq \text{tg } \vartheta = y/L$ . Výsledná intenzita elektrického pole  $E_{12}$  interferujících paprsků je určena vztahem

$$E_{12} = E_1 + E_2 = E_0 \sin(kx_1 - \omega t) + E_0 \sin(kx_2 - \omega t). \quad (6.9)$$

Vztah (6.9) upravíme pomocí trigonometrických vztahů a dosazením za  $x_2 - x_1$  z rovnice (6.8) a po úpravě dostáváme pro závislost výsledné intenzity elektrického pole  $E_{12}$  na poloze  $y$  rovnici

$$E_{12} \approx 2E_0 \cos \frac{\pi d}{L\lambda} y \sin \left( \frac{kx_1 + kx_2}{2} - \omega t \right). \quad (6.10)$$

Časová a prostorová periodičita výsledné intenzity je určena funkcí sinus. Výsledná vlna má změněnou fázi, ale zachovává si původní úhlovou frekvenci  $\omega$  obou interferujících vln. Výsledná amplituda vlny je v čase stálá, ale závisí na poloze  $y$  na stínítku. Vzhledem k tomu, že výsledná intenzita světelné vlny je úměrná druhé mocnině amplitudy elektrické složky pole  $E_{12}$ , je i intenzita světelné vlny dopadající na stínítko periodicky závislá na  $y$  a platí rovnice

$$I_{12}(y) \approx 4I_0 \cos^2 \left[ \left( \frac{\pi d}{\lambda L} \right) y \right]. \quad (6.11)$$

Maximum intenzity světla (střed světlého proužku) nastává tehdy, když argument funkce kosinus ve vztahu (6.11) je sudým násobkem  $\pi/2$ . Polohy středů světlých proužků  $y_{\max}$  určuje relace

$$y_{\max} = m \frac{\lambda L}{d}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (6.12)$$

Číslo  $m$  udává řád maxima intenzity neboli **řád interferenčního maxima**.

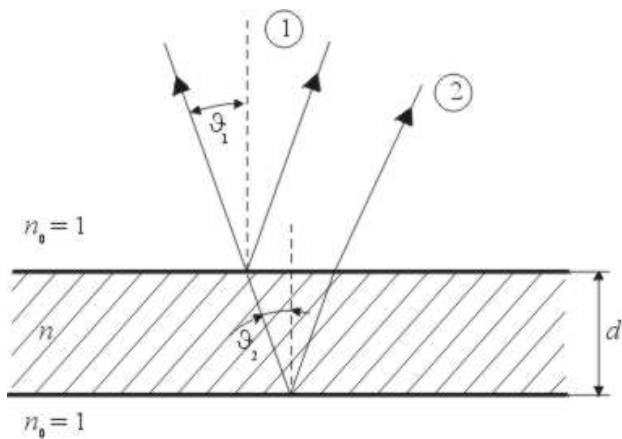
Minimum intenzity světla (střed tmavého proužku) nastává tehdy, když argument funkce kosinus ve vztahu (6.11) je lichým násobkem  $\pi/2$ .

Závislost intenzity světla na poloze  $y$  je zobrazena v horní části obr.6.4. Tento průběh funkce  $I_{12}(y)$  odpovídá skutečnosti pouze pro  $y \ll L$ . Pro větší vzdálenosti od osy se projeví snížení hodnoty  $I_0$  v důsledku zvětšující se vzdálenosti od štěrbin jako zdrojů světla. Proto klesá i rozdíl mezi maximy a minimy intenzity, tj. klesá kontrast interferenčního obrazce.

Ze vztahů (6.8) a (6.12) lze pro závislost výsledku interference na dráhovém rozdílu odvodit tento důležitý závěr:

**Interferenční maximum nastává tehdy, když dráhový rozdíl  $\Delta x$  interferujících svazků je celistvým násobkem vlnové délky  $\lambda$ .**

**Interferenční minimum nastává tehdy, když dráhový rozdíl  $\Delta x$  je lichým násobkem poloviny vlnové délky  $\lambda/2$ .**



Obr. 6.5

## 6.4 Interference na tenkých vrstvách

Interferenční jevy jsou v optice velmi intenzivně využívány. Jednak jsou vyvolávány záměrně v optických přístrojích, jednak jsou využívány jevy pozorovatelné v přírodě. Do této kategorie patří **interference na tenkých vrstvách**.

Na tenkou vrstvu průhledného materiálu, obr. 6.5, s indexem lomu  $n$  o tloušťce  $d$  dopadá pod velmi malým úhlem  $\vartheta_1$  světelná rovinná vlna s vlnovou délkou  $\lambda$ . Tloušťka vrstvy  $d$  je řádově shodná s vlnovou délkou  $\lambda$  a prostředí nad vrstvou i pod vrstvou je vzduch ( $n_0 \approx 1$ ). Na horním rozhraní se vlna dělí na odraženou vlnu ① a lomenou vlnu. Lomená vlna se na spodním rozhraní částečně láme a částečně odráží. Odražená vlna ② se vrací do prostředí nad vrstvou. Vlny ① a ② jsou navzájem koherentní, protože pocházejí ze stejného zdroje a čas, který lomená vlna potřebuje ke svému navrácení nad vrstvou je řádově kratší, než je trvání emise světla ( $10^{-8} - 10^{-7}$  s). Při přibližném výpočtu se pro jednoduchost omezíme na případ téměř kolmého dopadu. Vlna ① se odráží na rozhraní s prostředím opticky hustším, a proto se podle odstavce 6.2 její fáze mění o  $\pi$ , zatímco fáze lomeného paprsku se při odrazu na spodním rozhraní nemění. Ve srovnání s vlnou ① je optická dráha vlny ② delší o  $n$ - násobek vzdálenosti, kterou vlna urazila v tenké vrstvě, tj. o  $2nd$ . Fázovou změnu při odrazu na horním rozhraní můžeme do výpočtu zahrnout tak, že dráhový rozdíl zvětšíme nebo zmenšíme o  $\lambda/2$ . Výsledný dráhový rozdíl je dán relací

$$x_2 - x_1 = \Delta x = 2nd - \lambda/2 \quad . \quad (6.13)$$

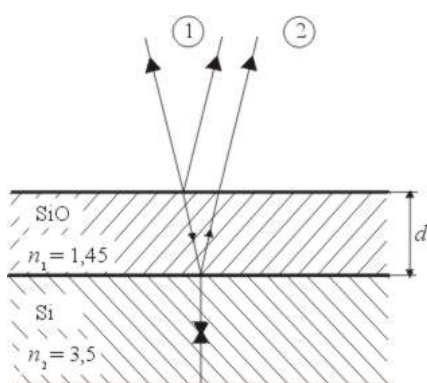
Podle závěru uvedeného na konci odstavce 6.3, intenzita výsledné vlny nabývá maxima pro všechna  $\Delta x$ , která jsou celistvým násobkem vlnové délky  $\lambda$ , tj. pro tloušťky  $d$  splňující relaci

$$d = \frac{\lambda}{2n} \left( m + \frac{1}{2} \right) \quad , \quad (6.14)$$

v níž  $m = 1, 2, 3, \dots$  opět označuje řád interferenčního maxima. Obdobně bychom mohli stanovit relaci pro  $d$ , při níž intenzita výsledné vlny nabývá minima.

Vztah (6.14) objasňuje, proč pozorujeme vznik barevných efektů na tenkých vrstvách tvořených mýdlovými bublinami nebo na olejových filmech na vodě. V obou případech se jedná o tenké vrstvy, které pozorujeme v určitém konečném rozsahu zorných úhlů. To má za následek, že se změnou zorného úhlu se postupně mění úhel  $\vartheta_1$  pro paprsky, které vidíme a tím i dráhové rozdíly (6.13). Podmínka interferenčního maxima (6.14) je tak postupně splňována pro jednotlivé vlnové délky obsažené ve spektru slunečního záření a na vrstvě pozorujeme duhové efekty.

Interference na tenkých vrstvách se v praxi používá například pro potlačení nebo naopak pro zesílení odražené složky světelných vln. Odraz od povrchu skleněných nebo plastových čoček optických soustav je většinou nežádoucí, protože snižuje podíl světla procházejícího soustavou. Na povrch optických prvků se proto nanášejí **antireflexní vrstvy**, což jsou soustavy tenkých vrstev, které v určitém intervalu vlnových délek potlačují odraz vln ve prospěch lomených vln. Zmíněný interval vlnových délek se obvykle volí v prostřední části spektra, tj. pro světlo žluté až zelené barvy. Povrch proto více odráží okrajové části spektra, tj. fialovou a červenou barvu, a tím se vysvětluje modropurpurová barva povrchu optických prvků.



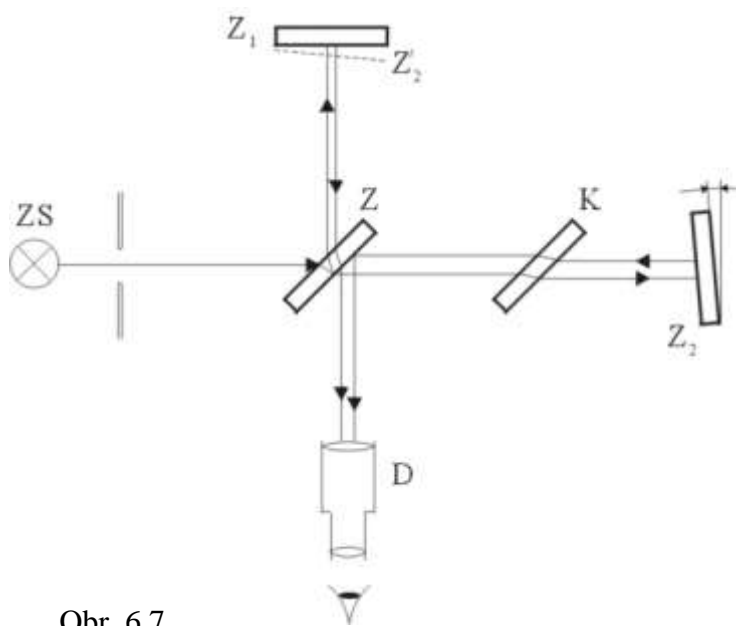
Obr. 6.6

Jako příklad uvedeme antireflexní vrstvu oxidu křemíku  $\text{SiO}_2$  nanesenou na křemíkový solární článek (obr. 6.6) s cílem maximálně potlačit ztráty odrazem slunečního záření od povrchu článku. Tloušťka tenké vrstvy  $d \approx 95 \text{ nm}$  byla zvolena tak, aby podmínka interferenčního minima byla splněna pro světlo s vlnovou délkou  $\lambda = 550 \text{ nm}$ , tj. pro vlnovou délkou, pro níž je účinnost přeměny solární energie v energii elektrickou maximální. Zatímco nepovlakovaný solární článek vykazuje ztrátu odrazem ve výši asi 30 %, antireflexní vrstva ji snižuje na hodnotu pod 10 %. Obdobné využití nalézají tenké vrstvy při aplikacích ve stavebnictví. Skleněné tabule se opatřují povlaky, které podle potřeby potlačují nebo zesilují odraz teplotního záření v infračerveném oboru a tím regulují množství tepla pro pouštěného okny do místností.

## 6.5 Interferometry

Interferometry jsou přístroje, které využívají interferenční jevy k měření fyzikálních veličin, např. malých změn délky, změn indexu lomu, spektrálního složení světelného záření atd. V interferometrech se primární světelný svazek rozděljuje na dva či více sekundárních světelných svazků. Jeden ze svazků prochází interferometrem beze změny (referenční svazek), zatímco druhý (měřicí svazek) prodělává určitou změnu projevující se změnou fáze. Po opětovném spojení svazky spolu interferují a je možno pozorovat změny intenzity výsledného svazku v závislosti na změně fáze měřicího svazku.

Nejjednodušší a současně nejdůležitější typ interferometru se podle jeho vynálezce nazývá **Michelsonův interferometr**. Schéma tohoto interferometru je na obr. 6.7. Skládá se z polopropustné desky Z, kompenzační desky K, pevného zrcadla  $Z_1$ , posuvného zrcadla  $Z_2$  a pozorovacího zařízení D. Pro vizuální pozorování se užívá dalekohled, v současné době je interferenční



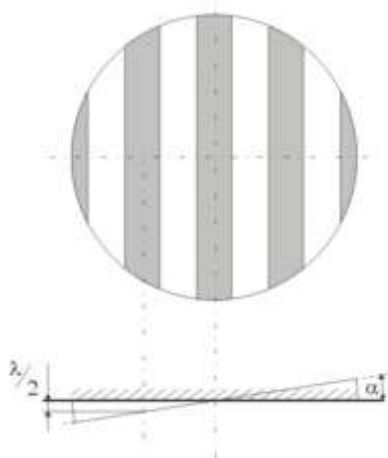
Obr. 6.7

obrazec vizualizován obvykle s pomocí CCD kamer. Primární svazek monochromatického světla s vlnovou délkou  $\lambda$  ze zdroje světla ZS vymezený clonou dopadá na polopropustné zrcadlo Z, na němž se dělí na dva svazky s přibližně poloviční intenzitou oproti primárnímu svazku. Referenční svazek se na polopropustném zrcadle odráží na zrcadlo  $Z_1$  a na něm se odráží zpět k Z a polovina je tímto polopropustným zrcadlem propuštěna do pozorovacího zařízení D. Měřící svazek prošlý Z prochází deskou K, dopadá na zrcadlo  $Z_2$ , odráží se od něj zpět na Z a polovina je ho od-

ražena rovněž do pozorovacího zařízení D. Oba svazky jsou koherentní, protože vznikly rozdělením jednoho svazku a v prostoru pozorovacího zařízení spolu interferují. Výsledek interference závisí na jejich dráhovém rozdílu  $\Delta x$  v souladu se závěrem odstavce 6.3. Označíme-li dráhový rozdíl pro interferenční maximum  $\Delta x_{\max}$  a pro interferenční minimum  $\Delta x_{\min}$ , platí vztahy

$$\Delta x_{\max} = m\lambda, \quad \Delta x_{\min} = (2m+1)\frac{\lambda}{2}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (6.15)$$

Předpokládejme, že měření s interferometrem provádíme ve vakuu nebo ve vzduchu ( $n \approx 1$ ), pak je geometrická dráha shodná s optickou dráhou. Posouváme-li zrcadlem  $Z_2$ , mění se optická dráha měřícího svazku o dvojnásobek posuvu a v pozorovacím zařízení se periodicky střídají maxima a minima intenzity interferujícího svazku. Jedné periodě (např. mezi dvěma sousedními maximy intenzity) odpovídá změna dráhového rozdílu o  $\lambda$ , tj. posuv zrcadla  $Z_2$  o vzdálenost  $\lambda/2$ . Protože přesné měření maxima intenzity je obtížné, používá se tato úprava: Jedno ze zrcadel, např.  $Z_2$ , natočíme o malý úhel  $\alpha$ . Opticky tato situace odpovídá odrazu měřícího svazku na zrcadle  $Z'_2$ .

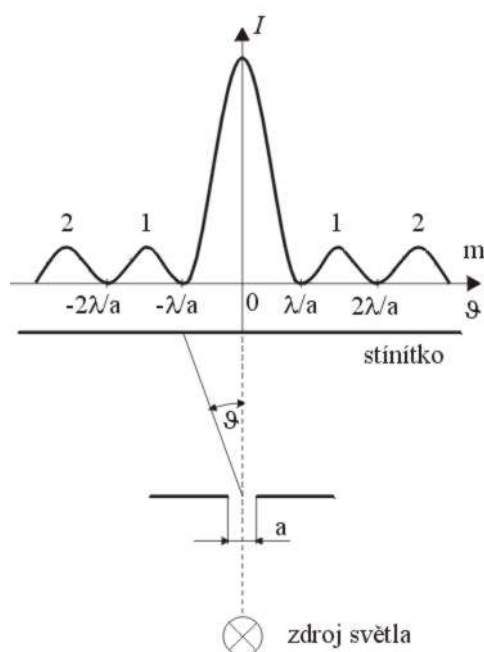


Obr. 6.8

Výsledkem této úpravy je, že podle obr. 6.8 se dráhový rozdíl v průřezu svazku mění, a protože každou část dráhy prochází světelný svazek dvakrát, způsobuje změna o polovinu vlnové délky změnu dráhového rozdílu o celou vlnovou délku. V interferenčním poli proto pozorujeme systém proužků, jejichž hustotu lze měnit změnou úhlu náklonu  $\alpha$ . Posouváme-li zrcadlem  $Z_2$  ve směru nebo proti směru chodu světelného svazku, posouvá se interferenční obraz kolmo na směr proužků tak, že posuv zrcadla o  $\lambda/2$  způsobí posuv interferenčního obrazce o jednu periodu, tj. např. určitý tmavý pruh se posune na místo nejbližšího sousedního tmavého pruhu. Z počtu proužků prošlých zvolným místem pozorovacího pole lze určit posuv zrcadla  $Z_2$ .

Dráhový rozdíl mezi referenčním a měřícím svazkem v Michelsonově interferometru nemůže být libovolně velký, protože interferující svazky musí splňovat předpoklad koherence, o kterém jsme se zmínili v odstavci 6.3. Jestliže koherentní svazky získáváme rozdělením primárního svazku, jako tomu je v případě Michelsonova interferometru, zachovává se koherence po dobu emise světla ze zdroje. Emitované světlo je složeno ze světla emitovaného z velkého množství atomů, přičemž se jedná o navzájem nezávislé děje řídicí se statistickými zákony. Charakteristické veličiny světla (intenzita, rovina polarizace aj.) proto vykazují určité fluktuace. Časový interval, v němž tyto fluktuace nepřekročí dohodou stanovenou míru, se nazývá **koherenční doba** a délka dráhy, kterou za tento časový interval světlo v daném prostředí urazí, se nazývá **koherenční délka**. V případě Michelsonova interferometru je tedy podmínka koherence splněna pouze tehdy, když dráhový rozdíl obou svazků je kratší než koherenční délka. Není-li tato podmínka splněna, interferenci nepozorujeme a pozorovací pole je osvětleno rovnoměrně světlem, jehož intenzita je dána součtem intenzit sekundárních svazků. Použijeme-li zdroj světla, v němž je světlo emitováno **spontánní emisí** (výbojky, filtrované světlo žárovky), je doba trvání přechodů elektronů v atomech řádově  $10^{-8}$  s a tomu odpovídá koherenční délka v řádu jednotek metrů. Sekundární svazky ale procházejí prostředím, jehož optické vlastnosti se náhodně mění v důsledku proudění vzduchu, kolísání teploty a nedokonalostí optických prvků. Tyto jevy narušují koherenci tak, že skutečná koherenční délka je řádově  $10^{-3}$  až  $10^{-1}$  m. V současné době se jako zdroje světla pro interferometry obvykle používají **lasery** nebo **laserové diody**. Lasery a laserové diody emitují světlo **stimulovanou emisí**, tj. mechanismem do určité míry řízeným a v důsledku toho je u nich jak koherenční doba, tak koherenční délka, řádově vyšší než u klasických zdrojů světla.

Použití laserů umožnilo řadu nových technických aplikací interferometrů, zejména Michelsonova interferometru. Nejčastější aplikací je měření malých změn délek s rozlišením řádově  $10^{-7}$  m, které se uplatňuje např. u obráběcích strojů, u geodetických přístrojů, při přesném měření teplotní roztažnosti, modulu pružnosti aj. Složitější konfigurace Michelsonova interferometru, tzv. laserové gyroskopy, umožňují měření velmi pomalé rotace nebo malých změn úhlové polohy.



Obr. 6.9

## 6.6 Difrakce světla

Difrakce světla neboli ohyb světla nastává v těch případech, kdy je šíření světelné vlny omezeno nějakou překážkou v příčném směru, tj. ve směru kolmém na směr šíření světelné vlny. Nejjednodušší případy jsou dopad světla na stínítko s otvorem nebo se štěrbinou nebo ohyb na hraně překážky. Ze zkušenosti víme, že stín vržený hranou roviny osvětlené slunečním světlem není ostrý. Při přesném pozorování bychom zjistili, že stín hrany je doprovázen řadou rovnoběžných pruhů, střídavě světlých a tmavých, s kontrastem klesajícím se vzdáleností od geometrické hranice stínu hrany. Tento jev zařazujeme mezi **difrakční jevy** a lze jej vysvětlit na základě vlnové podstaty světla.

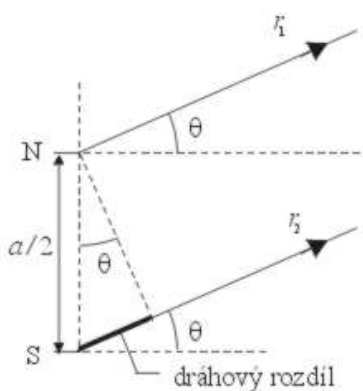
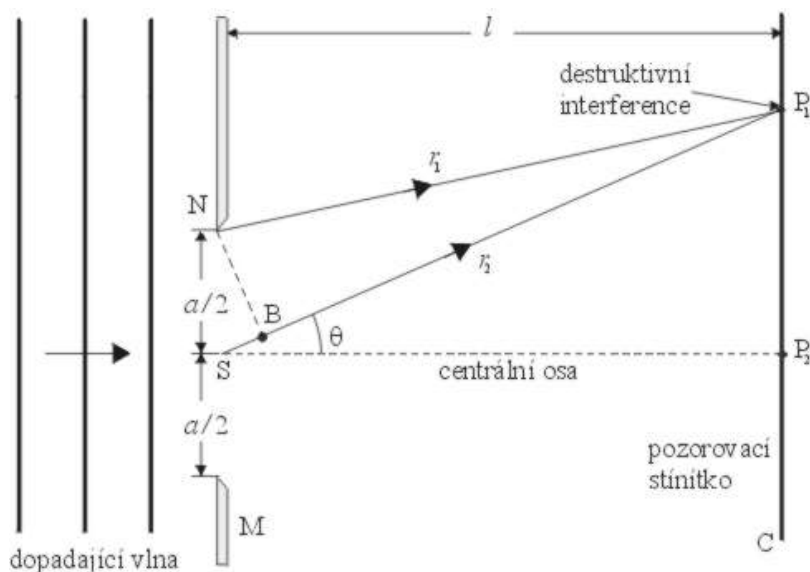
Podstatu difrakce světla objasníme na základě analýzy jevů, které pozorujeme při dopadu světelné vlny

s vlnovou délkou  $\lambda$  na stínítko s jednoduchou úzkou štěrbinou o šířce  $a$ . Schéma experimentálního uspořádání je na obr. 6.9. Na stínítku umístěném ve vzdálenosti  $L$  od štěrbinu nepozorujeme geometrický průmět štěrbinu, ale difrakční obrazec, v němž intenzita světla závisí na vzdálenosti od osy způsobem znázorněným v horní části obrázku. Obrazec je tvořen světlým středním pruhem s maximální intenzitou provázeným po straně světlými a tmavými pruhy s klesajícím kontrastem uspořádanými symetricky podle osy. Poloha středů tmavých pruhů, tj. bodů s minimem intenzity, je určena relací

$$a \sin \vartheta_m = \pm m\lambda, \quad m = 1, 2, 3, \dots, \quad (6.16)$$

kde  $m$  označuje **řád difrakčního minima** a úhel  $\vartheta_m$  označuje polohu minima řádu  $m$ .

Průběh intenzity v difrakčním obrazci můžeme vysvětlit s pomocí obr. 6.10a,b následující úvahou.



Obr. 6.10 a,b

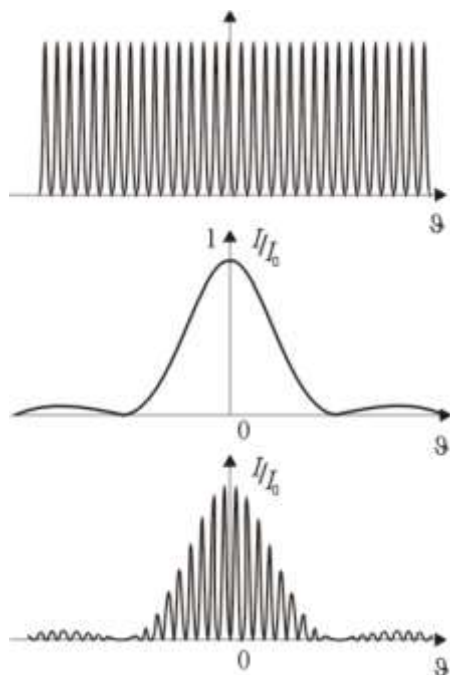
z bodů v rovině štěrbinu vzájemně vzdálených o  $a/2$ . Takovou dvojicí jsou paprsky vycházející z bodu N (okraj štěrbinu) a z bodu S (střed štěrbinu). Je-li splněn předpoklad  $l \gg a$ , je podle obr. 6.10 b dráhový rozdíl paprsků  $r_1, r_2$  přibližně roven  $a/2 \sin \vartheta$ . Položíme-li tento dráhový rozdíl roven  $\lambda/2$ , dostáváme pro polohu prvního minima vztah

$$a \sin \vartheta = \lambda. \quad (6.17)$$

Protože na štěrbinu dopadá rovinná světelná vlna, všechny paprsky vycházející z jednotlivých bodů v rovině štěrbinu kmitají se stejnou fází. Do určitého bodu na stínítku proto dopadají paprsky ze všech bodů štěrbinu, ale s různými dráhovými rozdíly. Paprsky spolu interferují a intenzita světla v daném bodě je funkcí jejich dráhového rozdílu. Částečně zjednodušeným postupem odvodíme podmínku (6.16) pro polohu jednotlivých minim. Je zřejmé, že v případě minima prvního řádu ( $m=1$ ) budou dráhové rozdíly nejmenší, a aby se v bodě  $P_1$  vytvořil první tmavý proužek, musí se fáze těchto paprsků lišit o  $\pi$ , tj. dráhový rozdíl těchto paprsků musí být  $\lambda/2$ . Štěrbinu rozdělíme na dvě poloviny a budeme sledovat interferenci dvojic paprsků vycházejících

Polohu minim druhého řádu najdeme obdobným způsobem. Představme si, že štěrbinu rozdělíme na čtyři díly a uvažujeme interferenci čtyř paprsků vycházejících z bodů vzdálených o  $a/4$ . Dráhový rozdíl těchto paprsků vycházejících pod úhlem  $\vartheta$  je analogicky k prvnímu případu  $(a/4)\sin \vartheta$ . Aby nastalo interferenční minimum, musí být tento dráhový rozdíl opět roven  $\lambda/2$ . Poloha druhého minima je určena vztahem

$$a \sin \vartheta_2 = 2\lambda . \quad (6.18)$$



Obr. 6.11

Pro minima vyšších řádů použijeme analogický postup a dostaneme obecný vztah (6.16).

Při popisu ohybových jevů na štěrbině jsme zatím uvažovali pouze interferenční jevy a ehovořili jsme o kvantitativním rozložení intenzity světla na stínítku. Kvantitativní analýza studuje šíření elektrické složky světelné vlny štěrbinou a dochází k výsledku, který je zobrazen na obr. 6.11. Periodický průběh intenzity  $I_0$  je modulován funkcí  $I$ , takže rozložení intenzity světelné vlny v rovině stínítka popisuje poměr  $I/I_0$ .

Podle vztahu (6.17) je poloha minim prvního řádu určená poměrem  $\lambda/a$ . Jestliže při konstantní vlnové délce zužujeme štěrbinu, úhel  $\vartheta_1$  pro první difrakční minimum roste.

To znamená, že **difrakční obrazec od užší štěrbiny je širší**. Mezní případ nastává pro  $a = \lambda$ , protože podle tohoto vztahu této šířce štěrbinu odpovídá úhel  $\vartheta_1 = \pi/2$ , takže světlý středový pruh pokrývá celé stínítko.

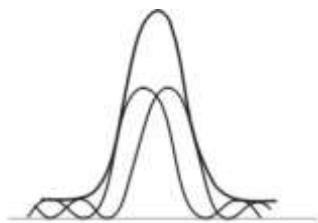
Difrakci světla je třeba brát v úvahu při návrhu a konstrukci pozorovacích a zobrazovacích optických soustav.

Schopnost zobrazovat drobné detaily předmětů je u těchto soustav v důsledku difrakce světla omezená a je charakterizovaná **rozlišovací schopností**.

**Rozlišovací schopnost udává nejmenší úhlovou vzdálenost  $\Delta\vartheta$  dvou svítících bodů, které optická soustava ještě zobrazuje jako dva body.**

U reálných soustav je rozlišovací schopnost zhoršována ještě optickými vadami, výrobními nepřesnostmi čoček a zrcadel a vlivem optických vlastností prostředí před a za soustavou. V praxi se proto pro teoretickou rozlišovací schopnost používá termín **rozlišovací mez**. V praxi se obvykle používají osově symetrické optické soustavy, v nichž jsou světelné svazky omezo-vány kruhovými clonkami. Světlo dopadající na kruhovou clonu vytváří difrakční obrazec kvalitativně stejný jako v případě štěrbinu – světlý středový kruh obklopený koncentrickými tmavými a světlými proužky. Pro určení rozlišovací schopnosti se v praxi obvykle uplatňuje **Rayleighovo kritérium**, které stanoví, že soustava je schopna rozlišit dva body ležící v úhlové vzdálenosti  $\Delta\vartheta$ , tehdy, když maximum intenzity ohybového obrazce druhého bodu leží právě nad prvním minimem difrakčního obrazce prvního bodu. V případě zobrazeném na obr. 6.12 a jsou pozorované body příliš blízko a soustava je zobrazí jako bod jeden, obr.6.12 b je podle

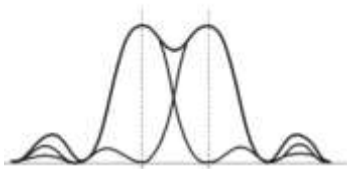




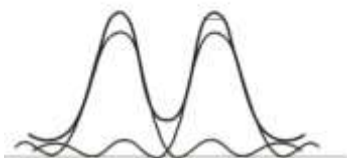
Rayleighova kriteria případem mezním a na obr.6.12 c je vzdálenost bodů dostatečná a soustava zřetelně rozliší dva body.

Matematický tvar Ryleighova kriteria je vyjádřen vztahem

$$\Delta \vartheta_r = 1,22 \frac{\lambda}{d}, \quad (6.19)$$



v němž  $d$  je průměr nejmenší clony omezující zobrazovací světelný svazek.



Obr. 6.12 a,b,c

Difrakce světla se například projevuje omezením maximálního zvětšení optických mikroskopů. Kvalita zobrazení optických mikroskopů je určena různými vadami čoček v objektivěch a okulárech mikroskopů. Pro dosažení potřebné kvality obrazu je nutné omezení chodu světelných svazků na oblast blízko optické osy mikroskopu. Toho se dosahuje tak, že do optického systému mikroskopu se zařazují clony s malým průměrem otvoru  $d$ . Protože vlnová délka použitého světla je omezena na viditelnou oblast, určuje vztah (6.19) maximální dosažitelnou rozlišovací schop-

nost a tím i maximální zvětšení mikroskopu. Platí, že při nejvyšší kvalitě použitých optických prvků lze u optických mikroskopů dosáhnout zvětšení 1200 až 1500. Určitého zvýšení zvětšení lze dosáhnout pozorováním v kratších vlnových délkách, tj. v ultrafialovém světle. Konečný obraz je třeba zviditelnit fluorescenčním převodem obrazu do viditelné oblasti. Takové mikroskopy se nazývají fluorescenční. Dalšího zvýšení zvětšení lze dosáhnout pouze využitím záření s kratší vlnovou délkou. Nelze ale použít elektromagnetické vlnění, tj. rentgenové záření ani záření gama, protože index lomu všech látek pro tato záření je prakticky roven jedné. Existují přístroje na bázi rentgenové optiky pracující s odrazem záření. Tato zrcadla ale vyžadují extrémně vysokou kvalitu povrchů a proto se zatím využívají jen výjimečně v astronomii. Zvýšení zvětšení a rozlišovací schopnosti ale lze dosáhnout využitím vlnových vlastností mikročástic (odstavec 9.1).

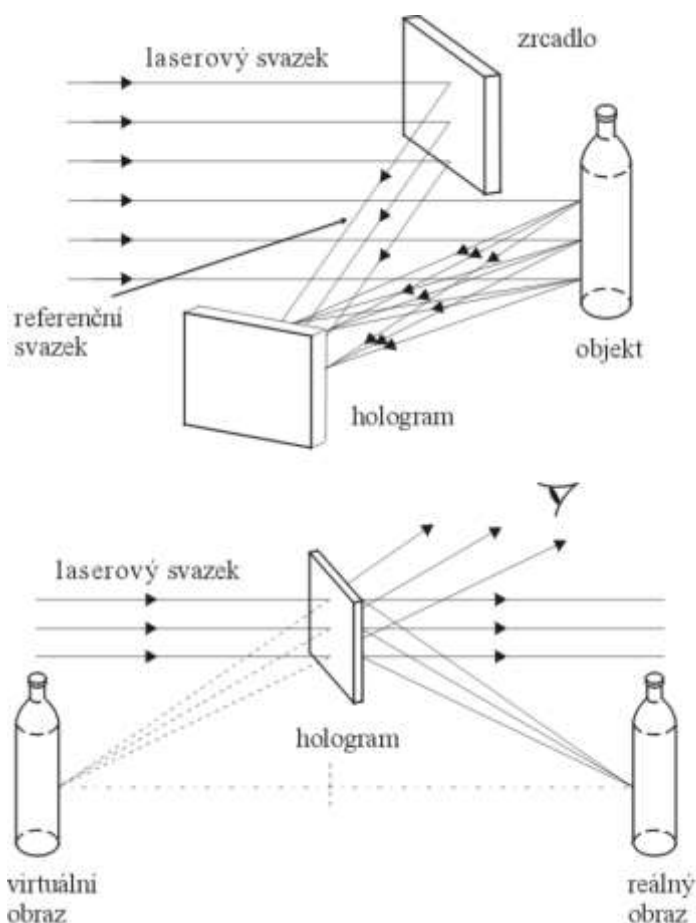
## 6.7 Difrakční mřížky, holografie

Difrakční a interferenční jevy se využívají v řadě praktických aplikací. Stručně popíšeme dvě z nich, difrakční mřížky a holografii.

**Difrakční mřížky** jsou optické prvky, které jsou složeny z velkého počtu rovnoběžných úzkých štěrbin nebo vrypů. Podle toho, zdali světlo difrakční mřížkou prochází nebo se na ni odráží rozlišujeme difrakční mřížky propustné nebo odrazné. Propustné mřížky jsou obvykle rovinné skleněné desky, do nichž je diamantovým hrotem vyryta soustava vrypů a odrazné mřížky jsou kovová zrcadla s vyrytou soustavou vrypů. Dopadá-li na difrakční mřížku světelný svazek, stávají se jednotlivé štěrbin y zdrojem elementárních vlnoploch, ze kterých se šíří světlo za mřížkou a dopadá na stínítko. Paprsky z jednotlivých štěrbin dopadající do bodů na stínítku jsou koherentní, ale musí proběhnout rozdílnou optickou dráhu a proto spolu interferují s výsledkem, který závisí na jejich vlnové délce. Difrakční mřížky proto slouží jako prvky, které roz-

kládají dopadající světlo podle vlnové délky. Využívají se jednak pro rozklad světla podle vlnové délky, jednak pro měření vlnové délky světla ve spektrometrech. Rozklad světla na jednotlivé barvy spektra pozorovatelný na CD discích je obdobou difrakce světla na mřížce na odraz, protože povrch disku je pokryt soustavou jemných koncentrických vrypů.

Druhou aplikací, o níž se stručně zmíníme, je **optická holografie**. Jedná se o techniku používanou pro zhotovení 3D obrazů využívající interferenci a difrakci světla. Běžné fotografické snímky jsou v podstatě dvourozměrné záznamy o rozložení intenzity světla odraženého nebo vyzářeného fotografovaným objektem, které nepodávají informaci o fázi světelných paprsků. Holografie je metoda záznamu vlnoplochy světelného vlnění a vytvoření její viditelné kopie. Princip jedné z možných metod vytváření holografického záznamu je na obr. 6.13 a. Rovnoběžný svazek koherentního monochromatického světla laseru je rozdělen tak, že část svazku dopadá na zrcadlo a druhá na zobrazovaný objekt. Na záznamový materiál (speciální fotografický film) současně dopadá světelný svazek odražený od zrcadla (referenční svazek) a svazek odražený od objektu (signální svazek). Za předpokladu dostatečné koherence spolu oba svazky interferují a v záznamovém materiálu se vytváří interferenční obrazec, který se nazývá **hologram**.



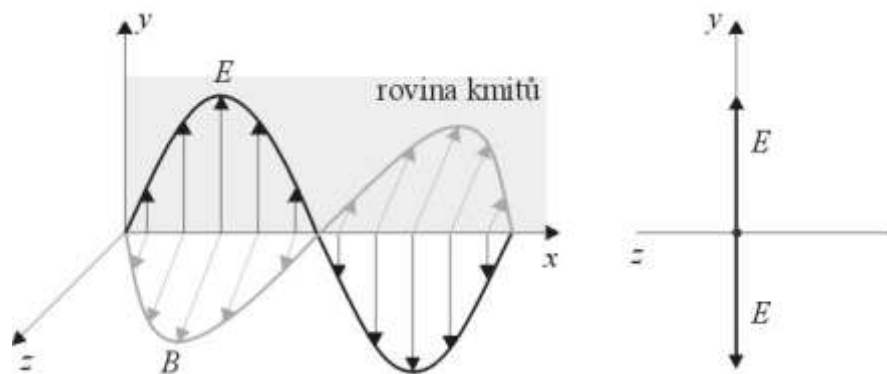
Obr. 6.13 a,b

Pozorování hologramu, neboli **holografická rekonstrukce**, se realizuje podle obr. 6.13 b osvětlením hologramu světelným svazkem podobným referenčnímu svazku. Tento svazek v hologramu difraktuje a pozorovatel vidí před hologramem virtuální obraz objektu. Současně se před hologramem vytváří i reálný obraz objektu. V rámci omezení daných rozměrem hologramu lze oba obrazy prohlížet i v různých směrech.

Jednou z možných aplikací holografie je měření malých tvarových a rozměrových změn. Holografické obrazy téhož objektu pořízené opakovanou expozicí původního a deformovaného stavu jsou pokryty sítí interferenčních proužků, která mapuje deformaci objektu. Holografie se dále úspěšně používá při zviditelňování teplotních polí, vizualizaci proudění a v řadě dalších aplikací.

## 6.8 Polarizace světla

Obr. 6.14 ukazuje světelnou elektromagnetickou vlnu, jejíž elektrická složka kmitá rovnoběžně s osou  $y$ . Rovina, ve které kmitá vektor  $\vec{E}$ , se nazývá **rovina kmitů**, a o takové vlně říkáme, že je **lineárně polarizovaná**. Takovou vlnu ovšem můžeme získat jen s pomocí určitého technického zařízení. V případě přirozeného světla (sluneční světlo, světlo žárovek a výbojek aj.) se rovina kmitů vektoru  $\vec{E}$  chaoticky mění a světlo se nazývá **nepolarizovaným** (přiroze-

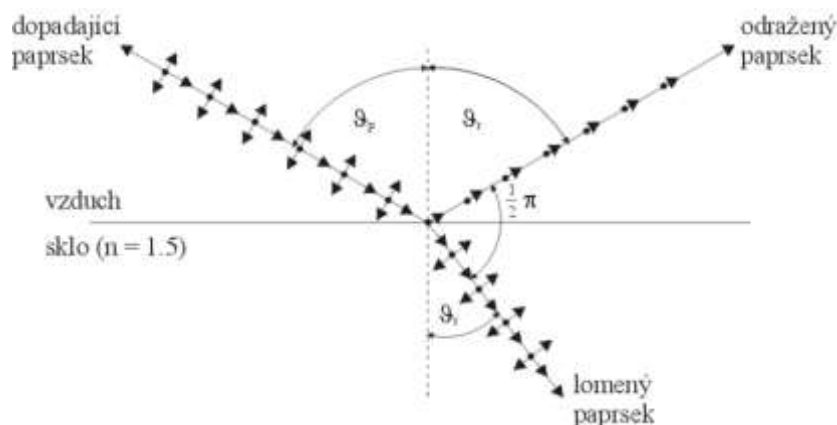


Obr. 6.14

ným). Jestliže průmět koncového bodu vektoru  $\vec{E}$  do roviny  $y,z$  opisuje uzavřenou křivku nebo úsečku, hovoříme o **světle polarizovaném**. Je-li touto projekcí kruh, případně elipsa, nazýváme světlo **kruhově** nebo **elipticky polarizované**, je-li touto projekcí úsečka, jde o světlo **lineárně polarizované**.

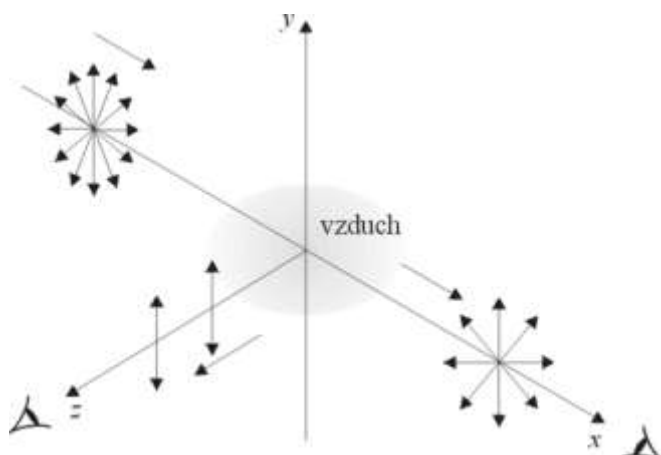
Změnit nepolarizované světlo na světlo polarizované lze vhodnou interakcí světla s látkou. Obecně platí, že při téměř všech interakcích světla s látkou dochází k určité změně polarizace. Rozlišujeme čtyři hlavní způsoby polarizace světla: **selektivní absorpce, odraz a lom, průchod anizotropním prostředím a rozptyl**. Účinnost polarizace se kvantitativně popisuje veličinou **stupeň polarizace**, která je definována jako poměr intenzity světla polarizovaného a celkové intenzity světla před polarizací.

Jako selektivní absorpci označujeme schopnost látky rozdílně absorbovat světlo v závislosti na jeho polarizaci. Tuto vlastnost mají zejména některé organické látky s orientovanou vláknitou strukturou. To znamená, že přirozené světlo je po průchodu folií zhotovené z takové látky částečně polarizováno. Z praktického života polarizační folie známe jako potahy speciálních slunečních brýlí.



Obr. 6.15

V odstavci 6.2 jsme se zmínili o tom, že interakci světla s rozhraním dvou prostředí obecně řeší Fresnelovy vztahy. Z těchto vztahů mj. vyplývá, že světlo odražené na rozhraní je částečně polarizované, přičemž stupeň polarizace



Obr. 6.16

závisí na úhlu dopadu a poměru indexů lomu  $n_1, n_2$ . Zvláštním případem je dopad světla pod úhlem  $\mathcal{G}_B$ , který je dán relací

$$\tan \mathcal{G}_B = \frac{n_2}{n_1} . \quad (6.20)$$

V tomto případě svírají lomený a odražený paprsek úhel  $\pi/2$  a odražený paprsek je plně polarizován tak, že vektor  $\vec{E}$  kmitá ve směru kolmém na rovinu dopadu (obr. 6.15). Úhel  $\mathcal{G}_p$  se nazývá Brewsterův úhel.

Třetí možnost polarizace světla je průchod anizotropním prostředím. Existují krystaly (vápenec, křemen a další), které vykazují tzv. dvojlom. Paprsek dopadající na povrch takového krystalu se lomem dělí na dva divergentní paprsky, které oba jsou lineárně polarizovány a to v rovinách navzájem kolmých. Dvojlomné krystaly s optickou kvalitou jsou relativně drahé a uplatňují se především v náročnější přístrojové optice.

Čtvrtým jevem, který vede k polarizaci, je rozptyl světla na molekulách plynu nebo jiné transparentní látky. Na obr. 6.16 je schéma rozptylu slunečního světla na molekulách vzduchu v atmosféře. Pozorování světla ve směru osy  $x$  potvrzuje, že sluneční světlo je nepolarizované. Připomínáme, že světlo je vlnění příčné a proto vektor elektrického pole nemá žádnou složku ve směru šíření  $x$ . Z toho důvodu ani světlo rozptýlené nemá složku elektrického pole ve směru osy  $x$  a pozorovatel sledující rozptýlené světlo ve směru osy  $z$  vidí světlo lineárně polarizované v rovině  $yz$ . Tuto skutečnost lze snadno ověřit pozorováním světla oblohy přes polarizační folii. Rozptyl také vysvětluje modrou barvu oblohy. Intenzita rozptýleného světla klesá s rostoucí vlnovou délkou a proto v rozptýleném světle převažuje modrá a fialová část spektra.

## Příklady ke kap.6

### Příklad 6.1

Světlo vlnové délky  $\lambda = 500 \text{ nm}$  dopadá kolmo na tenkou vrstvu vody ( $n = 1,33$ ) o tloušťce  $d = 1 \text{ } \mu\text{m}$ . Určete fázový rozdíl  $\Delta\varphi$  mezi paprskem odraženým od horní plochy vrstvy a paprskem odraženým od spodní plochy vrstvy.

### Řešení:

Na horní ploše se paprsek odráží na prostředí opticky hustším, a proto se jeho fáze mění o  $\Delta\varphi_1 = \pi$ . Odraz na dolní ploše není provázen změnou fáze, protože jde o odraz na rozhraní s prostředím opticky řidším a změna fáze tohoto paprsku je dána průchodem vrstvou vody oběma směry. Tomu odpovídá optická dráha  $l = 2nd$  a fázový rozdíl  $\Delta\varphi_2 = \frac{4\pi nd}{\lambda}$ .

Fázový rozdíl mezi oběma paprsky činí

$$\Delta\varphi = \Delta\varphi_2 - \Delta\varphi_1$$

a po dosazení

$$\Delta\varphi = \pi \left( \frac{4 \cdot 10^{-6} \cdot 1,33}{0,5 \cdot 10^{-6}} - 1 \right) \doteq 9,64\pi .$$

### Příklad 6.2

Osy reflektorů na automobilu jsou vzdáleny o  $l = 1,12$  m. V jaké maximální vzdálenosti  $x_{\max}$  ve směru osy automobilu můžeme při vizuálním pozorování automobilu reflektory odlišit jako dva světelné body, je-li střední hodnota vlnové délky světla reflektorů  $\lambda = 550$  nm a průměr pupily oka  $d = 5$  mm.

#### Řešení:

Použijeme Rayleighovo kritérium (6.19) :

$$\Delta\vartheta_r = 1,22 \frac{\lambda}{d} = \frac{l}{x_{\max}}$$

Po úpravě a dosazení :

$$x_{\max} = \frac{1,12 \cdot 5 \cdot 10^{-3}}{1,22 \cdot 0,55 \cdot 10^{-6}} \doteq 8\,350 \text{ m} .$$

### Příklad 6.3

Svazek světla laseru s vlnovou délkou  $\lambda = 700$  nm dopadá na štěrbinu o šířce  $a = 0,5$  mm. Difrakční obrazec pozorujeme na stínítku ve vzdálenosti  $L = 6$  m. Určete šířku  $D$  středního světlého proužku.

#### Řešení:

Šířka  $D$  je rovna vzdálenosti minim 1.řádu. Podle (6.17) platí  $D = 2L \sin \vartheta_1 \approx 2L \frac{\lambda}{a}$ .

Po dosazení :

$$D = 2 \cdot 6 \cdot \frac{0,7 \cdot 10^{-6}}{0,5 \cdot 10^{-3}} \doteq 17 \text{ mm} .$$

### Příklad 6.4

Do jednoho ramene Michelsonova interferometru byla kolmo na směr paprsků vložena tenká vrstva z transparentního materiálu s indexem lomu  $n = 1,5$ . Při tom se interferenční obrazec posunul o  $m = 12$  period interferenčních proužků. Určete tloušťku  $d$  tenké vrstvy za předpokladu použití monochromatického zdroje světla s vlnovou délkou  $\lambda = 550$  nm.

#### Řešení:

Posuvu interferenčního obrazce o jednu periodu odpovídá změna optické dráhy v jednom rameni interferometru o délku rovnou  $\lambda$ . Vrstvou vloženou do ramene interferometru prochází světlo dvakrát a proto vložení tenké vrstvy vyvolá změnu optické dráhy  $\Delta x = 2d(n-1) = m\lambda$ .

Po úpravě a dosazení :

$$d = \frac{m\lambda}{2(n-1)} = \frac{12 \cdot 0,55 \cdot 10^{-6} \text{ m}}{1} = 6,6 \cdot 10^{-6} \text{ m} .$$

## 7. Kvantový charakter elektromagnetického záření

Světlo jsme zatím popisovali jako vlnu, která má určitou vlnovou délku  $\lambda$ , kmitočet  $\nu$  a fázovou rychlost šíření v daném prostředí a rychlost šíření  $c$  ve vakuu. Ukázali jsme, že svou podstatou je světlo elektromagnetické vlnění vznikající jako produkt elektrického a magnetického pole, která jsou charakterizována vektory  $\vec{E}$  a  $\vec{B}$ . Viditelné světlo je rovněž součástí spektra elektromagnetického záření pokrývajícího vlnové délky od dlouhých radiových vln až po nejkratší vlnové délky záření  $\gamma$  emitovaného atomovými jádry.

Začátkem 20. století byla navržena a v experimentech potvrzena **kvantová hypotéza**. Podle této hypotézy zdroje záření nevyzařují ani neabsorbují energii spojitě, ale diskrétně, po malých částech, nazývaných **kvanta energie**. Toto kvantum energie nazval Einstein **foton** a experimentálně byly potvrzeny jeho částicové vlastnosti.

Elektromagnetické záření má kvantový charakter a kromě vlnové podstaty má ještě druhou stránku své povahy, a to částicovou. Částicová povaha světla se projevuje tím průkazněji, čím je menší vlnová délka záření.

### 7.1 Interakce elektromagnetického záření s látkou

Interakce elektromagnetického záření s látkou probíhá různými způsoby, v závislosti na energii záření a vlastnostech látky, kde se interakce uskutečňuje. V řadě případů se interakce, zvláště v oboru viditelného světla, omezuje na odraz a lom na rozhraní prostředí. Například při dopadu světla na skleněnou desku se část světla odráží, část láme, ale absorpci můžeme zanedbat. Interakce se v tomto případě projeví pouze rozdělením energie dopadajícího svazku světla na odražený a lomený, ale ke změnám na interagující látce (skle) prakticky nedojde. V jiném případě, například látky s jiným povrchem, mohou být důsledky interakce výraznější. Absorbovaná energie se může projevit zvýšením teploty, chemickými procesy (fotografická emulze), emisí elektronů a dalšími jevy. Ve velké většině případů se světlo odráží a absorbuje v závislosti na vlnové délce. Obecně lze říci, že tělesa, jejichž povrch má tmavou barvu, absorbují větší část energie dopadajícího záření, než tělesa se světlou barvou povrchu. Jestliže povrch určitého tělesa absorbuje přednostně dlouhovlnnou oblast viditelného světla, tj. červené a žluté části spektra, jeví se nám toto těleso osvětlené svazkem bílého světla jako modré, případně modrozelené, protože v odraženém svazku jsou zastoupeny především tyto krátkovlnné složky viditelného světla.

Kromě pozorování těles prostřednictvím odraženého světla pozorujeme předměty také prostřednictvím světla, které samy vyzařují. Kovové těleso zahřáté na dostatečně vysokou teplotu vyzařuje podstatnou část energie ve viditelné oblasti spektra. Chladnější těleso vyzařuje také určitou část energie ve formě elektromagnetického záření, ale převážně s vlnovou délkou delší než odpovídá rozsahu vlnových délek viditelného světla, a proto jej nemůžeme lidským zrakem pozorovat. Můžeme je však měřit vhodným detekčním zařízením. Je zřejmé, že energie a spektrální rozložení emitovaného záření závisí na teplotě tělesa a jeho dalších vlastnostech. V dalším odstavci se pokusíme vyzařování těles kvantitativně charakterizovat.

## 7.2 Vyzařování těles

Schopnost těles vyzařovat kvantitativně charakterizuje veličina **zářivý tok**  $\Phi_e$  (index  $e$  označuje emisi), která je definována jako výkon přenášený zářením z plochy  $S$  povrchu tělesa. Jednotkou zářivého toku je watt. Plošná hustota zářivého toku se nazývá **vyzařování**  $M_e$  a je určena vztahem

$$M_e = \frac{d\Phi_e}{dS} \quad , \quad [M_e] = \text{W} \cdot \text{m}^{-2} \quad . \quad (7.1)$$

Veličina vyzařování závisí pro konkrétní těleso pouze na dvou veličinách – termodynamické teplotě  $T$  a emisivitě  $\varepsilon$ . Závislost má tvar

$$M_e = \varepsilon \sigma T^4 \quad (7.2)$$

a nazývá se **Stefanův-Boltzmannův zákon**. Konstanta  $\sigma$  se nazývá Stefanova-Boltzmannova konstanta a má přibližně velikost

$$\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4} \quad . \quad (7.3)$$

Emisivita  $\varepsilon$  je materiálová konstanta, která závisí na materiálu tělesa a stavu jeho povrchu. Je to bezrozměrná veličina definovaná jako poměr vyzařování  $M_{e,T}$  uvažovaného tělesa a vyzařování  $M_{e,T_{\alpha=1}}$  absolutně černého tělesa při stejné teplotě. Platí vztah

$$\varepsilon = \frac{M_{e,T}}{M_{e,T_{\alpha=1}}} \quad . \quad (7.4)$$

Absolutně černé těleso jsme ve vztahu (7.4) popsali symbolem  $\alpha$  a položili jsme jej rovný 1. Koeficient  $\alpha$  charakterizuje jaká část energie záření dopadajícího na těleso se pohltí.

**Těleso, které všechno dopadající záření pohlcuje, se nazývá absolutně černé těleso** a platí pro něj vztah

$$\alpha(\lambda, T) = \frac{dE_{\text{pohl.}}}{dE_{\text{dopad.}}} = 1 \quad . \quad (7.5)$$

Je známo, že povrch tělesa, který dobře absorbuje elektromagnetické záření, rovněž toto záření dobře vyzařuje, přitom jsou však tyto děje závislé na vlnové délce záření. Záření o vlnové délce, která je dobře emitováno, je zároveň dobře absorbováno. Z uvedených vlastností těles vzhledem k vyzařování vyplývá, že absolutně černé těleso nejen úplně absorbuje záření ( $\alpha = 1$ ), ale zároveň má jeho povrch ideální emisivitu ( $\varepsilon = 1$ ). Absolutně černé těleso je pochopitelně idealizací, protože ve skutečnosti neexistuje. Jeho vlastnostem se blíží vlastnosti některých povrchů, například povrch pokrytý sazemi nebo tiskařskou černí ( $\alpha = 0,99$ ). Ještě lépe se lze vlastnostem absolutně černého tělesa přiblížit vhodnou dutinou se vstupním otvorem. Světlo, které dopadne vstupním otvorem, se po mnohonásobném odrazu v dutině zcela pohltí. Stefanův – Boltzmannův zákon se pro absolutně černé těleso (emisivita  $\varepsilon = 1$ ) zjednodušuje na tvar

$$M_e = \sigma T^4 \quad . \quad (7.6)$$

### 7.3 Záření absolutně černého tělesa

Ze vztahu (7.6) vyplývá, že veličina  $M_e$  charakterizující vyzařování absolutně černého tělesa nezávisí na žádné jiné veličině než na termodynamické teplotě  $T$ . Zdrojem záření v absolutně černém tělese jsou harmonické oscilátory – atomy, které vyzařují směsici elektromagnetických vln, které jsou ve spektru emitovaného záření zastoupeny s různou pravděpodobností. Říkáme, že vyzařovaná energie je určitým způsobem rozdělena podle vlnových délek, resp. frekvencí záření. Studium spektra emitovaného záření pro absolutně černé těleso přineslo kvalitativně nové poznatky, které byly jedním z podnětů pro vznik kvantové fyziky.

Rozdělení energie záření emitovaného absolutně černým tělesem do jednotlivých vlnových délek, resp. frekvencí lze popsat veličinami **spektrální hustota vyzařování**  $M_{e\lambda}, M_{e\nu}$ . Platí pro ně vztahy

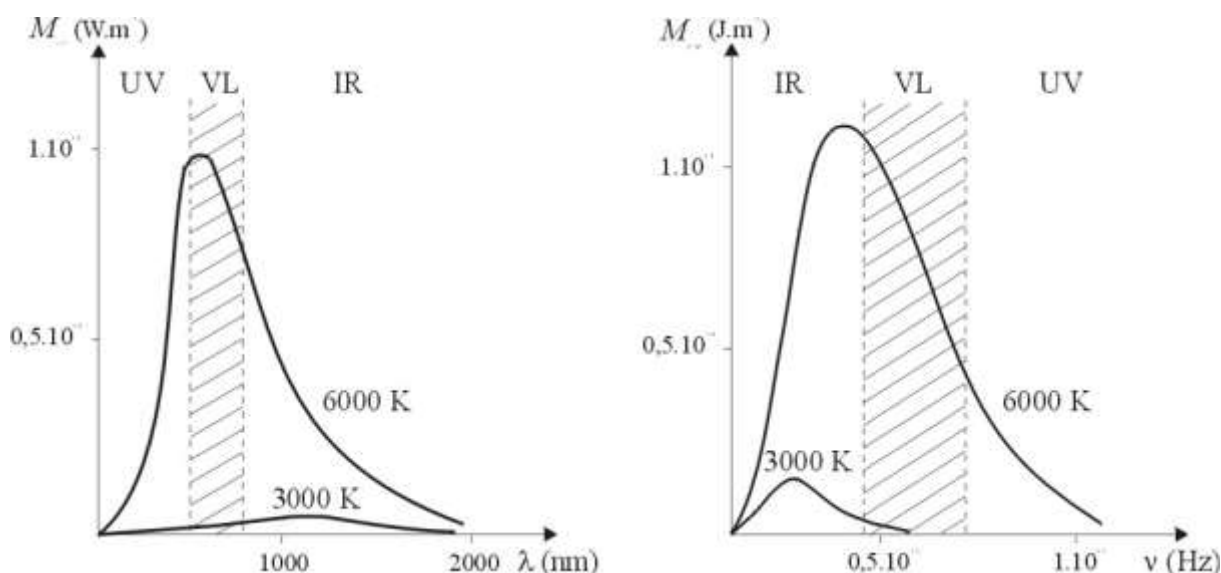
$$M_{e\lambda} = \frac{dM_e}{d\lambda} \quad , \quad [M_{e\lambda}] = \text{W} \cdot \text{m}^{-3} \quad , \quad (7.7)$$

$$M_{e\nu} = \frac{dM_e}{d\nu} \quad , \quad [M_{e\nu}] = \text{J} \cdot \text{m}^{-2} \quad . \quad (7.8)$$

Fyzikální význam spektrální hustoty vyzařování je takový, že součin  $M_{e\lambda} d\lambda$  udává vyzařování v intervalu vlnových délek  $(\lambda, \lambda + d\lambda)$  a celkové, integrální vyzařování (v celém oboru vlnových délek) vypočteme podle vztahu

$$M_e = \int_0^{\infty} M_{e\lambda} d\lambda = \int_0^{\infty} M_{e\nu} d\nu \quad . \quad (7.9)$$

Experimentálně zjištěné závislosti spektrální hustoty vyzařování pro absolutně černé těleso na vlnové délce a frekvenci jsou na obr.7.1.



Obr.7.1



Charakteristické rysy těchto závislostí lze shrnout do následujících bodů:

1. Pro určitou teplotu vykazuje závislost spektrální hustoty vyzařování na vlnové délce nebo frekvenci záření vždy jediné maximum.
2. Se zvyšující se teplotou roste i spektrální hustota vyzařování, a to pro kteroukoliv vlnovou délku nebo frekvenci.
3. Hodnota vlnové délky  $\lambda^*$ , pro níž nabývá spektrální hustota vyzařování maxima, se s rostoucí teplotou posouvá k menším hodnotám. Kvantitativně je tento fakt vyjádřen Wienovým zákonem posunu **ve tvaru**

$$\lambda^* T = b \quad , \quad (7.10)$$

kde konstanta  $b$  se nazývá Wienova konstanta a v soustavě SI nabývá hodnoty  $b = 2,8978 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K}$ .

Vysvětlení průběhu závislosti vyzařované energie na vlnové délce pro absolutně černé těleso se v rámci klasické fyziky setkalo s neúspěchem. Na konci 19. století byly učiněny pokusy odvodit teoretický průběh na základě známých zákonů klasické fyziky, zejména na základě představy o spojitém vyzařování energie atomy jako oscilátory.

Správný průběh závislosti pro celý rozsah vlnových délek odvodil Planck. Má tvar

$$M_{e\lambda} = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5 (e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1)} \quad . \quad (7.11)$$

V tomto vztahu označuje  $c$  rychlost světla ve vakuu,  $k$  je Boltzmannova konstanta a  $h$  je nová konstanta zavedená Planckem. Její hodnota v SI soustavě je

$$h = 6,626076 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} \quad . \quad (7.12)$$

Důkladný rozbor odvozené závislosti energie vyzařované absolutně černým tělesem na vlnové délce, která plně odpovídala experimentu, přinesl překvapivý závěr, který znamenal vážný zásah do uvažování klasické fyziky.

**Při emisi nebo absorpci světla se energie nepředává spojitě, ale po kvantech.**

Platí vztah

$$\Delta E = h\nu \quad . \quad (7.13)$$

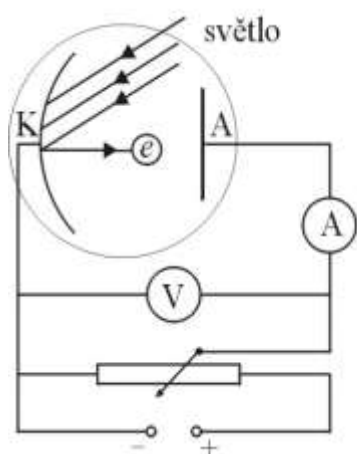
Tento vztah se obvykle nazývá **Planckova kvantová hypotéza**, protože sám Planck jej považoval pouze za pracovní hypotézu. V roce 1905 jej použil Einstein pro vysvětlení dalšího jevu, který klasická fyzika rovněž neuměla uspokojivě popsat. Vzniklo tak **kvantové vysvětlení fotoelektrického jevu**.

## 7.4 Fotoelektrický jev

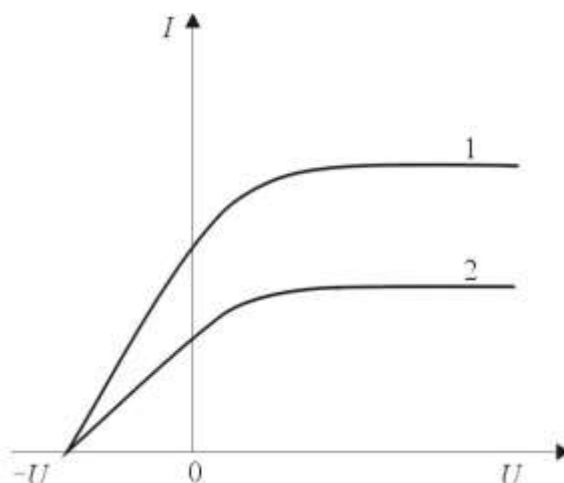
Při fotoelektrickém jevu jsou při dopadu elektromagnetického záření (obvykle viditelného a ultrafialového světla) na povrch látky z tohoto povrchu emitovány elektrony. K samovolnému uvolňování elektronů, tj. bez dopadu světla, nemůže dojít, protože elektrony jsou v látce vázány s určitou vazební energií  $\Phi$ , která se nazývá **výstupní práce**. K tomu, aby se elektron z látky

uvolnil, je třeba prostřednictvím světla dodat energii, která je stejná nebo větší než velikost výstupní práce.

Vlastnosti emitovaných elektronů se studují na zařízení, jehož schéma je na obr.7.2



Obr.7.2



Obr.7.3

V evakuované baňce se nalézají dvě elektrody a látka, na které se fotoelektrický jev studuje, je nanášena na katodě. Anoda je sběrnou elektrodou, na kterou dopadají elektrony z katody uvolněné v důsledku fotoelektrického jevu. Zvolený způsob uspořádání dovoluje měřit velikost i polaritu napětí mezi elektrodami a měřit fotoelektrický proud. Příklad naměřených voltampérových charakteristik je na obr. 7.3.

Intenzita světla dopadajícího na katodu byla v případě křivky 1 větší než v případě křivky 2. Je-li anoda na kladném potenciálu, proud elektronů s rostoucím napětím roste až dosáhne nasyčené hodnoty, která je úměrná intenzitě dopadajícího světla. Jestliže je anoda vzhledem ke katodě na záporném potenciálu, fotoelektrický proud s rostoucím napětím klesá, až při určité hodnotě napětí zaniká. Velikost tohoto závěrného napětí, které označujeme jako **brzdné napětí**, nezávisí na intenzitě světla, ale na jeho kmitočtu. Charakteristické vlastnosti fotoelektrického jevu lze shrnout do následujících bodů:

1. Elektrony jsou emitovány pouze tehdy, jestliže frekvence dopadajícího záření je větší než hodnota  $\nu_0$  (mezní frekvence), charakteristická pro danou látku.
2. Velikost fotoelektrického proudu závisí na intenzitě záření, ne na jeho frekvenci.
3. Kinetická energie elektronů závisí lineárně na frekvenci záření. Může být stanovena měřením brzdného napětí, při kterém proud elektronů klesne na nulu.
4. Elektrony se uvolňují bez zpoždění i při velmi malých intenzitách dopadajícího záření.

Pomocí klasické elektrodynamiky nelze tyto vlastnosti fotoelektrického jevu vysvětlit.

Einsteinovo úspěšné vysvětlení fotoelektrického jevu bylo založeno na využití Planckovy kvantové hypotézy na celé spektrum elektromagnetického záření. Einstein zavedl představu elektromagnetického záření jako proudu kvant energie - částic, které nazval **fotony**.

Fotony se ve vakuu pohybují rychlostí světla  $c$  a nesou energii o velikosti

$$E = h\nu \quad . \quad (7.14)$$

Při fotoelektrickém jevu interaguje jednotlivý foton s látkou tak, že foton zaniká a elektron přebírá jeho celkovou energii.

Energetickou bilanci jevu popisuje rovnice

$$h\nu = \Phi + \frac{1}{2} m_{0e} v^2 \quad , \quad (7.15)$$

kde  $m_{0e}$  je klidová hmotnost elektronu a  $v$  je rychlost elektronu s kterou opouští látku.

Výstupní práce je veličina s hodnotou charakteristickou pro určitou látku. Z praktických důvodů se obvykle udává v jednotkách elektronvolt.

**Elektronvolt je definován jako změna energie elektronu při průchodu elektrickým polem o rozdílu potenciálů rovnému 1V.** Jeho velikost v joulech je rovna

$$1 \text{ eV} = 1,60217733 \cdot 10^{-19} \text{ J} \approx 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J} .$$

Hodnoty výstupní práce pro několik vybraných kovů:

Kov	Na	Al	Cu	Zn	Ag	Fe
$\Phi(\text{eV})$	2,28	4,08	4,70	4,31	4,73	4,50

Z rovnice (7.15) vyplývá, že fotoelektrický jev se uskuteční až od  $\nu_0$ , pro který platí vztah

$$h\nu_0 = \Phi \quad . \quad (7.16)$$

Vlnová délka  $\lambda_0$  nazývaná mezní vlnová délka, je s  $\nu_0$  svázána vztahem

$$\nu_0 = \frac{c}{\lambda_0} \quad .$$

Například pro sodík je mezní vlnová délka 505 nm, která přísluší světlu ze zelené části viditelného spektra elektromagnetického záření. Pro ostatní kovy leží mezní vlnové délky v ultrafialové oblasti spektra.

Z energetické bilance lze také odvodit vztah mezi mezní frekvencí, skutečnou frekvencí fotonu a brzdícím napětím. Po dosazení za výstupní práci ze vztahu (7.16) dostaneme vztah

$$eU_0 = h(\nu - \nu_0) \quad , \quad (7.17)$$

kde  $U_0$  označuje brzdící napětí.

Fotoelektrický jev se v současné době uplatňuje v řadě aplikací. Obecně se jako fotoelektrické jevy označují všechny jevy, při nichž je velikost elektrického proudu ovlivněno světlem. Doposud jsme se zabývali **vnějším fotoelektrickým jevem**, tj. emisí elektronů z atomů do volného prostoru. Světelná čidla pracující na tomto principu, obr.7.2, se nazývají vakuové fotočlánky a dnes se používají jen ke speciálním účelům. Na vnějším fotoelektrickém jevu jsou však založeny **fotonásobiče**, což jsou vakuové fotočlánky, kde se počet elektronů iniciovaný vnějším fotoelektrickým jevem v materiálu fotokatody zvětšuje pomocí sekundární emise elektronů na dalších elektrodách. Fotonásobiče se užívají pro detekci a registraci velmi slabých

světelných signálů. Rovněž několik typů televizních snímacích elektronek je založeno na podobném principu, tj. primární elektrický signál získaný na základě vnějšího fotoelektrického jevu je dalšími procesy zesilován a posléze registrován.

**Vnitřní fotoelektrický jev** nastává při interakci fotonů s nositeli elektrického náboje v polovodičích. Neprojevuje se emisí elektronů, ale změnou energie nositelů náboje a z toho vyplývající změny elektrické vodivosti. Polovodičové prvky využívající tento jev (fototranzistory, fotoodpory, CCD prvky atd.) se stále více prosazují, a to jak z důvodů nižších výrobních nákladů, tak z důvodů nižších nároků na napájení, možnosti miniaturizace atd.

## 7.5 Comptonův jev

Další důkaz o správnosti kvantového a zejména částicového charakteru elektromagnetického záření přinesl rozptyl rentgenového záření na látkách se slabě vázanými elektrony, který pozoroval A.H.Compton v 20. letech minulého století. V rozptýleném svazku záření se kromě složky s původní frekvencí vyskytovala i složka záření odchýlená z původního směru a s menší frekvencí. Výsledná menší frekvence záření byla závislá pouze na úhlu rozptylu, nikoliv na vlastnostech látky.

Compton použil pro vysvětlení rozptylu částicovou podstatu elektromagnetického záření. Jestliže rozptyl chápeme jako srážku individuálního fotonu s volným elektronem, bude energie fotonu po srážce zmenšena o energii předanou elektronu. Kromě bilanční rovnice pro změnu energie při srážce musí platit ještě zákon zachování hybnosti.

Na rozdíl od fotoelektrického jevu, kde energie emitovaných fotoelektronů není příliš velká, musíme v případě Comptonova rozptylu použít pro rozptýlené (comptonovské) elektrony relativistický vztah pro energii vyjádřený Einsteinovým vztahem ekvivalence hmotnosti a energie,  $E = mc^2$ .

Zákon zachování energie vyjadřující neměnnost energie před a po srážce můžeme psát ve tvaru

$$h\nu + m_0c^2 = h\nu' + m_e c^2 \quad (7.18)$$

nebo ve tvaru

$$h \frac{c}{\lambda} + m_0c^2 = h \frac{c}{\lambda'} + m_e c^2 = h \frac{c}{\lambda'} + \sqrt{(m_0c^2)^2 + (p_e c)^2} \quad , \quad (7.19)$$

kde  $m_0$  je klidová,  $m_e$  setrvačná hmotnost elektronu,  $\nu, \nu'$  frekvence fotonu před, po srážce,  $\lambda, \lambda'$  vlnová délka fotonu před, po srážce,  $p_e$  je hybnost rozptýleného elektronu. Elektron, který byl před srážkou v klidu, měl pouze klidovou energii  $m_0c^2$ .

Zákon zachování hybnosti vyžaduje, aby platil vztah pro rovnost součtu vektorů hybnosti před a po srážce. Formálně jej můžeme zapsat ve tvaru

$$\vec{p}_i = \vec{p}_f + \vec{p}_e \quad , \quad (7.20)$$

kde  $\vec{p}_i, \vec{p}_f$  jsou hybnost fotonu před, po srážce a  $\vec{p}_e$  je vektor hybnosti rozptýleného elektronu.

Foton, kvantum elektromagnetického záření, jak jsme konstatovali, má částicový charakter. Můžeme mu tedy přiřadit další částicové charakteristiky jako je **hybnost, hmotnost**. Pro určení hybnosti fotonu musíme použít vztah ekvivalence hmotnosti a energie. Platí relace

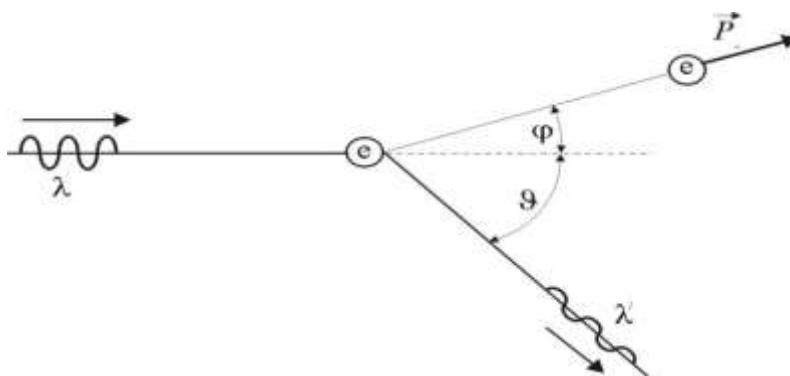
$$\text{pro hybnost fotonu} \quad p = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda} \quad , \quad (7.21)$$

protože předpokládáme, že foton se pohybuje ve vakuu rychlostí světla. Analogickým způsobem lze odvodit vztah

$$\text{pro hmotnost fotonu} \quad m = \frac{E}{c^2} = \frac{h\nu}{c^2} \quad . \quad (7.22)$$

### Foton má hybnost a setrvačnou hmotnost.

Podle zákona zachování hybnosti musí platit, že i složky vektoru hybnosti soustavy se během srážky nemění.



Obr.7.4

Zvolme kartézskou soustavu souřadnic tak, že za kladný směr osy  $x$  považujeme směr hybnosti fotonu před srážkou. Pak můžeme psát pro  $x$ -ové složky hybností před a po srážce vztah

$$\frac{h}{\lambda} = \frac{h}{\lambda'} \cos \vartheta + m_e v \cos \varphi \quad (7.23)$$

a pro  $y$ -ové složky

$$0 = \frac{h}{\lambda'} \sin \vartheta - m_e v \sin \varphi \quad , \quad (7.24)$$

kde význam úhlů vyplývá z obr.7.4 a  $v$  je velikost rychlosti elektronu po srážce.

Po úpravách dospějeme ke vztahu pro **Comptonův posuv**  $\Delta\lambda$  vlnové délky fotonu v závislosti na úhlu rozptylu fotonu. Platí pro něj

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0 c} (1 - \cos \vartheta) \quad . \quad (7.25)$$

Pro poměr  $\frac{h}{m_0e c}$  byl zaveden název **Comptonova vlnová délka elektronu** a je číselně roven 0,002426nm.

**Vysvětlení Comptonova jevu přispělo významným způsobem k potvrzení částicové struktury elektromagnetického záření.**

## 7.6 Tvoření elektron-pozitronových párů

Dalším procesem, v které fotony interagují s prostředím, je vznik elektron-pozitronových párů. Foton v tomto procesu ztrácí všechnu energii a vytvoří se dvě částice. Pozitron je částice, která má hmotnost identickou s hmotností elektronu, ale má elektrický náboj opačného znaménka. Je antičásticí k elektronu. Tvoření elektron-pozitronových párů je příkladem jevu, kdy dochází k uplatnění Einsteinova vztahu ekvivalence hmotnosti a energie.

Ze zákona zachování energie vyplývá, že celá energie fotonu se přemění na relativisticky vyjádřenou energii elektronu a pozitronu. Můžeme psát vztah

$$h\nu = E_+ + E_- \quad , \quad (7.26)$$

kde  $E_+, E_-$  jsou celkové energie elektronu a pozitronu složené z kinetické a klidové energie. Formálně celý jev zapisujeme schématem

foton  $\rightarrow$  elektron + pozitron .

Vzhledem k tomu, že elektron a pozitron musí mít celkovou energii rovnou alespoň své klidové energii  $m_0e c^2$  musí platit relace

$$h\nu \geq 2m_0e c^2 = 1,02\text{MeV} \quad . \quad (7.27)$$

S takovými hodnotami energie jsou emitovány fotony záření gama z atomových jader.

## 7.7 Fotony a elektromagnetické vlny

V předcházejících odstavcích jsme uvedli fotoelektrický a Comptonův jev jako důkazy částicové povahy elektromagnetického záření. Interaguje-li toto záření s látkou, chová se jako proud částic, které mají svoji hybnost.

V kapitole vlnová optika jsme se však zabývali jevy, které plně vyhovují představám o vlnové povaze elektromagnetického záření. Patřily mezi ně například interference a difrakce světla.

Tyto dvě povahy elektromagnetického záření jsou zdánlivě nekonsistentní. Jestliže přijmeme předpoklad, že elektromagnetické záření jsou buď vlny, anebo částice, vzniká otázka, jak pozná zdroj záření, že má emitovat částice nebo vlny? Vezměme jako příklad svazek světla dopadající na kovovou difrakční mřížku. V tomto případě se záření projevuje jako vlnění

a dostáváme charakteristický difrakční obrazec na stínítku. Jestliže však mřížku používáme jako katodu pro experiment s fotoelektrickým jevem (dopadem se uvolňují fotoelektrony), pak tentýž svazek se chová jako proud částic – fotonů. Podobných problémů bychom v souvislosti s fotony mohli předložit mnohem více. Ukazuje se, že jejich uspokojivé vysvětlení v rámci klasického nazírání není možné. Musíme konstatovat, že pro popis elektromagnetického záření je nutná jak částicová, tak vlnová povaha.. Správně můžeme chování elektromagnetického záření popsat pouze kvantovou teorií.

Elektromagnetické záření má duální charakter: vykazuje jak vlnovou, tak částicovou povahu.

S klesající vlnovou délkou lze stále obtížněji prokázat vlnovou povahu záření.

## Příklady ke kap.7

### Příklad 7.1

Měřením bylo zjištěno, že maximum intenzity vyzařování wolframového vlákna připadá na vlnovou délku  $\lambda^* = 966\text{nm}$ . Průměr vlákna je  $d = 0,2\text{mm}$ , délka je  $l = 10\text{mm}$ . Předpokládejte, že vlákno vyzařuje jako absolutně černé těleso. Při výpočtu se přesvědčte, že teplotu okolí je možno v tomto případě zanedbat vzhledem k teplotě vlákna.

Vypočítejte:

- energii vyzářenou z vlákna za 1s,
- čas, za který po vypnutí proudu poklesne teplota vlákna na teplotu místnosti (293 K), přičemž vlákno nepřijímá z okolí žádnou energii a všechny nezářivé tepelné ztráty je možno zanedbat. Hustota vlákna je  $\rho = 19 \cdot 10^{-3}\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$ , měrná tepelná kapacita wolframu je  $c = 154,88\text{J} \cdot \text{kg} \cdot \text{K}^{-1}$ .

**Řešení:**

a)

Celkové množství energie vyzářené za 1s jednotkou plochy absolutně černého tělesa určuje Stefanův-Boltzmannův zákon (7.6) ve tvaru

$$M_e = \sigma(T^4 - T_0^4) ,$$

kde  $T_0$  je termodynamická teplota okolí. Povrch vlákna s průměrem  $d$  a délkou  $l$  vyzáří za jednotku času energii rovnou výkonu záření. Můžeme proto psát relaci

$$P = \pi dl \sigma (T^4 - T_0^4) .$$

Teplotu  $T$  vlákna určíme prostřednictvím Wienova zákona posuvu (7.10) ze vztahu

$$\lambda^* T = b .$$

Dosažením  $T$  z Wienova zákona do vztahu pro výkon  $P$  dostaneme relaci

$$P = \pi dl \sigma \left( \frac{b^4}{\lambda^{*4}} - T_0^4 \right)$$

a po číselném vyjádření

$$P = \pi \cdot 2 \cdot 10^{-4} \text{m} \cdot 10^{-2} \text{m} \cdot 5,67 \cdot 10^{-8} \text{J} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4} \cdot \left[ \frac{(2,8978 \cdot 10^{-3} \text{m} \cdot \text{K})^4}{(9,66 \cdot 10^{-7} \text{m})^4} - (293\text{K})^4 \right] = 28,854 \text{J} \cdot \text{s}^{-1}$$

b)

Jestliže vlákno ztrácí teplo pouze vyzařováním, pokles teploty  $dT$  vlákna nastane za časový interval  $dt$ , přičemž ze zákona zachování energie vyplývá vztah

$$P dt = -mc dT,$$

kde  $m$  je hmotnost vlákna.

Dosadíme-li z předešlého řešení za  $P$  a  $m$  vyjádříme pomocí hustoty, dostaneme relaci

$$\pi dl \sigma T^4 dt = -\rho \pi \frac{d^2}{4} lc dT.$$

Po úpravě rovnice (dosadíme za  $T$ ) a integraci získáme konečný vztah pro  $t$

$$t = \frac{d\rho c}{12\sigma} \left( \frac{1}{T_0^3} - \frac{\lambda^{*3}}{b^3} \right)$$

a po dosazení číselných hodnot platí pro čas  $t$

$$t = \frac{2 \cdot 10^{-4} \text{ m} \cdot 19 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} \cdot 154,88 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}}{12 \cdot 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ J} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}} \cdot \left[ \frac{1}{(293 \text{ K})^3} - \frac{(9,66 \cdot 10^{-7} \text{ m})^3}{(2,8978 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K})^3} \right] = 34,35 \text{ s}$$

### Příklad 7.2

Výstupní práce pro wolfram je 4,52 eV. Vypočítejte:

- jaká je mezní vlnová délka  $\lambda_0$  světla pro wolfram,
- jaká je maximální kinetická energie elektronů, jestliže vlnová délka dopadajícího světla je 200,0 nm,
- jaké je v tomto případě brzdné napětí  $U_0$  elektronů?

### Řešení:

a)

Z rovnice (7.16) a relace mezi vlnovou délkou a kmitočtem vyplývá vztah

$$\lambda_0 = \frac{hc}{\Phi}$$

a po číselném vyjádření

$$\lambda_0 = \frac{6,62 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}{4,52 \cdot 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J}} = 274 \text{ nm}.$$

b)

Ze vztahu (7.15) lze určit maximální energii  $E_{\max}$  elektronů, jestliže známe vlnovou délku záření a výstupní práci. Platí vztah

$$E_{\max} = h\nu - \Phi$$

a po dosazení

$$E_{\max} = \frac{6,62 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}{200 \cdot 10^{-9} \text{ m} \cdot 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J} \cdot \text{eV}^{-1}} - 4,52 \text{ eV} = 1,68 \text{ eV}.$$

c)



Brzdné napětí je v tomto případě definováno jako napětí potřebné k zastavení elektronu dané energie. Platí proto relace

$$U_0 = \frac{E_{\max}}{e}$$

$$\text{a } U_0 = 1,68\text{V}.$$

### Příklad 7.3

Rentgenové záření vlnové délky 0,2400nm prodělá Comptonův rozptyl a je detegováno pod úhlem 60° vzhledem ke směru dopadajícího svazku. Určete:

- vlnovou délku rozptýleného rentgenového záření,
- energii rozptýleného rentgenového záření,
- kinetickou energii rozptýlených elektronů.

### Řešení:

a)

Vlnová délka  $\lambda'$  může být určena ze vztahu (7.25) pro Comptonův posuv. Platí

$$\lambda' = \lambda + \frac{h}{m_0 c} (1 - \cos \vartheta).$$

Číselným dosazením dostaneme

$$\lambda' = 0,2400\text{nm} + 0,00243\text{nm}(1 - \cos 60^\circ) = 0,2412\text{nm}.$$

b)

Energie  $E'$  fotonu rentgenového záření může být nalezena přímo ze vztahu mezi energií a vlnovou délkou fotonu. Platí relace

$$E' = \frac{hc}{\lambda'}$$

a po dosazení

$$E' = \frac{6,62 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{0,2412 \cdot 10^{-9}} = 8,23 \cdot 10^{-16} \text{ J} = 5141 \text{ eV}.$$

c)

Z rovnice (7.19) pro zachování energie během srážky můžeme stanovit kinetickou energii  $E_k$  rozptýleného elektronu. Platí

$$E_k = E - E'$$

a po dosazení

$$E_k = 5167 - 5141 = 26\text{eV} ,$$

kde původní energii  $E$  fotonu jsme určili podle vztahu  $E = \frac{hc}{\lambda}$ .

## 8. Základy kvantové mechaniky

### 8.1 Vlnová povaha částic

V roce 1924 L. de Broglie předpověděl, že stejně jako elektromagnetické záření má vlnové i částicové vlastnosti, tak i známé částice (elektrony, protony apod.) mají nejen částicové vlastnosti, ale i vlnové vlastnosti.

V soulase s tímto předpokladem de Broglie navrhl vztah spojující vlnovou délku a hybnost elektronu ve tvaru

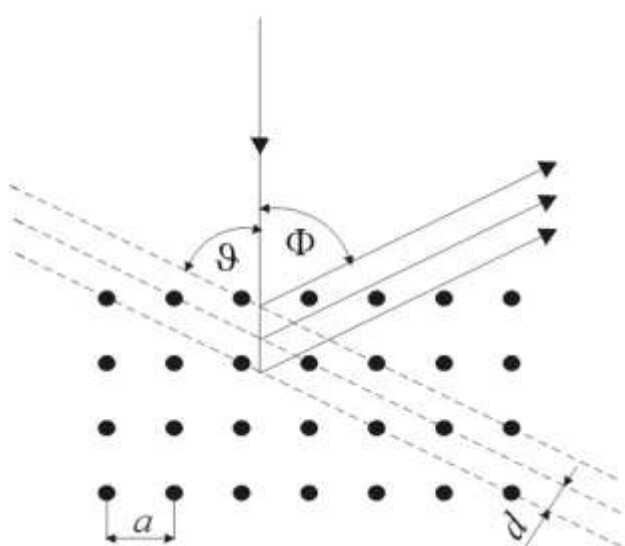
$$\lambda = \frac{h}{p} . \quad (8.1)$$

V minulé kapitole jsme stejný vztah ve tvaru  $p = \frac{h}{\lambda} = \hbar k$  použili pro přiřazení hybnosti  $p$  fotonu, známe-li jeho vlnovou délku.

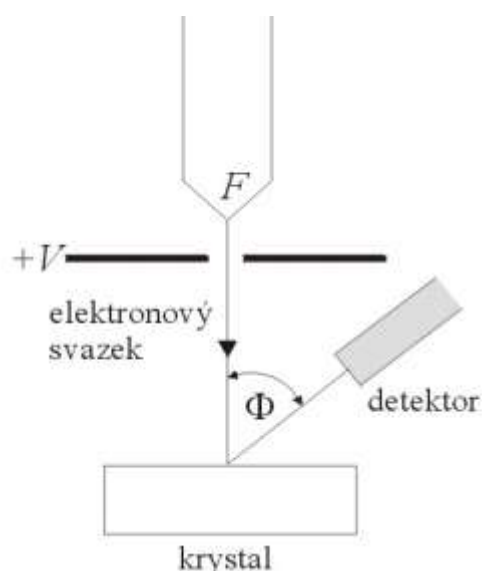
Vlnovou délku definovanou vztahem (8.1) nazýváme **de Broglieova vlnová délka**.

**Mikročástice mají také vlnové vlastnosti a můžeme jim přiřadit vlnovou délku.**

Hypotéza o vlnových vlastnostech částic byla pro elektrony potvrzena experimentálně v roce 1927 C.J.Davissonem a L.H.Germerem. Svazek elektronů emitovaný z rozžhaveného vlákna  $F$  a urychlený elektrickým polem byl v tomto experimentu rozptylován na niklovém terčíku, obr.8.1.



Obr.8.1



Obr.8.2

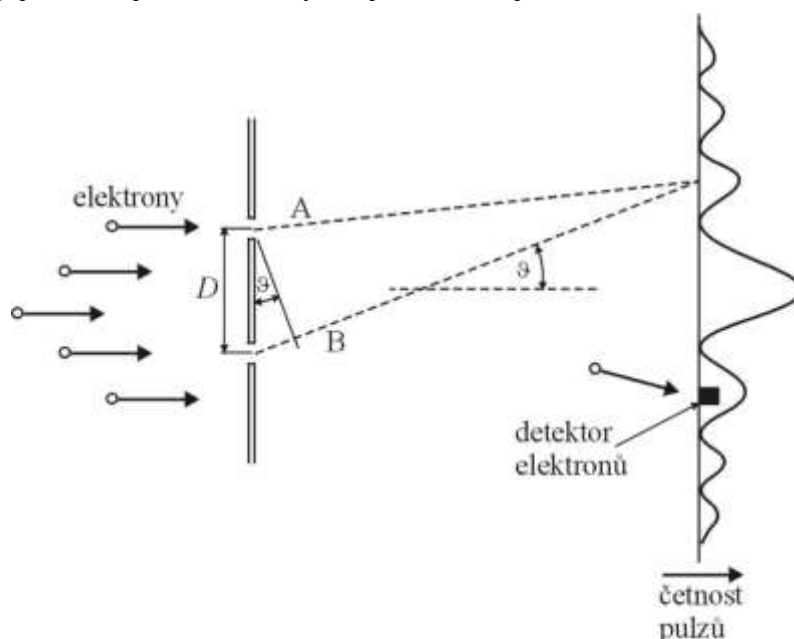
Intenzita elektronů rozptýlených na atomech niklu vykazovala maxima a minima v závislosti na úhlu rozptylu, takže výsledkem byl difrakční obrazec, který byl stejný jako v případě difrakce světla na mřížce nebo difrakce rentgenového záření na krystalu. Podobně jako je tomu v případě difrakce viditelného světla, elektrony jako vlny se rozptylují na atomech krystalu a při určitých úhlech odrazu mohou být pozorována interferenční maxima. Maxima nastávají při takových difrakčních úhlech  $\vartheta$ , (obr.8.2), které splňují Braggovu podmínku ve tvaru

$$2d \sin \vartheta = n\lambda$$

kde  $d$  je mezivrstevná vzdálenost, která souvisí s mřížkovým parametrem vztahem  $d = a \sin(\Phi/2)$ . Význam úhlu  $\Phi$  a  $\vartheta$  vyplývá z obrázku. Úhel  $\vartheta$  je měřen mezi dopadajícím svazkem elektronů a difragující rovinou.

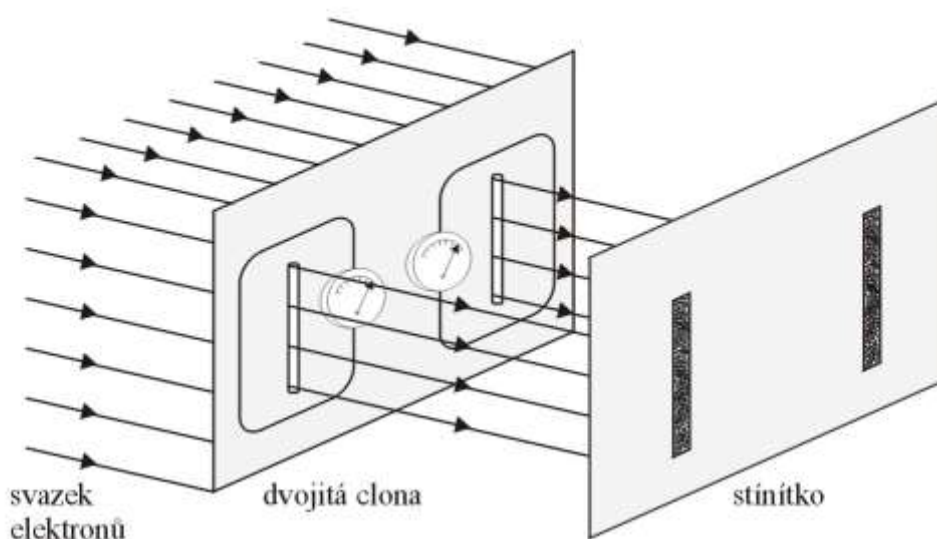
Z polohy maxim a minim byla zpětně určena vlnová délka elektronu, která číselně souhlasila s de Broglieovou vlnovou délkou, danou vztahem (8.1). Později byla difrakce potvrzena i pro další částice, protony a neutrony.

Nabízí se otázka, proč je možné pozorovat difrakční jevy dokazující vlnové vlastnosti částic pouze v oblasti mikrosvěta, tj. pro elektrony, protony a neutrony. Vysvětlení je zřejmé, vlnová délka difragujícího objektu musí být stejného řádu jako vzdálenosti mřížkových rovin v krys-



Obr.8.3

talické látky, na které difrakci provádíme. Vzhledem k malé hodnotě Planckovy konstanty ve vztahu (8.1) tuto podmínku splňují pouze částice jako elektron, proton a neutron. Pro makroskopické objekty bude vlnová délka příliš malá a tudíž jejich vlnová povaha nedokazatelná. Jiným experimentem, přímo potvrzujícím vlnovou povahu elektronů, je rozptyl na dvou štěrbinách.



Obr.8.4

Na obr.8.3 dopadá na stínítko se dvěma otvory o vzdálenosti  $D$  svazek elektronů. Elektronové svazky A a B prošlé štěrbinami spolu interferují, podobně jako je tomu při rozptylu viditelného světla na dvou štěrbinách. V závislosti na úhlu  $\vartheta$  jsou v místě detekce elektronů pozorována maxima a minima četnosti pulzů odpovídající četnosti dopadu elektronů.

Pomocí dvoušterbinového experimentu, jehož experimentální uspořádání je na obr.8.4, si objasníme jednu důležitou vlastnost částic a vlnění, a to **princip komplementarity**.

Na obr.8.4 je opět dvoušterbinový experiment, avšak na rozdíl od experimentu na obr.8.3 je kolem každé štěrbiny umístěno elektrické vinutí sloužící k detekci průletu elektronů štěrbinou. Proletí-li elektron štěrbinou, bude možné jeho průchod detegovat jako proudový impuls ve vinutí cívky. Podle toho, zdali budeme nebo nebudeme provádět detekci, dostaneme dva různé výsledky.

Neprovádíme-li detekci elektronů, dostaneme na fluorescenčním stínítku difrakční obrazec.

**Provádíme-li detekci elektronů, interferenční obrazec nevznikne.**

Výklad výsledků experimentu je následující. Detekce elektronů proudovými smyčkami (určení polohy elektronů) ovlivní výsledek experimentu. Změřením polohy elektronu, která je vlastností částice, se elektron projeví jako částice a jeho vlnové vlastnosti včetně interferenčního obrazce se současně nemohou projevit. Interferenční obrazec se proto neobjeví, stopy elektronů na stínítku budou náhodně rozloženy. Kdybychom chtěli pozorovat vlnové vlastnosti elektronů, nesměli bychom zároveň identifikovat jejich polohy, tedy určovat jejich částicové vlastnosti.

**Elektron se bude někdy projevovat jako částice, a jindy jako vlna, nikdy však nebude mít obě vlastnosti současně.**

Toto tvrzení, které je základem **principu komplementarity**, říká, že částice jako elektrony a fotony nelze úplně popsat buď jenom jako částice, nebo jenom jako vlnění. Oba aspekty chování je třeba vzít do úvahy současně, i když se současně nikdy neprojeví.

Vlnová povaha elektronů se využívá v elektronové mikroskopii, která patří mezi moderní analytické metody podávající informace o mikroskopické struktuře a složení zkoumaných materiálů, o jevech probíhajících na povrchu látky apod. **Transmisní elektronový mikroskop** zobrazuje objekt prozářením svazky elektronů a vytváří podobně jako optický mikroskop zvětšený obraz pomocí speciálních elektrostatických a magnetických čoček. Zvětšení, kterého se dosahuje elektronovým mikroskopem, je v rozmezí  $10^3 - 10^5$  a rozlišovací schopnost takového zařízení je až 0,2 nm.

## 8.2 Heisenbergovy relace neurčitosti

Existence vlnově částicového dualizmu přináší některé vážné důsledky. Základem newtonovské klasické mechaniky je vztah mezi působící silou a časovou změnou hybnosti obsažený v 2. Newtonově zákonu. Pro určení polohy a hybnosti částice v kterémkoliv okamžiku, musíme znát působící sílu spolu s polohou a rychlostí částice v některém okamžiku, tj. musíme znát počáteční podmínky. Jestliže však existuje současně vlnová i částicová povaha mikroobjektu, je v principu nemožné měřit polohu a rychlost částice současně s neomezenou přesností. Tento princip je označován jako **princip neurčitosti**.

**Polohu a rychlost částice nelze měřit současně s neomezenou přesností.**

Pro případ jednorozměrného pohybu částice, předpokládejme jej ve směru osy  $x$ , je součin neurčitostí  $\Delta x$  polohy a  $\Delta p$  hybnosti dán vztahem

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{1}{2} \hbar . \quad (8.2)$$

**Součin neurčitosti polohy a hybnosti je řádově roven malému kladnému číslu, Planckově konstantě.**

Pro lepší pochopení principu neurčitosti uveďme jednoduchý případ měření polohy a hybnosti částice. Nejčastěji měříme polohu objektu pomocí světelného paprsku – nasvítíme jej. Fyzikálně to znamená, že světlo se na objektu odrazí a pozorovatel určuje směr odraženého světla. Použijeme-li světlo o vlnové délce  $\lambda$ , můžeme vzhledem k difrakčním efektům, určit polohu objektu-částice s nejistotou v řádu vlnové délky. Chceme-li tuto nejistotu zmenšit, zvolíme světlo s co nejmenší vlnovou délkou, nejlépe rentgenové záření. Nepřesnost v určení polohy objektu můžeme tak v principu snížit až na téměř nulovou hodnotu, ovšem musíme si uvědomit, že jednotlivé fotony elektromagnetického záření nesou hybnost. Pro nasvícení objektu musíme předpokládat dopad alespoň jednoho fotonu. Velikost hybnosti fotonu se při rozptylu na objektu mění a vzhledem k platnosti zákona zachování hybnosti se změní i hybnost objektu. Jestliže vlnová délka fotonu je malá, pak podle vztahu (8.1) je jeho hybnost velká a také nejistota v určení hybnosti je velká.

**Neurčitost  $\Delta p$  určení hybnosti částice bude velká, jestliže  $\lambda$  je malá a současně neurčitost  $\Delta x$  v určení její polohy bude velká, jestliže  $\lambda$  je velká.**

Detailní analýzou problému dostaneme řádový odhad součinu neurčitostí polohy a hybnosti částice v řádu Planckovy konstanty  $h$ . Stejný výsledek získáme i v případě, kdy se na objekt-částici „podíváme“ svazkem elektronů. Takový proces probíhá v elektronovém mikroskopu. Protože pro elektron platí stejný vztah (8.1) mezi vlnovou délkou a hybností, budou také relace mezi neurčitostmi veličin stejné.

### 8.3 Vlnová funkce a Schrödingerova rovnice

De Broglieovu vlnu částice, například elektronu, v kvantové mechanice popisujeme pomocí vlnové funkce  $\Psi$ , která je obecně komplexní funkcí. Obvykle se zapisuje ve tvaru

$$\Psi(x, y, z, t) = \psi(x, y, z)e^{-i\omega t}, \quad (8.3)$$

kde  $\omega = 2\pi f$  je úhlová frekvence de Broglieovy vlny. Úhlová frekvence  $\omega$  souvisí s energií  $E$  částice vztahem  $E = \hbar\omega$ . Funkce  $\Psi$  obsahuje jak část, která je závislá pouze na souřadnicích (prostorová část), tak část závislou pouze na čase. Výraz  $e^{-i\omega t}$  popisuje vlnu úhlové frekvence  $\omega$  postupující ve směru vlnového vektoru  $\vec{k}$ , který je současně směrem vektoru  $\vec{p}$  částice. Dále se budeme téměř vždy zabývat pouze stacionárními ději a stacionárními stavy a z toho důvodu budeme pracovat jen s prostorovou částí vlnové funkce nezávislou na čase.

Jestliže v kvantové fyzice popisujeme částici pomocí vlnové  $\Psi$  funkce, nikoliv pomocí souřadnice a hybnosti, nabízí se otázka, jaký význam má tato vlnová funkce. Podobně jako světelná vlna, pro niž kvadrát amplitudy určuje intenzitu vlny a tedy pravděpodobnost výskytu fotonu, také **de Broglieova vlna je vlnou pravděpodobnosti**. Fyzikální význam má tedy nikoliv samotná vlnová funkce, ale veličina  $|\Psi|^2$ , která má význam **hustoty pravděpodobnosti**.

**Pravděpodobnost výskytu částice v malém objemu  $dV = dx dy dz$  je úměrná kvadrátu absolutní hodnoty vlnové funkce  $\Psi$ .**

Protože vlnová funkce je obecně komplexní, vypočítáme kvadrát vlnové funkce podle vztahu

$$\Psi^2 = \Psi^*\Psi,$$

kde  $\Psi^*$  je komplexně sdružená funkce k  $\Psi$ . Platí tedy relace

$$|\Psi|^2 = \psi e^{i\omega t} \cdot \psi e^{-i\omega t} = |\psi|^2 \quad (8.4)$$

Jedná-li se o jednu částici, která se vyskytuje v nějakém konkrétním objemu  $V$ , musí platit, že pravděpodobnost jejího výskytu v celém prostoru je rovna jedné (pravděpodobnost se změní v jistotu). Funkce  $\Psi$  musí splňovat podmínku

$$\int_V |\Psi|^2 dx dy dz = 1. \quad (8.5)$$

Vztah (8.5) se nazývá **normovací podmínka**.

V klasické mechanice je základním zákonem dynamiky 2. Newtonův zákon. Pro hmotný bod o hmotnosti  $m$  v poli síly  $\vec{F}$  řešíme diferenciální rovnici ve tvaru

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F} \quad .$$

V případě kvantové mechaniky je obdobnou rovnicí Schrödingerova rovnice pro vlnovou funkci  $\Psi$ . Často, pro zjednodušení, se budeme zabývat případem, kdy částice s hmotností  $m$  se pohybuje ve směru osy  $x$  v takovém silovém poli, kde působení síly můžeme vyjádřit pomocí změny potenciální energie  $E_p(x)$ . Schrödingerovu rovnici pak můžeme psát v jednoduchém tvaru

$$\frac{d^2 \Psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} [E - E_p(x)] \Psi = 0 \quad , \quad (8.6)$$

kde  $E$  je celková mechanická (kinetická a potenciální) energie částice. Schrödingerovu rovnici nelze odvodit, je základním principem. Podobně jako světelné vlny jsou popisovány Maxwellovými rovnicemi, mechanické vlny na struně jsou popisovány rovnicemi klasické mechaniky, de Broglieovy vlny jsou popsány Schrödingerovou rovnicí.

### Co přináší řešení Schrödingerovy rovnice.

Podíváme-li se na tvar rovnice (8.6), je zřejmé, že se jedná o diferenciální rovnici 2. řádu. Jejím řešením bude konkrétní tvar vlnové funkce, která umožňuje popsat pravděpodobnost výskytu částice. Dále uvidíme, že řešením Schrödingerovy rovnice můžeme při známé potenciální energii určit také celkovou energii částice. Za předpokladu, že potenciální energie nezávisí na čase, budou řešením pouze **stacionární stavy částice** charakterizované určitými (vlastními) hodnotami energie. Obecně těchto stavů může být více, někdy nekonečně mnoho.

## 8.4 Volná částice

Je-li  $E_p(x)$  v rovnici (8.6) rovna nule, pak se jedná o volnou částici a řešení Schrödingerovy rovnice by mělo tomuto případu odpovídat. Volná částice je taková částice, na kterou nepůsobí žádná síla a její celková energie  $E$  je rovna kinetické energii  $E_k = \frac{p^2}{2m}$ . Rovnice (8.6) se zjednoduší na tvar

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} \left( \frac{p^2}{2m} \right) \psi = 0 \quad . \quad (8.7)$$

Po úpravě rovnice, dosazením  $\frac{1}{\lambda} = \frac{p}{\hbar}$  a s použitím vztahů  $\hbar = \frac{h}{2\pi}$  a  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  dostaneme jednoduchý tvar diferenciální rovnice

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} + k^2 \psi = 0 \quad , \quad (8.8)$$

jejíž řešení známe z klasické mechaniky.

Rovnice (8.7), event. (8.8) je **Schrödingerova rovnice pro volnou částici** a má obecné řešení ve tvaru

$$\psi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx} \quad , \quad (8.9)$$

kde  $A, B$  jsou libovolné konstanty.

Určením konstant  $A, B$  z normovací podmínky se nebudeme zabývat.

Všimněme si, že v této úloze o pohybu volné částice, jsme se nesetkali ze žádným omezením velikosti vlnového vektoru  $\vec{k}$ . Energie tudíž může nabývat libovolných hodnot. Říkáme, že energie volné částice není kvantovaná.

**Energie volné částice může nabývat libovolných hodnot a tudíž není kvantovaná.**

Obecné řešení Schrödingerovy rovnice pro volnou částici (po dosazení do vztahu (8.3)) má tvar

$$\Psi(x, t) = \psi(x)e^{-i\omega t} = Ae^{i(kx - \omega t)} + Be^{-i(kx + \omega t)} . \quad (8.10)$$

**Nalezení hustoty pravděpodobnosti  $|\psi|^2$  pro volnou částici**

Řešením rovnice (8.10) je postupná vlna. První člen v rovnici představuje vlnu šířící se v kladném směru osy  $x$ , druhou v záporném. Volbou konstanty  $B = 0$  převedeme obecné řešení pouze na vlnu v kladném směru osy  $x$ . Řešení je pak ve tvaru

$$\Psi = Ae^{i(kx - \omega t)} = \psi_0(x)e^{-i\omega t} , \quad (8.11)$$

kde jsme celou prostorovou část funkce  $\Psi$  označili jako  $\psi_0(x)$ .

$$\psi_0(x) = Ae^{ikx} .$$

Pro určení hustoty pravděpodobnosti je třeba určit kvadrát absolutní hodnoty vlnové funkce  $\Psi(x)$ . Po dosazení dostaneme

$$|\psi(x)|^2 = \psi_0^2 . \quad (8.12)$$

**Pravděpodobnost výskytu volné částice pohybující se v kladném směru osy  $x$  je stejná pro všechny hodnoty  $x$ . Žádná poloha částice není preferována.** Toto tvrzení je plně v souladu s relacemi neurčitosti. Jestliže předpokládáme, že hybnost částice je určena přesně, pak podle relací neurčitosti je nemožné určit polohu částice.

## 8.5 Elektron v jednorozměrné potenciálové jámě

Představme si strunu určité délky upevněnou na obou koncích. Začne-li se od jednoho konce k druhému šířit postupné vlnění, odrazí se na pevném konci a dojde ke vzniku stojatého vlnění. Tyto stojaté vlny mají přesně definované **diskrétní frekvence**. Omezení kmitavého pohybu na určitý prostor vede v případě mechanického kmitání ke **kvantování pohybu**, ke vzniku pouze určitých pohybových stavů definovaných hodnotami frekvence.

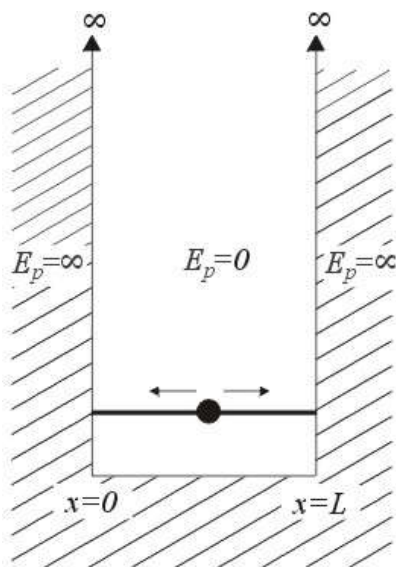
V předchozím odstavci jsme se odvolávali na paralelu mezi de Broglieovými, světelnými a mechanickými vlnami. Závěr, ke kterému jsme nyní došli, lze zobecnit i na de Broglieovy vlny, pouze stavy elektronu budeme popisovat hodnotami energie, nikoliv frekvence. Přitom využijeme vztah pro energii  $E = \hbar\omega$ .

**Prostorové omezení pohybu vede ke kvantování, tj. k realizaci pouze určitých vybraných stavů s diskrétními hodnotami energie.**



Uvažujme nyní elektron uvězněný v omezeném prostoru, který nazveme **potenciálová jáma**. Takovou past představuje pro elektron například vodíkový atom, v kterém je elektron vázán elektrostatickými silami k jádru. Atom můžeme v takovém případě formálně nahradit potenciálovou jámou, jejíž výška je dána velikostí potenciální energie  $E_p$  elektronu v silovém poli jádra-protonu a šířka je určena rozměry atomu.

Pro elektron hmotnosti  $m_e$  v jednorozměrné potenciálové jámě řešíme Schrödingerovu rovnici ve tvaru



$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m_e}{\hbar^2} [E - E_p(x)]\psi = 0 \quad , \quad (8.13)$$

kde  $E_p$  je rovna 0 uvnitř jámy a je nekonečně velká vně jámy,  $E$  je energie elektronu. Jáma je znázorněna na obr.8.5.

Pro lepší pochopení problému chování elektronu, přesněji řečeno de Broglieovy vlny elektronu v atomu využijeme analogii se stojatou vlnou konečné délky. Necht' orientace struny je ve směru osy  $x$ . Stejně jako je výskyt elektronu omezen hranicemi potenciálové jámy, tak na upevněné struně jsou oba konce pevné a musí v nich vzniknout uzly vlny. Stojaté vlny, stavy, ve kterých může struna délky  $L$  kmitat, jsou takové, že splňují podmínku

Obr.8.5

$$L = n \frac{\lambda}{2} \quad , \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

(8.14)

Hodnoty celého čísla  $n$  popisují jednotlivé diskrétní stavy kmitající struny. V jazyku kvantové mechaniky je  $n$  **kvantové číslo**.

Každý stav kmitající struny můžeme popsat jeho okamžitou výchylkou ve směru osy  $y$ . Platí pro ni vztah

$$y_n = y_0 \sin kx = y_0 \sin \frac{2\pi}{\lambda} x = y_0 \sin \left( \frac{n\pi}{L} \right) x \quad . \quad (8.15)$$

Jestliže se nyní vrátíme k de Broglieovým vlnám elektronu, můžeme opět předpokládat, že elektron je nucen pohybovat se pouze v jistém rozmezí hodnot  $x$ , opět mezi  $x = 0$  až  $x = L$ . Tyto podmínky modelově pro elektron vytvoříme tak, že jej umístíme do jednorozměrné potenciálové jámy šířky  $L$  a nekonečné hloubky.

V obr.8.5 je ve směru osy  $x$  umístěna potenciálová jáma mezi 0 až  $L$ . Na ose  $y$  je vyznačen průběh potenciálu, který je nulový uvnitř jámy a vně nabývá nekonečné hodnoty. Nekonečně velký potenciál představuje pro elektron, který se dostane na stěnu jámy nepřekonatelnou překážku, (nekonečně velká síla, která ho obrátí nazpět). Takový elektron se nazývá **vázaný**.

Stejně jako pro případ struny, také vlna popisující elektron v jednorozměrné jámě, musí mít pro  $x = 0$  a  $x = L$  uzly. Podmínka daná vztahem (8.14) musí platit i pro de Broglieovu vlnu.

Pro vlnovou délku de Broglieovy vlny platí vztah (8.1)  $\lambda = \frac{h}{p}$ , kde  $p$  je velikost hybnosti elektronu a pro kinetickou energii elektronu platí vztah  $E_k = \frac{p^2}{2m_e}$ . Celková energie elektronu uvnitř jámy je  $E = E_k$ , protože  $E_p = 0$ .

Po dosazení za hybnost do vztahu pro vlnovou délku dostaneme relaci

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2m_e E}} \quad (8.16)$$

a s využitím podmínky (8.14) získáme vztah pro jednotlivé diskrétní hodnoty energie elektronu. Platí relace

$$E_n = \left( \frac{h^2}{8m_e L^2} \right) n^2, \text{ kde } n = 1, 2, 3, \dots \quad (8.17)$$

Elektron je vázaný a jeho energie může nabývat pouze některých hodnot, daných vztahem (8.17).

V základním stavu ( $n = 1$ ) má elektron nejmenší energii. Do excitovaného stavu (stavu s větší energií) může přejít pouze tehdy, jestliže je mu dodána energie, která je rovna rozdílu energií excitovaného a základního stavu. Jednou z možností, jak může elektron energii získat, je absorpce fotonu. Pro **přechod ze základního do excitovaného stavu** platí vztah

$$E_m - E_1 = h\nu \quad (8.18)$$

nebo

$$E_m - E_1 = \hbar\omega,$$

kde  $E_m$  označuje energii excitovaného stavu a  $E_1$  základního. Elektron obvykle vydrží v excitovaném stavu jen velice krátkou dobu, a pak se vyzářením fotonu s energií  $h\nu$  vrací zpět. K přechodu může v principu dojít mezi kterýmikoliv dvěma stavy, které také označujeme jako **hladiny energie**.

**Přechody elektronů mezi jednotlivými energetickými stavy se dějí tak, že energie vyzářeného nebo pohlceného fotonu  $h\nu$  je rovna rozdílu energií obou stavů.**

### Vlnové funkce pro jednotlivé energetické stavy

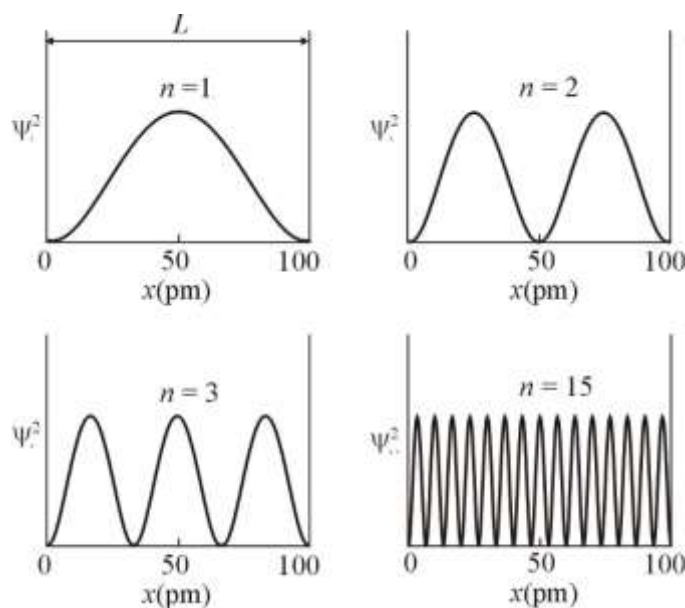
Řešíme-li Schrödingerovu rovnici pro elektron v nekonečně hluboké potenciálové jámě šířky  $L$ , je řešení analogicky se strunou ve tvaru

$$\psi_n(x) = \psi_{n0} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (8.19)$$

Více než samotné vlnové funkce  $\psi_n(x)$  nás zajímá hustota pravděpodobnosti  $\psi_n^2(x)$ , která udává pravděpodobnost, že se elektron vyskytuje v okolí bodu se souřadnicí  $x$ . Kdyby platila pro chování elektronu v potenciálové jámě klasická fyzika, byla by zřejmě pravděpodobnost výskytu elektronu pro všechna  $x$  stejná. Podle kvantové mechaniky je pravděpodobnost výskytu elektronu vztažená na jednotku šířky jámy rovna

$$\psi_n^2(x) = \psi_{0n}^2 \sin^2\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (8.20)$$

pro  $x$  z intervalu  $0 \leq x \leq L$ .



Obr.8.6

Rozložení hustoty pravděpodobnosti pro  $n = 1, 2, 3, 15$  je na obr.8.6. Elektron se bude s největší pravděpodobností vyskytovat v nekonečně hluboké potenciálové jámě v místech, kde je pravděpodobnost největší.

Zatím jsme používali modelovou představu nekonečně hluboké potenciálové jámy. Reálné situaci mnohem lépe odpovídá **potenciálová jáma konečné hloubky**. Potenciálová jáma je opět volena tak, že její šířka ve směru osy  $x$  je  $L$  a hloubka jámy je rovna  $E_p$ .

Řešení Schrödingerovy rovnice je v tomto případě složitější. Překvapením je zejména průběh hustoty pravděpodobnosti v závislosti na  $x$ . Vyplývá z něho, že **elektron se může vyskytovat s nenulovou pravděpodobností i za hranicemi jámy**.

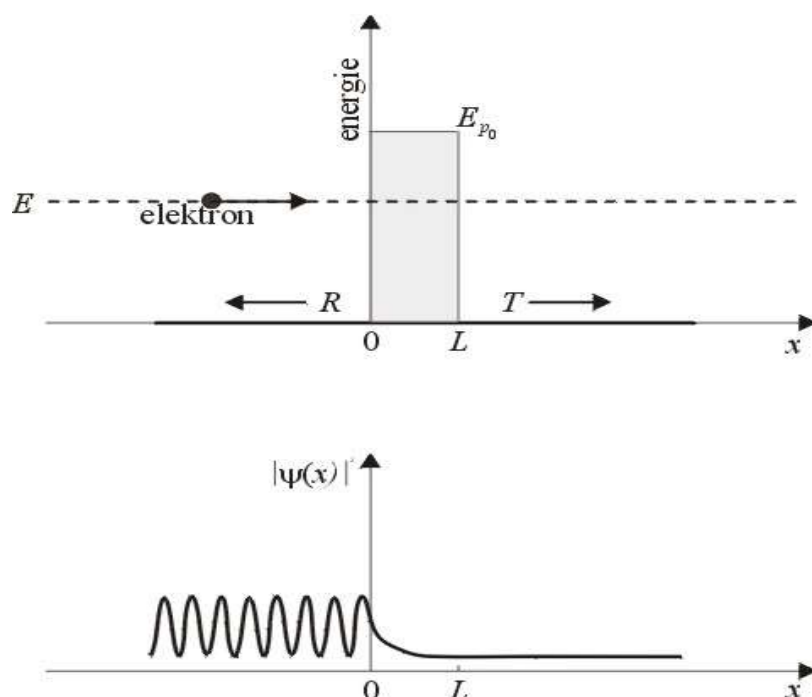
Elektron může tunelovat konečně hlubokou potenciálovou jámu.

Dále řešením Schrödingerovy rovnice zjistíme, že zatímco v případě nekonečně hluboké jámy existuje nekonečně mnoho řešení (nekonečný počet stavů), v případě jámy konečné hloubky je počet vázaných stavů elektronu je konečný. Stavů s energií větší než je hloubka jámy odpovídají volnému elektronu a nejsou kvantované.

V současné době je již možné vytvářet elektronové pasti (potenciálové jámy) uměle. Tato moderní technologie se uplatňuje například v podobě **kvantových teček a bude** použitelná při výrobě počítačových čipů.

Obecným případem je trojrozměrná potenciálová jáma konečné hloubky, ve které může být elektron zachycen.

Řešení je superpozicí tří řešení pro jednorozměrné jámy a energie elektronu je závislá na třech kvantových číslech  $n_x, n_y, n_z$ . Trojrozměrnou potenciálovou jámou konečné hloubky se budeme zabývat v případě elektronu ve vodíkovém atomu.



Obr.8.7

## 8.6 Tunelování

Jestliže elektron při svém pohybu narazí na potenciálovou bariéru, jejíž výška je větší než jeho energie, pak podle klasické fyziky se odrazí směrem nazpět, a za hranicí jámy se nemůže v žádném případě objevit. Podle kvantové fyziky existuje kromě odrazu de Broglieovy vlny provázející elektron také nenulová pravděpodobnost, že vlna pronikne bariérou. Na obr.8.7 je znázorněna jak potenciálová bariéra výšky  $E_p$  a šířky  $L$  ve směru osy  $x$ , tak průběh hustoty pravděpodobnosti před a za bariérou. Vlevo od bariéry vznikne superpozicí dopadající a odražené vlny stojatá vlna. Písmenem  $R$  je na obrázku označena odražená, písmenem  $T$  pronikající vlna.

Vpravo od bariéry se elektron v dostatečné vzdálenosti vyskytuje ve všech místech se stejnou pravděpodobností. Takové chování odpovídá volné částici.

Vysvětlení průchodu elektronu bariérou spočívá v řešení Schrödingerovy rovnice a skládá se ze tří částí: před, uvnitř a za bariérou. Význam řešení se ukazuje zejména ve stanovení **koefi-**

cientu  $T$  průniku bariérou. Pro tento koeficient můžeme přibližně psát vztah

$$T \approx e^{-2\chi L}, \quad (8.21)$$

kde

$$\chi = \sqrt{\frac{2m_e(E_p - E)}{\hbar^2}}. \quad (8.22)$$

$E$  je energie elektronu.

Pomocí tunelového jevu, který je čistě kvantovým jevem, byl například objasněn mechanismus přeměny  $\alpha$  v atomových jádrech. Jádrem jsou emitována héliová jádra s energií, která je menší než je výška potenciálové bariéry vytvářené jádrem, a bez existence nenulové pravděpodobnosti tunelového jevu by částice  $\alpha$  nikdy nemohla jádro opustit a rozpad jádra by se nemohl realizovat.

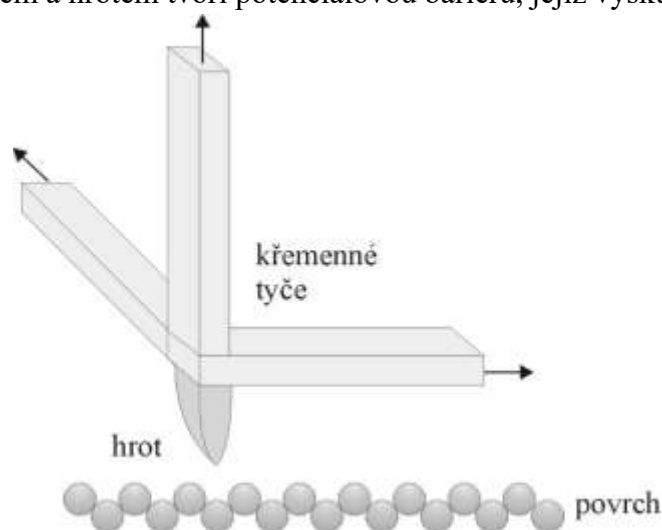
Tunelování má také řadu praktických aplikací, například v elektrotechnice. **Tunelová dioda** je polovodičový prvek, ve kterém změnou výšky potenciálové bariéry lze ovlivnit proud tunelujících elektronů. Prvek se vyznačuje velmi rychlou odezvou.

Dalším významným technickým zařízením založeném na tunelovém jevu a určeným k zobrazení povrchů materiálů je **rastrovací tunelový mikroskop STM** (z angl. scanning tunneling microscope).

Rastrovací tunelový mikroskop využívá skutečnosti, že vlnová délka elektronu je mnohem menší než vlnová délka viditelného světla, a tudíž dovoluje zobrazit povrchy materiálů s podstatně větším rozlišením než optický mikroskop. Rozlišovací schopnost tohoto mikroskopu je tak vysoká, že pozorujeme rozložení atomů na povrchu materiálu.

Mikroskop tvoří tři křemenné tyče, které vedou ostrý vodivý hrot nad povrchem materiálu. Hrot je tak ostrý, že jeho vrchol tvoří nanejvýš několik atomů. Schématické znázornění je na obr.8.8.

Mezera mezi povrchem a hrotem tvoří potenciálovou bariéru, jejíž výšku můžeme přiloženým



Obr.8.8

elektrickým napětím (řádově mV) měnit a ovlivňovat tak proud elektronů, které bariérou tunelují z povrchu do hrotu. Jestliže udržujeme proud konstantní, zachovává se i vzdálenost mezi hrotem a povrchem a hrot při svém pohybu po povrchu kopíruje jeho reliéf. Křemen, z kterého je materiál vodičích tyčí, vykazuje piezoelektrické vlastnosti. To znamená, že přiložením elektrického napětí se nepatrně mění jeho rozměry. Piezoelektrický jev se v případě tunelového mikroskopu využívá pro plynulou změnu vzdálenosti ve směru  $x$ ,  $y$  i  $z$ .

## 8.7 Harmonický oscilátor

Harmonický oscilátor je jedním z nejužívanějších modelů jak v klasické, tak v kvantové mechanice. Klasický oscilátor si představujeme jako kuličku hmotnosti  $m$  upevněnou na pružině, na kterou působí síla velikosti  $F = -kx$ , kde  $x$  označuje vychýlení z rovnovážné polohy. Pro takový oscilátor můžeme v klasické fyzice řešit pohybovou rovnici a jejím řešením dostaneme vztah pro vlastní frekvenci  $\omega$  oscilátoru vztah  $\omega = \sqrt{k/m}$ . Harmonický oscilátor lze charakterizovat potenciální energií  $E_p = \frac{1}{2}kx^2$ . Jestliže vychýlíme oscilátor ze stavu rovnováhy charakterizované minimem potenciální energie, snaží se vrátit do původní polohy. Model harmonického oscilátoru je vhodný například pro popis chování dvouatomové molekuly  $H_2$ , i když v reálné situaci tvar potenciální energie vodíkové molekuly přesně nesouhlasí s uvedeným výrazem.

Správné řešení harmonického oscilátoru v oblasti mikrosvěta přináší pouze kvantová mechanika.

Řeší se Schrödingerova rovnice ve tvaru

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{1}{2}kx^2\psi = E\psi \quad . \quad (8.23)$$

Pro jednoduchost opět předpokládáme pouze lineární harmonický oscilátor (kmity se dějí jen v jednom směru).

Matematickým řešením, které je poměrně komplikované a neuvádíme jej, lze zjistit, že energie harmonického oscilátoru je kvantovaná.

**Energie harmonického oscilátoru je kvantovaná a nabývá hodnot**

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega \quad . \quad (8.24)$$

Na rozdíl od klasického harmonického oscilátoru, pro který je nejmenší energie  $E_0 = 0$ , základní stav kvantového oscilátoru má energii  $\frac{1}{2}\hbar\omega$ .

## Příklady ke kap.8

### Příklad 8.1

Elektron s kinetickou energií 6,0 eV má rychlost  $1,45 \cdot 10^6 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ . Předpokládejte, že se elektron pohybuje ve směru osy  $x$  a že můžeme měřit jeho rychlost s přesností 0,50%. Jaká je nejmenší neurčitost (podle Heisenbergových relací neurčitosti), s kterou můžete současně měřit polohu elektronu podél osy  $x$  ?

Řešení:

Rychlost elektronu je mnohem menší než je rychlost světla, a proto není uvažovat relativistickou opravu. Hybnost určíme z nerelativistického vztahu

$$p_x = m_e v = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot 1,45 \cdot 10^6 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1} = 1,32 \cdot 10^{-24} \text{ kg}\cdot\text{m}\cdot\text{s}^{-1}.$$

Relativní neurčitost  $\Delta p_x$  hybnosti  $p_x$  je rovna relativní neurčitosti rychlosti a je číselně  $6,6 \cdot 10^{-27} \text{ kg}\cdot\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ . Podle Heisenbergova principu neurčitosti platí pro minimální neurčitost ve stanovení polohy vztah

$$\Delta x \approx \frac{\hbar}{\Delta p_x}$$

a po dosazení

$$\Delta x = \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}/2\pi}{6,6 \cdot 10^{-27} \text{ kg}\cdot\text{m}\cdot\text{s}^{-1}} = 1,60 \cdot 10^{-8} \text{ m} = 16 \text{ nm}.$$

Tato neurčitost je mnohonásobně větší než rozměr atomu.

### Příklad 8.2

Svazek elektronů o energii 5,2 eV dopadne na bariéru výšky 7 eV a šířky  $700 \cdot 10^{-12} \text{ m}$ . Určete koeficient průniku bariérou.

Řešení:

Pro výpočet koeficientu průniku  $T$  využijte vztah (8.21)

$$T \approx e^{-2\chi L}.$$

Nejdříve vypočteme  $\chi$  ze vztahu (8.22)

$$\chi = \sqrt{\frac{2m_e(E_p - E)}{\hbar^2}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot (7,0 - 5,2) \text{ eV} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J/eV}}{(1,054 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s})^2}} = 7,518 \cdot 10^9 \text{ m}^{-1}.$$

Veličina  $2\chi L$  je pak

$$2\chi L = 2 \cdot 7,518 \cdot 10^9 \text{ m}^{-1} \cdot 700 \cdot 10^{-12} \text{ m} = 10,5$$

a koeficient propustnosti

$$T = e^{-10,5} = 27 \cdot 10^{-6}.$$

Z každého milionu elektronů jich protuneleje přibližně 27.

## 9. Vodíkový atom

### 9.1 Emisní a absorpční spektra atomů

Každý plyn, který je vhodně excitován (je mu dodána energie), například elektrickým polem, emituje záření. V dostatečně zředěném plynu jsou atomy nebo molekuly plynu od sebe natolik vzdáleny, že k interakci dochází jen během nahodilých srážek. V takovém případě lze očekávat, a experimenty to potvrzují, že emitované záření bude charakteristické pro jednotlivé atomy nebo molekuly. Necháme-li záření procházet hranolem, rozloží se na jednotlivé vlnové délky a na stínítku můžeme registrovat jednotlivé spektrální čáry (odpovídající jednotlivým vlnovým délkám záření) příslušné atomům nebo molekulám plynu.

**Emitované spektrum je čárové a charakteristické pro atomy určitého prvku.**

Každý prvek se vyznačuje svým charakteristickým spektrem záření, které emituje v plynné fázi. Prochází-li naopak plynem bílé světlo, pohlcuje plyn záření s vlnovými délkami, které se vyskytují v jeho emisním spektru. Vzniká **absorpční spektrum**, které je tvořeno tmavými čarami na světlém pozadí. Tmavé čáry jsou v místech spektra, která odpovídají chybějícím vlnovým délkám.

Na konci 19. století bylo zjištěno, že spektrální čáry emisních spekter atomů se dají podle vlnových délek seřadit do určitých skupin, nazvaných **spektrální série**, přičemž vlnové délky v každé sérii se dají vyjádřit jednoduchým vzorcem. První série, ve viditelné oblasti světla, byla objevena J.J. Balmerem při studiu spektra atomu vodíku. Vlnově  $\sigma$  v Balmerově sérii vodíku je dán vztahem

$$\sigma = \frac{1}{\lambda} = R_{\infty} \left( \frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad n = 3, 4, 5, \dots \quad \text{Balmerova série} \quad . \quad (9.1)$$

Veličina  $R_{\infty}$ , nazývaná Rydbergova konstanta, má hodnotu  $R_{\infty} \cong 1,097 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}$ .

Balmerova série obsahuje vlnové délky záření v oboru viditelného spektra záření emitovaného atomu vodíku. Spektrální čáry vodíku v ultrafialové a infračervené oblasti tvoří další spektrální série. Lymanova série v ultrafialové oblasti obsahuje vlnové délky, pro něž lze psát vztah

$$\sigma = \frac{1}{\lambda} = R_{\infty} \left( \frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad n = 2, 3, 4, \dots \quad \text{Lymanova série} \quad . \quad (9.2)$$

V infračervené oblasti záření byly nalezeny tři spektrální série, jejichž čáry mají vlnové délky určené vztahy

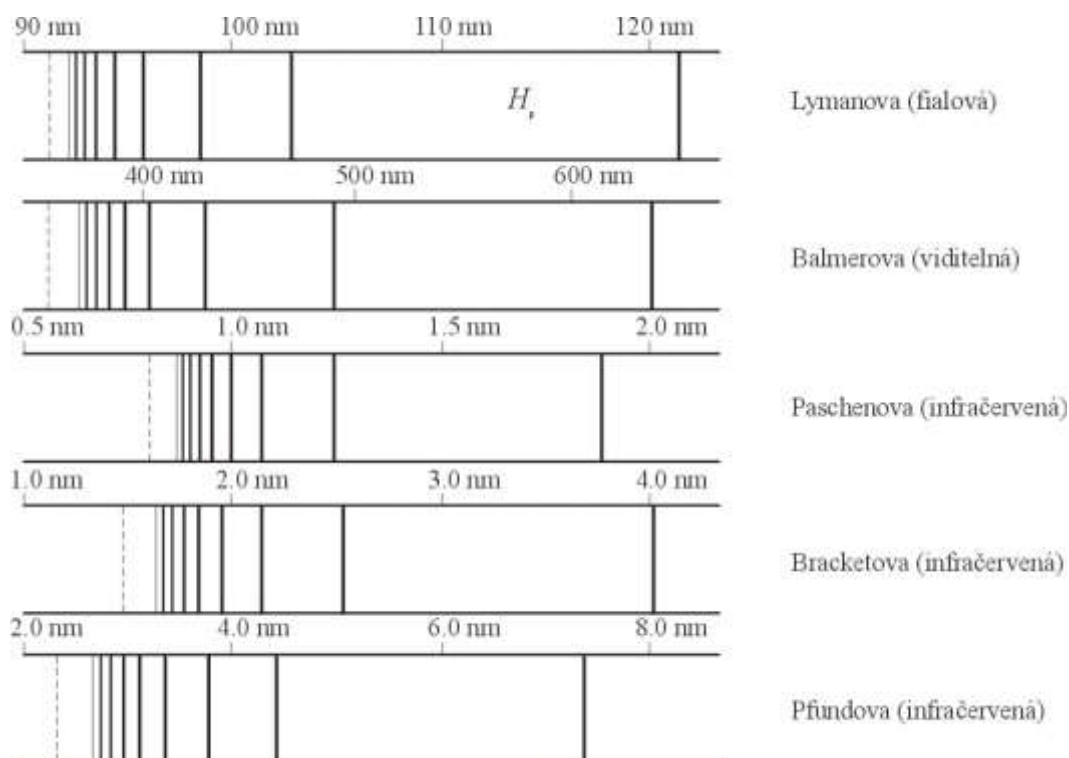
$$\sigma = \frac{1}{\lambda} = R_{\infty} \left( \frac{1}{3^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad n = 4, 5, 6, \dots \quad \text{Paschenova série} \quad , \quad (9.3)$$

$$\sigma = \frac{1}{\lambda} = R_{\infty} \left( \frac{1}{4^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad n = 5, 6, 7, \dots \quad \text{Brackettova série} \quad , \quad (9.4)$$

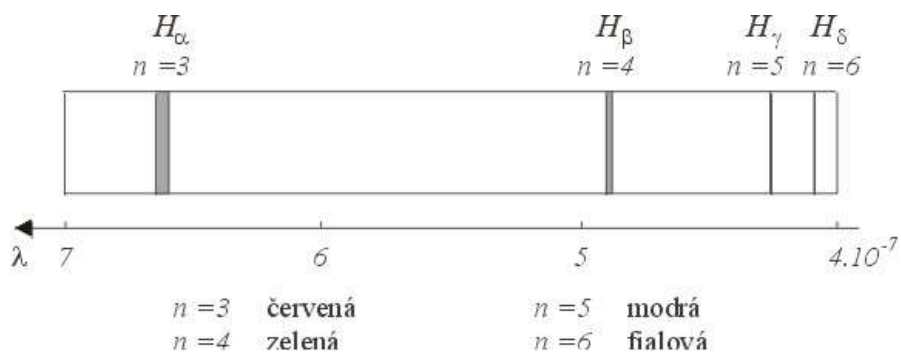


$$\sigma = \frac{1}{\lambda} = R_{\infty} \left( \frac{1}{5^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad n = 6, 7, 8, \dots \quad \text{Pfundova s\u00e9rie .} \quad (9.5)$$

Spektr\u00e1ln\u00ed s\u00e9rie atomu vod\u00edku jsou na obr.9.1a,b.



Obr.9.1a



Obr.9.1b

Ve viditeln\u00e9 \u010d\u00e1sti spektra (Balmerova s\u00e9rie) jsou \u010dty\u00ed \u010d\u00e1ry, jasn\u00e1 \u010derven\u00e1 \u010d\u00e1ra m\u00e1 vlnovou d\u00e9lku  $\lambda_c = 6,561 \cdot 10^{-7} \text{ m}$  a její hodnotu dostaneme s použit\u00edm vztahu (9.1) pro  $n = 3$ . Za n\u00ed n\u00e1sleduje jasn\u00e1 modrozelen\u00e1 \u010d\u00e1ra s vlnovou d\u00e9lku  $\lambda_m = 4,860 \cdot 10^{-7} \text{ m}$  pro  $n = 4$ . S klesaj\u00edc\u00ed vlnovou d\u00e9lku se \u010d\u00e1ry v ultrafialov\u00e9 oblasti zhu\u0161\u0165uj\u00ed a s\u00e9rie kon\u010d\u00ed hranou p\u0159i  $\lambda = 3,645 \cdot 10^{-7} \text{ m}$ , kter\u00e1 vypl\u00fdv\u00e1 ze vzorce (9.1) pro  $n \rightarrow \infty$ .

Z\u00e1konitosti, kter\u00fdmi se \u0159\u00edd\u00ed vlnov\u00e9 d\u00e9lky spektr\u00e1ln\u00edch \u010d\u00e1r vod\u00edku vysv\u011btlil na za\u010d\u00e1tku minul\u00e9ho stolet\u00ed Bohr ve sv\u00e9m modelu atomu vod\u00edku. **Bohr\u00fdv model atomu** představuje prv\u00ed aplikaci

kvantových představ na atom. Jedním z Bohrových postulátů bylo tvrzení o přechodech elektronů v atomu.

Přechod atomu z jednoho stacionárního stavu do jiného se děje pohlcením nebo vyzářením fotonu, jehož energie je rovna

$$h\nu = h \frac{c}{\lambda} |E_f - E_i| \quad (9.6)$$

$E_i, E_f$  jsou energie výchozího, resp. konečného stavu.

Bohrova teorie sice dovedla vysvětlit původ a vlnovou délku spektrálních čar atomu vodíku, ale ukázala se jako nevyhovující pro vysvětlení chování složitějších víceelektronových systémů. Také nedovedla správně stanovit intenzitu spektrálních čar a jejich jemnou strukturu.

## 9.2 Kvantověmechanické řešení atomu vodíku

Vodíkový atom se skládá z protonu, částice s nábojem  $+e$  a z elektronu, částice s nábojem  $-e$ , která je 1836 krát lehčí než proton. Trojrozměrná Schrödingerova rovnice popisující chování elektronu v elektrostatickém poli vytvářeném protonem (proton předpokládáme v klidu) má tvar

$$\Delta\psi + \frac{2m_e}{\hbar^2} (E - E_p)\psi = 0 \quad (9.7)$$

a rozepsaná v kartézských souřadnicích

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} + \frac{2m_e}{\hbar^2} (E - E_p)\psi = 0 \quad (9.8)$$

Potenciální energie  $E_p$  je elektrostatická potenciální energie náboje  $-e$  ve vzdálenosti  $r$  od náboje  $+e$ . Je dána vztahem

$$E_p = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (9.9)$$

Protože  $E_p$  je funkcí  $r$ , nikoliv  $x, y, z$ , je výhodné celý problém převést a řešit ve sférických souřadnicích. Řešením Schrödingerovy rovnice bude vlnová funkce  $\psi(r, \vartheta, \varphi)$ , kterou je možné vyjádřit jako součin funkcí jednotlivých proměnných

$$\psi(r, \vartheta, \varphi) = R(r)\theta(\vartheta)\Phi(\varphi) \quad (9.10)$$

Tato úprava převádí řešení trojrozměrné Schrödingerovy rovnice na tři řešení, každé pro jednu proměnnou.

## Výsledky řešení Schrödingerovy rovnice

V kap.8 jsme dospěli k závěru, že omezení výskytu elektronu na jednorozměrnou potenciálovou jámu vede k požadavku na kvantování. Existence trojrozměrné potenciálové jámy, v níž se elektron ve vodíkovém atomu nachází, povede k nutnosti existence tří kvantových čísel.

První **kvantové číslo**  $n$  je spojeno s řešením radiální části vlnové funkce a kvantuje hodnoty energie elektronu ve vodíkovém atomu. Řešení pro polární funkci  $\theta(\vartheta)$  přináší vedlejší **orbitální kvantové číslo**  $l$ , řešení azimutální části  $\Phi(\varphi)$  **magnetické kvantové číslo**  $m_l$ .

Výsledky řešení je možné shrnout do následujících bodů:

1. Pro diskrétní hodnoty energie  $E_n$  platí vztah

$$E_n = -\frac{me^4}{32\pi^2\epsilon_0^2\hbar^2} \frac{1}{n^2}, \quad (9.11)$$

kde  $n$  nabývá hodnot  $1,2,3,\dots$ . Všimněme si, že hodnota energie je závislá pouze na kvantovém čísle  $n$ .

**Energie vázaných stavů elektronu ve vodíkovém atomu je kvantovaná.**

**2. Kvantová čísla  $n, l, m_l$  musí být celá čísla a musí splňovat následující relace**

$$n \geq 1 \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (9.12)$$

$$l \leq n - 1 \quad (l = 0, 1, 2, \dots, n - 1) \quad (9.13)$$

$$|m_l| \leq l \quad (m_l = -l, -l + 1, \dots, -1, 0, 1, \dots, l - 1, l) \quad (9.14)$$

Každý stav elektronu ve vodíkovém atomu je popsán třemi kvantovými čísly  $(n, l, m_l)$ . Základní stav má kvantová čísla  $(1,0,0)$ . První excitovaný stav je charakterizován kvantovým číslem  $n = 2$ , dovolené hodnoty  $l$  jsou  $0,1$ . Pro hodnotu  $l = 0$  může  $m_l$  nabývat pouze hodnotu  $0$ . Pro  $l = 1$  může  $m_l$  nabývat hodnot  $-1,0,1$ .

Pro kvantové číslo  $n = 2$  jsou možné stavy  $(2,0,0)$ ,  $(2,1,-1)$ ,  $(2,1,0)$ ,  $(2,1,1)$ , které mají stejnou hodnotu energie. Tuto vlastnost elektronových hladin označujeme jako **degeneraci** a říkáme, že hladina  $n = 2$  je čtyřikrát degenerovaná.

V klasické mechanice můžeme elektronu pohybujícímu se po kruhové dráze přiřadit moment hybnosti  $\vec{L}$  vzhledem ke středu dráhy definovaný vztahem  $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ , kde  $\vec{r}$  je polohový vektor, jehož velikost je rovna poloměru kruhové dráhy a  $\vec{p}$  je hybnost elektronu. Moment hybnosti je vektor kolmý k rovině elektronové orbity. Řešením polární části Schrödingerovy rovnice dostáváme naprosto odlišný výraz pro velikost momentu hybnosti a moment má zcela odlišné chování ve srovnání s představami klasické mechaniky. Velikost momentu hybnosti v kvantové mechanice je dána výrazem

$$|L| = \hbar\sqrt{l(l+1)} \quad (9.15)$$

kde  $l$  je orbitální kvantové číslo nabývající hodnot  $0,1,\dots,n-1$ . Pro  $n = 2$  může velikost  $L$  mít hodnotu  $0$  pro  $l = 0$ , nebo  $\hbar\sqrt{2}$  pro  $l = 1$ .

Stejně jako v klasické mechanice, můžeme i v kvantové mechanice hledat průmět vektoru  $\vec{L}$  do některé osy v prostoru. Jestliže vybereme osu  $z$ , protože má význačné postavení v systému sférických souřadnic, zjistíme, že podle zákonitostí vyplývajících ze řešení Schrödingerovy rovnice, je komponenta  $L_z$  kvantovaná a může nabývat hodnot

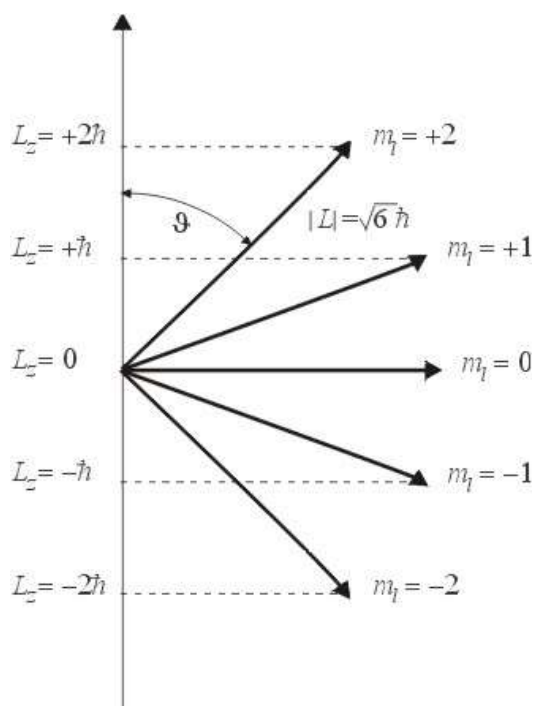
$$L_z = m_l \hbar, \quad (9.16)$$

pro magnetické kvantové číslo  $m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$ .

Popsané chování momentu hybnosti představuje jeden ze zvláštních aspektů kvantové mechaniky a je označován jako **prostorové kvantování**.

**Jsou dovoleny pouze určité prostorové orientace momentu hybnosti do vybraného směru.**

Počet těchto orientací je  $2l + 1$  (počet různých hodnot  $m_l$  pro dané  $l$ ) a velikosti jednotlivých komponent se liší o  $\hbar$ . Prostorové kvantování  $z$ -ové komponenty momentu hybnosti pro  $l = 2$  je schématicky zobrazeno na obr.9.2.

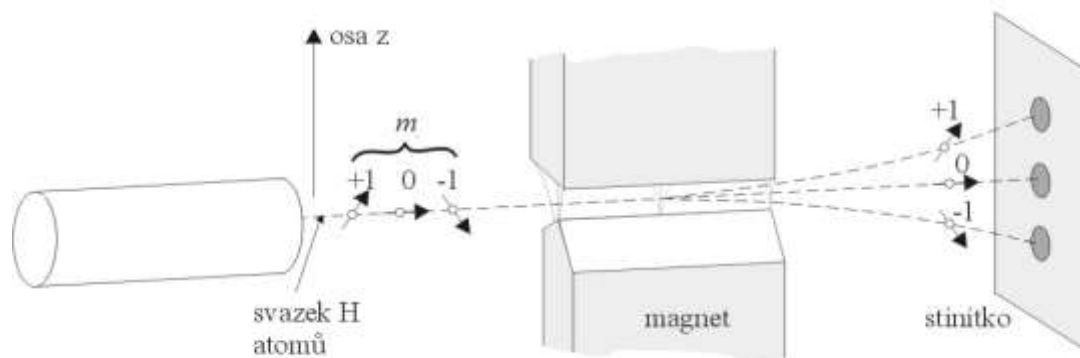


Obr.9.2

Tvarem vlnové funkce, která je řešením Schrödingerovy rovnice pro elektron ve vodíkovém atomu se, vzhledem k její složitosti, nebudeme zabývat.

### 9.3 Spin elektronu

Elektron, volný nebo vázaný, má svůj **vlastní moment hybnosti**  $\vec{S}$ , nazývaný většinou jednoduše **spin**. Spin je jednou ze základních charakteristik elektronu, stejně jako hmotnost, nebo elektrický náboj. Jeho velikost je kvantovaná a je závislá na **kvantovém spinovém čísle**  $s$ ,



Obr.9.3

keré je pro elektron rovno  $s = \frac{1}{2}$ . Podobně proton i neutron má spinové číslo rovné jedné polovině. Spin (vlastní moment hybnosti) elektronu je opět prostorově kvantovaný a jeho komponenta ve směru osy  $z$  je kvantovaná a je závislá na hodnotách **kvantového spinového magnetického čísla**  $m_s$ , které nabývá hodnoty  $+\frac{1}{2}$  nebo  $-\frac{1}{2}$ .

Existence vlastního momentu elektronu-spinu a jeho kvantové vlastnosti, zejména prostorové kvantování, bylo experimentálně ověřeno na chování atomů stříbra v nehomogenním magnetickém poli O. Sternem a W. Gerlachem. Později byl tento experiment proveden přímo s atomy vodíku. V tomto pokuse svazek vodíkových atomů s  $l = 0$  procházel nehomogenním magnetickým polem. Je-li orbitální moment hybnosti elektronů  $\vec{L} = 0$ , pak také jejich magnetický moment je nulový a na stínítku zachycujícím dopad elektronů po průchodu magnetickým polem by se měla objevit pouze jediná stopa. Schéma experimentu je na obr.9.3.

Výsledek experimentu byl překvapivý, protože tento závěr se nepotvrdil.

**V nehomogenním magnetickém poli došlo k rozštěpení původního svazku vodíkových atomů a na stínítku byly pozorovány dvě stopy.**

Výsledek experimentu potvrdil předpoklad, že elektron má svůj vlastní moment hybnosti určený kvantovým číslem  $s$ , pro které musí platit  $2s + 1 = 2$ , tedy  $s = \frac{1}{2}$ .

## 9.4 Orbitální a spinový magnetický dipólový moment elektronu

Jak jsme ukázali v předchozích odstavcích, každý kvantový stav elektronu atomu je charakterizován orbitálním a spinovým kvantovým číslem a s nimi spojenými orbitálním a spinovým momentem hybnosti. Hodnoty orbitálního i spinového momentu jsou kvantovány a rovněž jsou kvantovány jejich průměty do zvoleného vybraného směru, kterým je například osa  $z$ .

S momenty hybnosti elektronu v atomu, ať orbitálním nebo spinovým, jsou spojeny orbitální a spinový magnetické dipólové momenty elektronu. Jsou-li tedy kvantovány momenty hybnosti (orbitální, spinový) elektronu, musí být kvantovány i jeho magnetické dipólové momenty.

Pro orbitální dipólový moment elektronu v atomu  $\mu_{\text{orb},z}$  platí vztah

$$\mu_{\text{orb},z} = -m_l \mu_B \quad , \quad (9.17)$$

kde  $m_l$  je magnetické orbitální kvantové číslo a  $\mu_B$  je **Bohrův magneton**. Platí pro něj vztah

$$\mu_B = \frac{eh}{4\pi m_e} = 9,274 \cdot 10^{-24} \text{ J} \cdot \text{T}^{-1} \quad . \quad (9.18)$$

Ze vztahu (9.17) vyplývá, že

**orbitální moment hybnosti a orbitální magnetický dipólový moment elektronu v atomu mají opačný směr.**

Důvodem je záporný elektrický náboj elektronu. Například pro proton bude ve vztahu (9.17) znaménko plus.

Podobně jako v případě orbitálního momentu hybnosti elektronu, i v případě spinového momentu hybnosti jsou mechanický a magnetický moment svázány. Proto i  $z$ -ová složka spinového magnetického momentu elektronu  $\mu_{s,z}$  je kvantovaná a nabývá dvou hodnot podle vztahu

$$\mu_{s,z} = -2m_s \mu_B \quad , \quad (9.19)$$

kde  $m_s$  je spinové magnetické kvantové číslo a  $\mu_B$  je Bohrův magneton. Jsou tedy možné celkem dva různé průměty spinového momentu hybnosti a spinového dipólového magnetického momentu elektronu v atomu.

## 9.5 Jaderná magnetická rezonance

Podobně jako elektron, také proton má svůj vlastní spinový moment hybnosti a s ním spojený magnetický dipólový moment. Nachází-li se proton ve vnějším magnetickém poli o magnetické indukci  $\vec{B}$  orientovaném ve směru osy  $z$ , může průmět spinového magnetického momentu do osy  $z$  mít pouze dvě prostorové orientace, jednu souhlasnou a druhou nesouhlasnou se směrem

osy  $z$ . Energie protonu nacházejícího se v magnetickém poli je v těchto dvou kvantových stavech odlišná a rozdíl těchto energií je roven  $2\mu_z B$ , kde  $\mu_z$  je spinový magnetický moment protonu a  $B$  je velikost magnetické indukce.

Jestliže například umístíme do homogenního magnetického pole kapku vody, budou mít některé protony své magnetické momenty orientovány ve směru pole, a jiné proti směru pole. Budeme-li současně působit na kapku střídavým elektromagnetickým polem takové frekvence  $f$ , že bude platit vztah

$$hf = 2\mu_z B \quad ,$$

bude splněna podmínka pro vznik **jaderné magnetické rezonance**, protože protony ve stavu s nižší energií mohou získanou energii použít k přechodu do stavu s vyšší energií. Tento proces se nazývá **překlopení spinu**. Jakmile proton přejde do stavu s vyšší energií, může se vyzářením fotonu o stejné frekvenci vrátit do původního nižšího energetického stavu.

Proces překlápění spinů protonů lze kvantitativně vyhodnotit pomocí absorbované energie elektromagnetického záření. Měření se většinou provádí tak, že frekvence  $f$  je přesně nastavena a mění se velikost indukce magnetického pole. Metodu lze využít jako analytickou metodu pro určení složení organických sloučenin, které obsahují ve značné míře vodík.

Na principu NMR (nuclear magnetic resonance) je založena i zobrazovací technika nazývaná NMR tomografie, která se s úspěchem využívá v lékařství pro zobrazování lidských tkání.

## Příklady ke kap.9

### Příklad 9.1

Vodíkový atom je vybuzen ze základního stavu do stavu s  $n = 4$ . Jak velkou energii musí atom absorbovat?

#### Řešení:

Přechody ze základního stavu s  $n = 1$  popisuje Lymanova série v ultrafialové oblasti, kde pro vlnčet spektrální čáry platí vztah

$$\sigma = \frac{1}{\lambda} = R_\infty \left( \frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad n = 2, 3, 4, \dots$$

Veličina  $R_\infty$ , nazývaná Rydbergova konstanta má hodnotu  $R_\infty \cong 1,097 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}$ .

Pro přechod do excitovaného stavu s  $n = 4$  bude zapotřebí energie

$$E = h \frac{c}{\lambda} = hc\sigma = hcR_\infty \left( \frac{1}{1^2} - \frac{1}{4^2} \right) \quad .$$

Po dosazení

$$E \doteq 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \cdot 1,097 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1} \left( 1 - \frac{1}{16} \right) = 20,04 \cdot 10^{-19} \text{ J} = 12,76 \text{ eV} \quad .$$

## 10. Víceelektronové atomy

### 10.1 Pauliho vylučovací princip

V předcházející kapitole jsme konstatovali, že v základním stavu vodíkového atomu se elektron nachází v nejnižším kvantovém stavu, charakterizovaném nejmenší hodnotou energie. Jaké jsou však nejnižší stavy atomů, které obsahují více elektronů? Je například všech 92 elektronů v nejnižším kvantovém stavu? Řada důkazů svědčí o nepravděpodobnosti takového uspořádání. Jedním z nich je rozdíl v chemických vlastnostech některých prvků, jejichž atomová struktura se liší pouze o jediný elektron. Například prvky s protonovým číslem 9, 10 a 11 jsou po řadě plyn fluor, inertní plyn neon a alkalický kov sodík. Protože elektronový obal atomu rozhoduje o jeho chemickém chování, lze jen těžko pochopit, proč by se měly chemické vlastnosti prvků měnit tak náhle při změně o pouhý jeden elektron, kdyby všechny elektrony v atomu byly ve stejném kvantovém stavu.

V roce 1925 formuloval W. Pauli základní princip, kterým se řídí obsazování kvantových stavů elektrony

**Žádné dva elektrony v atomu nemohou existovat ve stejném kvantovém stavu.**

Můžeme také říci, že v jednom atomu nemohou mít dva elektrony současně všechna čtyři kvantová čísla stejná.

Výsledky experimentů ukazují, že všechny částice se spinem  $\frac{1}{2}$ , jež vedle elektronů zahrnují i protony a neutrony, splňují Pauliho vylučovací princip. Částice s poločíselným spinem se nazývají Fermiho částice nebo krátce **fermiony**, protože chování těchto částic popsali E. Fermi a P. Dirac. Částice s nulovým nebo celočíselným spinem se nazývají Boseho částice nebo **bosony**, protože se chovají podle zákona, který formulovali S. N. Bose a A. Einstein.

### 10.2 Elektronové konfigurace

I když různé elektrony ve víceelektronovém atomu interagují jeden s druhým, pro pochopení struktury atomového obalu je vhodné uvažovat každý elektron tak, jakoby se pohyboval v konstantním radiálně symetrickém silovém poli. Pro daný elektron je tímto polem přibližně pole celkového kladného náboje jádra. Uspořádání elektronů, které se podřizuje Pauliho vylučovacímu principu, spočívá pak v zadání čtveřice kvantových čísel pro každý elektron. Udání této kompletní specifikace pro elektrony se nazývá **elektronová konfigurace**.

Vzhledem k tomu, že energie elektronů závisí v prvním přiblížení pouze na hlavním a vedlejším kvantovém čísle, stačí k popisu elektronové konfigurace pouze kvantové číslo  $n$  a  $l$ . Je zvykem kvantovému číslu  $l$  přiřazovat písmena podle následujícího pravidla:



Orbitální kvantové číslo $l$	0	1	2	3	4	5
Označení písmenem	$s$	$p$	$d$	$f$	$g$	$h$

Elektrony, které obsazují stavy s určitou hodnotou hlavního čísla  $n$  vytvářejí **slupku**, někdy také označovanou písmenem podle následujícího schématu

Hlavní kvantové číslo $n$	1	2	3	4	5
Označení písmenem	K	L	M	N	O

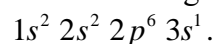
Elektrony, které sdílejí ve slupce totéž kvantové číslo  $l$ , tvoří jednu **podslupku**. Všechny elektrony v podslupce mají téměř shodné energie.

Podle Pauliho principu může být podslupka s daným  $l$  obsazena  $2(2l+1)$  elektrony, protože počet možných hodnot  $m_l$  pro určité  $l$  je  $2l+1$  a v každém z těchto stavů jsou možné dvě orientace spinového momentu hybnosti,  $m_s$  nabývá hodnot  $\frac{1}{2}$  a  $-\frac{1}{2}$ . Tedy v každé podslupce  $s$  mohou být podle tohoto pravidla maximálně 2 elektrony, a v podslupce  $p$  může být maximálně 6 elektronů.

Postupné obsazování různých podslupek můžeme popsat následujícím schématem

$l =$	$s$	$p$	$d$	$f$	$g$	$h$
	0	1	2	3	4	5
$n = 1$	$1s$					
$n = 2$	$2s$	$2p$				
$n = 3$	$3s$	$3p$	$3d$			
$n = 4$	$4s$	$4p$	$4d$	$4f$		
$n = 5$	$5s$	$5p$	$5d$	$5f$	$5g$	
$n = 6$	$6s$	$6p$	$6d$	$6f$	$6g$	$6h$

Každá podslupka je charakterizována svým hlavním kvantovým číslem  $n$ , za nímž následuje písmeno odpovídající orbitálnímu číslu  $l$  podslupky. Jestliže se v realizované konfiguraci napíše horní index za písmenem, označuje skutečný počet elektronů v podslupce. Například elektronová konfigurace sodíku má tvar



Tento zápis označuje, že podslupky  $1s$ ,  $2s$  a  $2p$  jsou plně obsazené a podslupka  $3s$  obsahuje pouze jeden elektron.

Atomová slupka nebo podslupka, která je plně obsazená, se nazývá **uzavřená**, a elektrony z takové podslupky obvykle nemají podstatný vliv na chování atomu.

Skutečné pořadí zaplňování podslupek elektrony není shodné s pořadím respektujícím pouhý růst kvantového čísla  $n$  a vedlejšího čísla  $l$  uvedeném ve schématu. Ve všech soustavách, a to i

v atomech, musí být respektován obecný princip, minimální energie atomu v základním stavu. Tento požadavek splňuje následující pořadí podslupek

$1s\ 2s\ 2p\ 3s\ 3p\ 4s\ 3d\ 4p\ 5s\ 4d\ 5p\ 6s\ 4f\ 5d\ 6p\ 7s\ 6d$ .

Na základě platnosti této posloupnosti lze vysvětlit mnohé fyzikální a chemické vlastnosti prvků.

Alkalické kovy												Inertní plyny								
1s	1 H	Alkalické zeminy										2 He								
2s	3 Li	4 Be											2p	5 B	6 C	7 N	8 O	9 F	10 Ne	
3s	11 Na	12 Mg	Přechodové prvky										3p	13 Al	14 Si	15 P	16 S	17 Cl	18 Ar	
4s	19 K	20 Ca	3d	21 Sc	22 Ti	23 V	24 Cr	25 Mn	26 Fe	27 Co	28 Ni	29 Cu	30 Zn	4p	31 Ga	32 Ge	33 As	34 Se	35 Br	36 Kr
5s	37 Rb	38 Sr	4d	39 Y	40 Zr	41 Nb	42 Mo	43 Tc	44 Ru	45 Rh	46 Pd	47 Ag	48 Cd	5p	49 In	50 Sn	51 Sb	52 Te	53 I	54 Xe
6s	55 Cs	56 Ba	5d	71 Lu	72 Hf	73 Ta	74 W	75 Re	76 Os	77 Ir	78 Pt	79 Au	80 Hg	6p	81 Tl	82 Pb	83 Bi	84 Po	85 At	86 Rn
7s	87 Fr	88 Ra	6d	103 Lr	104	105	106													
		Lanthanidy																		
		4f	57 La	58 Ce	59 Pr	60 Nd	61 Pm	62 Sm	63 Eu	64 Gd	65 Tb	66 Dy	67 Ho	68 Er	69 Tm	70 Yb				
		5f	89 Ac	90 Th	91 Pa	92 U	93 Np	94 Pu	95 Am	96 Cm	97 Bk	98 Cf	99 Es	100 Fm	101 Mv	102 No				
		Actinidy																		

Obr. 10.1

### 10.3 Periodická soustava prvků

Napíšeme-li chemické prvky v pořadí podle atomového čísla, opakují se prvky s podobnými chemickými a fyzikálními vlastnostmi v pravidelných intervalech. Toto empirické zjištění, známé jako periodický zákon, poprvé formuloval D.I.Mendělejev v roce 1869. Tabulka chemických prvků, vykazující toto opakování vlastností, se nazývá **periodická soustava prvků** a je uvedena na obr. 10.1.

Prvky s podobnými vlastnostmi jsou uspořádány do svislých sloupců, které se nazývají **grupy**. Řádky se nazývají **periody** a jsou v nich uspořádány prvky se vzrůstajícím protonovým číslem  $Z$ , které je uvedeno vlevo před značkou prvku.

Znalost atomové struktury prvků umožňuje pochopit jejich fyzikální a chemické vlastnosti, které jsou určeny zejména stupněm zaplnění elektronových podslupek. Zaplněné podslupky tvoří velmi stabilní konfigurace. Atom, který kromě zaplněné poslední podslupky má ještě další elektron, může tento elektron snadno předat jinému atomu a vytvořit tak chemickou vazbu. Podobně atom, kterému do zaplnění podslupky chybí jeden elektron, snadno přijímá při vzniku

chemické vazby elektron od jiného atomu. Zaplněné podslupky většinou nepřispívají k fyzikálním a chemickým vlastnostem atomů.

**Pro určení fyzikálních a chemických vlastností atomů stačí uvažovat pouze nezaplňené podslupky.**

Všimněme si nyní blíže několika hlavních skupin prvků, které mají podobné fyzikální a chemické vlastnosti a pokusme se je uvést do souvislosti s elektronovými konfiguracemi.

### **Inertní plyny**

Inertní plyny zaujímají poslední sloupec periodické tabulky. Protože mají zcela zaplněné poslední podslupky, netvoří s jinými prvky chemické sloučeniny. Při pokojové teplotě se chovají jako jednoatomové plyny, a protože interakce mezi jednotlivými atomy je slabá, bod varu inertních plynů je velmi nízký ( $-200^{\circ}\text{C}$ ).

### **Prvky p-podslupky**

Prvky grupy, která předchází grupu inertních plynů, jsou halogeny (F,Cl,Br,I). Atomy těchto prvků mají konfiguraci  $np^5$ , schází jim tedy jeden elektron do zaplnění podslupky. Protože uzavřená podslupka  $p$  má velmi stabilní konfiguraci, tvoří tyto atomy snadno sloučeniny s takovými prvky, které mohou poskytnout jeden elektron k doplnění podslupky  $p$ . Halogeny jsou proto velmi chemicky aktivní.

### **Prvky s-podslupky**

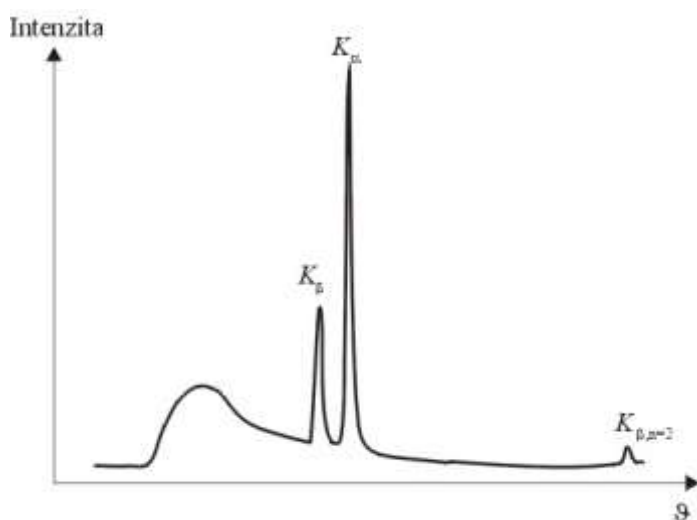
Prvky prvních dvou grup jsou známy jako alkalické kovy (konfigurace  $ns^1$ ). Jediný  $s$ -elektron, který alkalické kovy snadno ztrácejí, činí tyto prvky chemicky aktivními. Alkalické kovy mají podobné vlastnosti. Prvky obou grup jsou poměrně dobrými elektrickými vodiči a jsou paramagnetické.

### **Přechodové kovy**

Tři řádky prvků, ve kterých je  $d$  podslupka postupně zaplňována (Sc až Zn, Y až Cd, Lu až Hg) se nazývají přechodové kovy. Mnohé z jejich chemických vlastností jsou určeny vnějšími  $s$  elektrony. Přechodové kovy se navzájem liší v obsazení  $d$  podslupek, které se nacházejí hluboko v elektronovém obalu. Elektrony  $d$  podslupek přechodových kovů proto málo ovlivňují chemické vlastnosti těchto prvků. Důsledkem nezaplňených  $d$  podslupek u Fe,Co a Mn jsou jejich feromagnetické vlastnosti.

## **10.4 Rentgenová spektra**

Rentgenové záření je elektromagnetické záření o vlnových délkách přibližně v intervalu 0,01nm až 10 nm s energií přibližně od 100 eV do 100 keV. Vzniká při dopadu rychlých elektronů na kovové terče. Vedle spojitého rozdělení vlnových délek, vykazují rentgenová spektra emitovaných fotonů úzká ostrá maxima (píky) pro vlnové délky charakteristické pro materiál terčíku. Spojité spektrum je důsledkem srážek elektronů s atomy terčíku, při kterých se elektrony postupně brzdí a při srážkách vznikají fotony různých energií. Tato část spektra bývá často označována jako **brzdné záření**. **Čárové spektrum** má svůj původ v elektronových přechodech uvnitř atomů. Spektrum rentgenového záření emitovaného elektrony s energií 30 keV dopadajícími na Cu terčík je na obr.10.2.



Obr.10.2

Důležitou hodnotou ve spektru rentgenového záření je **prahová vlnová délka**  $\lambda_{\min}$ . Kratší vlnové délky již nejsou ve spektru zastoupeny. Tato hodnota odpovídá případu, kdy se elektron srazí s atomem terče pouze jednou, a ztratí veškerou energii  $E_{k \max}$ , která se přemění v energii fotonu. Pro vlnovou délku  $\lambda_{\min}$  platí vztah

$$E_{k \max} = h\nu = \frac{hc}{\lambda_{\min}} \quad (10.1)$$

Z tohoto vztahu plyne pro  $\lambda_{\min}$  relace

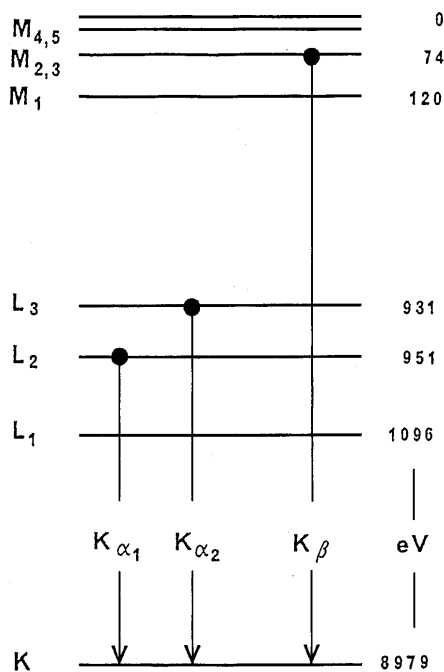
$$\lambda_{\min} = \frac{hc}{E_{k \max}} \quad (10.2)$$

Hodnota prahové vlnové délky nezávisí na materiálu terčičku, pouze na energii elektronů.

Pohledem na obr. 10.2 zjistíme, že v zobrazeném spektru rentgenového záření se nacházejí skupiny píků, označené písmenem K a řeckými symboly  $\alpha, \beta$ . Píky vznikají v procesech, které můžeme rozdělit do dvou částí. Nejdříve urychlený elektron dopadne na atom terčičku a vyrazí z některé jeho vnitřní slupky elektron. V této hladině vznikne díra a tuto díru bezprostředně obsadí elektron z hladiny vyšší. Při přechodu atom emituje foton charakteristického rentgenového záření. V důsledku diskrétních energetických hladin elektronů v atomech je charakteristické rentgenové **spektrum čárové**.

**Čárové rentgenové spektrum je charakteristické pro daný prvek.**

Je-li vnitřní elektron ze slupky s kvantovým číslem  $n = 1$  (K-slupka), je emitované charakteristické záření označováno jako čára K, a to  $K_{\alpha}$ , je-li díra zaplněna elektronem ze slupky  $n = 2$ , a  $K_{\beta}$ , je-li zaplněna elektronem ze slupky  $n = 3$ . Díry ve slupkách L, M jsou zaplňovány elektrony z ještě vzdálenějších slupek a vznikají tak čáry (série) L, M. Vlnová délka záření, které se při přechodu vyzáří, je určena rozdílem energií odpovídajících hladin, a je proto charakteristická pro daný atom. Intenzita vznikajících spektrálních čar může být až o dva řády vyšší než



Obr. 10.3

intenzita spojitého spektra v tomtéž intervalu vlnových délek. Schéma energetických hladin a odpovídajících přechodů v atomech Cu jsou na obr.10.3.

Kvantová teorie atomu dovoluje vysvětlit nejen zákony určující vlnové délky, ale i vztahy intenzit linií jednoho a téhož spektra. Intenzivnější čára (pík) K<sub>α</sub> odpovídá přechodům mezi bližšími energetickými hladinami než slabší čára K<sub>β</sub>. Volná místa v hladině K různých atomů jsou obsazována s větší pravděpodobností méně vzdálenými L-elektrony než M-elektrony.

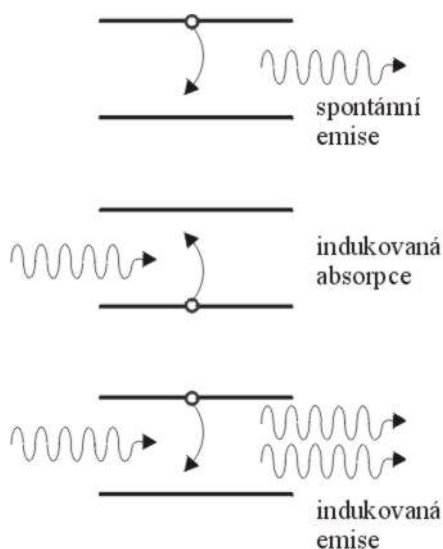
Ukazuje se, že mezi frekvencí záření K<sub>α</sub> a atomovým číslem Z atomu platí vztah

$$\nu = \frac{3cR_{\infty}}{4} (Z - 1)^2, \quad (10.3)$$

který se nazývá **Moseleyho zákon**. Tato zákonitost poskytla možnost určování atomových čísel prvků pomocí vlnových délek rentgenového záření.

## 10.5 Lasery

Existují tři možné způsoby, kterými elektromagnetické záření interaguje s elektrony v atomu.



Obr. 10.4a.b.c

Procesy odpovídající těmto třem způsobům jsou schématicky znázorněny na obr.10.4a,b,c. Při těchto procesech se atom dostává z jednoho stavu do druhého a energetický rozdíl mezi stavy je roven energii vyzářeného nebo pohlceného fotonu. Předpokládejme, že na počátku se atom nachází buď v základním nebo v excitovaném (vzbuzeném) stavu s vyšší energií.

**1. Absorpce.** Schéma na obr.10.4a zobrazuje atom, který je na počátku v základním stavu. Atom umístěný do vnějšího elektromagnetického pole absorbuje foton vhodné vlnové délky a dostane se do excitovaného stavu. Tato interakce, nazývaná absorpce vede ke vzniku absorpčního spektra formálně ji můžeme zapsat relací

$$\text{atom} + \text{foton} \rightarrow \text{atom}^*,$$

kde hvězdička označuje excitovaný stav.

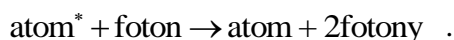
**2. Spontánní emise.** Na obr.10.4b je atom v excitovaném stavu. Po nějaké době samovolně (bez vnějšího

vlivu) přejde do základního stavu za současné emise fotonu, jehož energie je rovna rozdílu energií hladin. Proces můžeme zapsat relací



Střední doba života excitovaného stavu (než dojde k vyzáření) obvykle bývá  $10^{-8}$  s. Pro některé stavy tato doba může být až o několik řádů větší. Takové stavy nazýváme **metastabilní**.

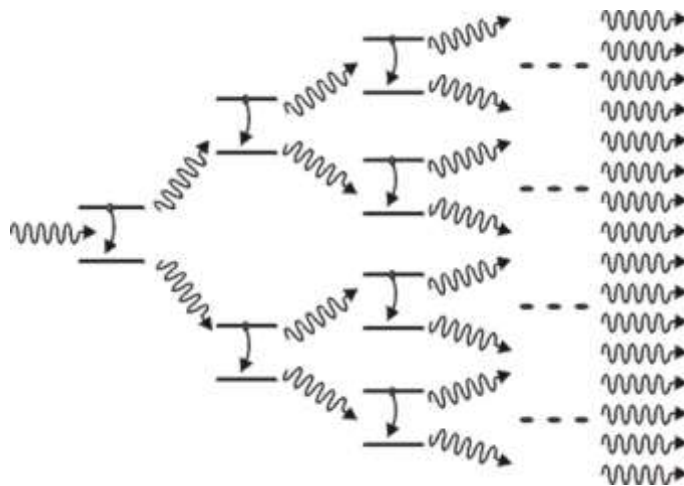
**3. Stimulovaná emise.** Atom je na počátku (obr.10.4c) opět v excitovaném stavu, ale ve srovnání s předchozím případem je ozářen zářením s energií odpovídající rozdílu hladin. Foton o této energii může stimulovat atom, aby přešel do základního stavu s vyzářením fotonu o stejné energii. Tento proces nazýváme **stimulovaná emise**, protože děj je spouštěn z vnějšku fotonem. Schématicky můžeme proces zapsat relací



Dva fotony, které jsou výsledkem procesu stimulované emise, mají stejnou energii a jejich elektromagnetické vlny jsou ve fázi, záření je koherentní.

**Záření laseru je monochromatické a koherentní.**

Je-li k dispozici soubor atomů v excitovaném stavu, pak po jedné počáteční interakci atomu s fotonem, která vyvolá stimulovanou emisi, jsou k dispozici již dva fotony, které mohou vyvolat další dvě stimulované emise. Tato jednoduchá představa tvoří základ pro vysvětlení funkce laseru (Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation). Situace je znázorněna na obr.10.5.



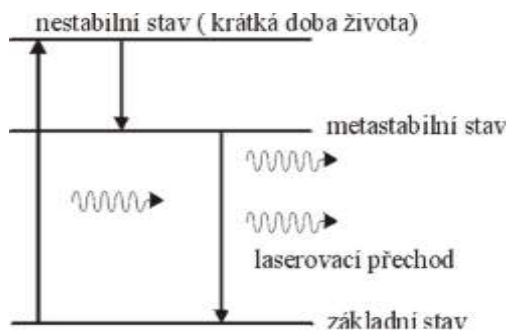
Obr.10.5

Uvedený jednoduchý model by však nefungoval z několika zásadních důvodů:

- 1) Je nesnadné udržet soustavu atomů v excitovaných stavech, aniž by docházelo ke spontánní emisi.

- 2) Atomy, které se v daném okamžiku nacházejí v základním stavu, mohou pohlcovat fotony a zeslabovat tak proces stimulované emise.

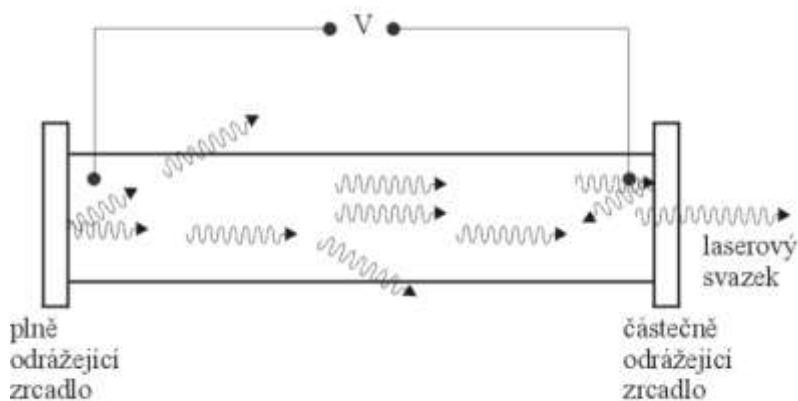
Problémy lze řešit volbou atomu, který má k dispozici více vhodných hladin. Na obr.10,6 je zobrazeno tříhladinové schéma.



Obr.10.6

První problém lze řešit způsobem naznačeným právě na obr.10.6. Atomy, které se na počátku procesu nacházejí v základním stavu, vybudíme vhodným způsobem (elektrický pulz, srážky s jinými atomy). Říkáme, že jsou **čerpány do excitovaného stavu**. Atom přechází z tohoto excitovaného stavu velmi rychle spontánní emisí do nižšího excitovaného stavu, který je metastabilní. Teprve přechod z tohoto excitovaného stavu do základního je **laserovací přechod**. Analogicky je možné řešit i druhý problém existencí čtvrté hladiny nad základním stavem.

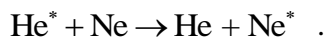
Helium-neonový laser je příkladem vícehladinového laseru. Směs He a Ne (90%He) je uzavřena v úzké trubici, jak je naznačeno na obr.10.7.



Obr.10.7

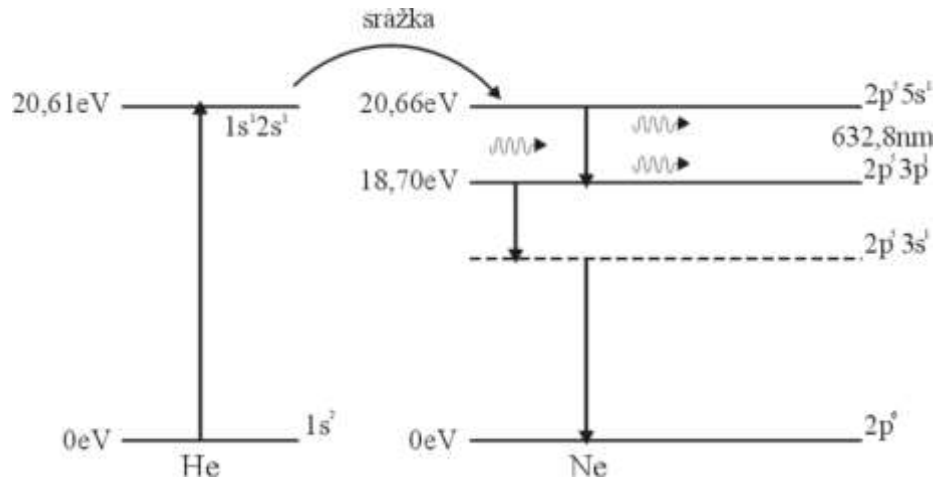
Výboj v plynu čerpá helium (dodává energii) z jeho základního stavu do excitovaného stavu s energií asi 20,61 eV, který je metastabilním stavem He. S určitou nenulovou pravděpodobností se každý atom helia sráží s atomem neonu, který se nachází v základním stavu.

Symbolický zápis procesu je



Excitovaný stav neonu vzniká přechodem jednoho elektronu z původně plně obsazené podslupky  $2p^6$  do prázdné podslupky  $5s$ . Na obr.10.8 jsou znázorněny vybrané energetické hladiny He a Ne včetně odpovídajících hodnot energie.

V libovolném časovém okamžiku se více atomů neonu nachází ve stavu  $2p^5 5s^1$  než ve stavu  $2p^6$ . Situace, kdy ve vzbuzeném stavu je více atomů než v základním, se nazývá **inverzní populace stavů** a má zásadní význam pro funkci laseru.



Obr.10.8

Některý z atomů Ne, který se nachází ve stavu s konfigurací  $2p^5 5s^1$ , bude emitovat foton o vlnové délce 632,8 nm ve směru podél trubice. Tento foton způsobí v některém atomu stimulovanou emisi dalšího fotonu a umožní tak vznik svazku koherentního záření. Prostředí, ve kterém dochází k stimulované emisi, se nazývá **aktivní prostředí a trubice**, ve které je umístěno a která je na obou koncích opatřena rovnoběžnými zrcadly, se nazývá **optický rezonátor** (obr.10.7). Jedno ze zrcadel odráží zcela, a druhé je polopropustné. Odrazy svazku fotonů na zrcadlech dochází k další stimulované emisi a k zesilování laserového svazku. Za vhodných podmínek se téměř všechna energie excitace atomů přemění v záření a rezonátor opouští výrazně směřovaný, téměř rovnoběžný svazek záření.

Laser je zařízení, které má poměrně malou účinnost. Malý helium-neonový laser má výstupní výkon kolem několika mW při elektrickém příkonu 10 až 100W. Účinnost takového zařízení je proto  $10^{-4} - 10^{-5}$ . Lasery jsou však důležité vzhledem ke koherenci a směrovým vlastnostem laserového svazku a dále pro velkou hustotu výkonu, který je soustředěn na plochu několika  $\text{mm}^2$ . Proto i malý laser může dosahovat hustoty světelné energie 100 až 1000  $\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$ .

V současné době je realizováno mimořádně mnoho různých laserů. Získávají se svazky koherentního záření se širokým intervalem vlnových délek od  $0,2 \mu\text{m}$  do  $20 \mu\text{m}$ , od vzdálené ultrafialové oblasti až do oblasti vlnových délek rentgenového záření. Lasery pracují s extrémně krátkou dobou světelného pulzu (pulzní lasery)  $\tau \sim 10^{-12}\text{s}$ , anebo v kontinuálním režimu (kontinuální lasery). Výjimkou dnes nejsou vysokovýkonové lasery pro zvláštní účely s hodnotou výkonu až  $10^{12}\text{W}$ .

Lasery našly široké uplatnění ve vědě, v průmyslu, ale také i v medicíně. Laserové záření stimuluje chemické reakce, vytváří nové chemické látky. Laserová chemie je založena na faktu, že laserem excitované atomy a molekuly snáze vstupují do chemických reakcí, zejména do takových, do kterých neexcitované částice vůbec nemohou vstoupit. Pomocí laseru je možné detegovat jednotlivé atomy, rozdělovat izotopy. V průmyslu našly uplatnění například ve strojírenství, kde se používají k řezání, k povrchovým úpravám kovových součástek (povrchové kalení, žíhání, legování apod.). V medicíně se používají jako nekrvavé skalpely, pomocí laserového paprsku se provádějí složité operace očí, zastavuje se vnitřní krvácení a léčí například popáleniny.



## Příklady ke kap.10

### Příklad 10.1

Helium-neonový laser emituje světlo na vlnové délce 632,8 nm o výkonu 1 mW. Kolik fotonů za sekundu emituje?

#### Řešení:

Pro energii vyzářenou laserem za 1 sekundu platí vztah

$$P = nh\nu = nh \frac{c}{\lambda},$$

kde  $n$  je počet fotonů v laserovém svazku a další veličiny mají obvyklý význam. Po dosazení dostaneme pro počet  $n$  výraz

$$n = \frac{P\lambda}{hc} = \frac{1 \cdot 10^{-3} \cdot 632,8 \cdot 10^{-9}}{6,62 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8} = 3186 \cdot 10^{12}.$$

Za 1 sekundu je laserem vyzářeno  $3186 \cdot 10^{12}$  fotonů.

### Příklad 10.2

Pulzní laser emituje světlo na vlnové délce 694,4 nm. Trvání pulzu je 10ps a energie v jednom pulzu je 0,150 J.

a) Jaká je délka pulzu?

b) Kolik fotonů je emitováno v jednom pulzu?

#### Řešení:

a) Délka pulzu  $d$  je vzdálenost, na kterou proniknou fotony za dobu trvání pulzu. Platí vztah  $d = ct$ ,

kde  $c$  je rychlost světla ve vakuu. Po dosazení

$$d = 3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \cdot 10 \cdot 10^{-12} \text{ s} = 3 \cdot 10^{-3} \text{ m}.$$

b) Pro energii vyzářenou laserem v jednom pulzu platí vztah

$$E = nh\nu = nh \frac{c}{\lambda},$$

kde  $n$  je počet fotonů emitovaný v jednom pulzu a další veličiny mají obvyklý význam. Po dosazení dostaneme pro počet fotonů v jednom pulzu výraz

$$n = \frac{E\lambda}{hc} = \frac{150 \cdot 10^{-3} \cdot 694,4 \cdot 10^{-9}}{6,62 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8} = 5,24 \cdot 10^{17}.$$

V jednom pulzu je přibližně  $5,24 \cdot 10^{17}$  fotonů.

# 11. Fyzika pevných látek

Fyzika pevných látek vysvětluje makroskopické vlastnosti pevných látek na základě jejich kvantově mechanického modelu jako souboru velkého množství částic, a to molekul, atomů, iontů a elektronů, které pevnou látku vytvářejí. Vychází přitom z poznatků řady fyzikálních disciplín jako je mechanika, nauka o vlnění, termodynamika, elektromagnetismus, optika, atomová fyzika a statistická fyzika.

## 11.1 Charakteristika pevných látek

Stejně jako v případě kapalin jsou molekuly látky těsně nakupeny (hustota částic je řádově  $10^{22}$  v  $1\text{cm}^3$  a jejich průměrná vzdálenost řádově  $10^{-1}$  nm), ale nejsou volně pohyblivé. Atomy a molekuly zauímají v pevné látce zcela určitá pevná místa (jsou to rovnovážné polohy, ve kterých výsledná síla působící na částici je nulová), kolem kterých konají kmitavé pohyby.

**Pevné látky dělíme na amorfnní a krystalické.**

**Amorfnní látky** mají neuspořádané rozložení atomů, resp. molekul, jako kapaliny (při tuhnutí kapaliny se nestačí utvořit krystalické uspořádání).

**Krystalické látky** mají rozložení atomů a molekul (resp. iontů) prostorově pravidelně uspořádáno. Jejich prostorové uspořádání má pravidelnou strukturu a vytváří **krystalovou mřížku**. V krystalu je rozložení částic podél libovolného směru periodické.

**Ideální krystal** je nekonečný a jeho struktura je zcela pravidelná, bez poruch. Krystal konečných rozměrů se zcela dokonalou strukturou bývá označován jako **dokonalý krystal**. Reálný krystal je konečný a vykazuje více či méně četné geometrické i chemické odchylky od ideálního krystalu. K reálným krystalům náleží všechny skutečně existující krystaly, ideální a dokonalý krystal slouží pouze jako modely pro výklad struktury i některých fyzikálně-chemických vlastností reálných krystalů. Těleso tvořené jediným krystalem nebo kompaktním souborem krystalů málo odlišné orientace se nazývá **monokrystal**. Kompaktní soubor krystalů s výrazně odlišnou orientací se nazývá **polykrystal**.

Těleso dané krystalické látky může být monokrystalem (jediným krystalem) nebo polykrystalické (složené z drobných monokrystalů, tzv. zrn). Teplota tání krystalické látky je vždy stejná, i když krystal vznikl jakýmkoliv způsobem (z roztoku, z taveniny, nebo jinak). Chemicky čisté látky jsou zpravidla krystalické.

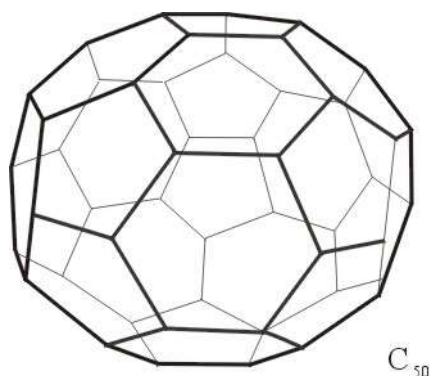
Některé látky se mohou vyskytovat v různých modifikacích (s různou vnitřní strukturou), např. uhlík má tři modifikace: dvě krystalické - diamant, tuha a jednu amorfnní - saze.

K základním typům pevných látek patří, kromě látek krystalických a amorfnních, také látky, které mohou existovat v částečně uspořádaném stavu. Velmi početnou skupinu představují **polymery**, jejichž molekuly jsou vytvořeny ze stabilních atomových seskupení spojených pevnými vazbami. Mohou mít krystalickou i amorfnní strukturu, případně různé oblasti těchto struktur. Další skupinu s určitou mírou uspořádanosti tvořící přechod mezi amorfnními látkami a krystaly jsou **kapalné krystaly**.

V poslední době byla vytvořena nová uspořádání atomů, která svým uspořádáním leží někde mezi krystaly a amorfními látkami. Jedná se o **modulované** a **kvazikrystalické struktury**.

V látkách s modulovanou krystalickou strukturou je v jednom nebo i více směrech kromě základní periody krystalu dané elementární buňkou ještě další, podstatně delší perioda, která není násobkem základní periody. Říkáme o nich, že mají **nesouměřitelné struktury**. Takové látky mají zajímavé fyzikální vlastnosti a počítá se i s jejich praktickým využitím.

Představitelem kvazikrystalu je například  $\text{Al}_{86}\text{Mn}_{14}$ , v kterém byla zjištěna pětičetná osa symetrie, která je v normálních krystalech zakázána. Přesto se tato látka, například vzhledem k difrakci, chová jako krystal. Vykazuje tedy, i když má neperiodické uspořádání, orientační a polohové uspořádání na dálku, typické pro krystaly. Fyzikální vlastnosti kvazikrystalů jsou velmi neobvyklé. Jsou velmi pevné, ale křehké, mají malou tepelnou vodivost a velmi malý koeficient tření. Očekává se proto využití ve formě tepelně izolujících vrstev a jako povrchových vrstev ve válcích motorů. Vytvářejí také výborně přilnavé povrchy, trvanlivé i ze vysokých teplot. Již nyní se používají na kvazikrystalické povlaky pánví.



Obr.11.1

V osmdesátých letech minulého století byla nalezena další forma uspořádání atomů uhlíku v podobě molekuly  $\text{C}_{60}$ . Molekula je uzavřený prostorový útvar, vytvořený jako fotbalový míč z 12 pětiúhelníků a 20 šestiúhelníků. Molekula je vyobrazena na obr.11.1.

Molekula  $\text{C}_{60}$  a jí podobné molekuly  $\text{C}_{20}$ ,  $\text{C}_{70}$ ,  $\text{C}_{76}$ ,  $\text{C}_{84}$  a další se nazývají **fullereny**. V určitém malém množství se fullereny vyskytují v přírodě v sazích, lze je však připravit uměle speciální metodou založenou na obloukovém výboji.

Fullereny mají řadu výjimečných vlastností. Jsou to například anomálie v optických vlastnostech, využitelné v optoelektronice, dále možnost přeměny fullerenu vysokým tlakem na diamant (i při pokojové teplotě) s velmi dobrými vlastnostmi. Sloučeniny fullerenů s alkalickými kovy vykazují supravodivost přibližně do 30 K.

Do fullerenů je možné uvěznit molekulu nebo atom, které s nimi nevytvářejí vazby. Předpokládají se různé možnosti využití včetně přenosu molekuly léčiva do organismu.

Další aplikací jsou **uhlíkové nanotrubičky** – svinuté roviny grafitu uzavřené polokoulemi fullerenů, které by se měly v závislosti na svém poloměru a šroubovitosti chovat buď jako kovy nebo polovodiče. Nanotrubičky byly například úspěšně použity v mikroelektronice. U běžného, polem řízeného tranzistoru prochází proud regulovaný napětím hradla napařenou polovodičovou vrstvičkou. Mnohem technologicky vyspělejší nanouhlíkový tranzistor má však místo polovodiče použítu nanotrubičky, přičemž lze dosáhnout mnohem lepších dynamických vlastností. Další jistě pozoruhodnou aplikací je spojení žárovky s moderní nanotechnologií, kdy se zkoušelo použít vlákno z uhlíkových nanotrubiček namísto tradičního wolframového vlákna. Uhlíková "nanožárovka" má lepší účinnost a životnost.

Vzhledem k tomu, že amorfní látky jsou některými vlastnostmi blízké kapalinám, užívá se termín pevné látky často jen pro látky s krystalickou strukturou. Zatímco u amorfních látek mají fyzikální vlastnosti skalární charakter, u krystalů se setkáváme jak s vlastnostmi skalárními (hustota), tak vektorovými (polarizace) a tenzorovými (elastické vlastnosti). Krystalická látka

je podstatou řady svých vlastností **anizotropní** (v různých směrech jsou hodnoty fyzikálních veličin různé).

## 11.2 Krystalová struktura

Pro popis krystalové struktury musíme definovat pojem **krystalová mřížka**. Krystalová mřížka je abstrakce, která vyjadřuje periodicitu rozmístění ekvivalentních bodů v krystalu. Můžeme si ji představit jako výsledek opakovaných translací zvoleného výchozího bodu pomocí tří nekomplanárních mřížkových vektorů. Každá krystalová mřížka je trojnásobně periodická podle **tří základních vektorů  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  mřížky**.

Představme si jeden libovolný bod v krystalu a spojme tento bod s jiným ekvivalentním bodem struktury pomocí vektoru  $\vec{T}$ .

$$\vec{T} = u\vec{a} + v\vec{b} + w\vec{c}, \quad (11.1)$$

kde  $u, v, w$  jsou indexy mřížkových bodů.

**Prostorová mřížka je definovaná třemi základními translačními vektory  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ .**

**Při posunu mřížky o translační vektor přejde mřížka sama v sebe.**

Výchozí bod a všechny jeho obrazy vytvořené translacemi nazýváme **mřížkové (uzlové) body**.

**Velikosti základních translací  $|\vec{a}|, |\vec{b}|, |\vec{c}|$  označujeme jako mřížkové parametry.**

Hranol o hranách, které jsou identické s velikostí vektorů  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ , tvoří **elementární buňku** prostorové mřížky.

**Objem elementární buňky je roven**

$$V = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}. \quad (11.2)$$

Mezi elementárními buňkami existuje buňka o nejmenším možném objemu – **primitivní buňka**. Jí odpovídající základní translační vektory jsou **primitivní základní translační vektory**.

**Ideální krystal** je tvořen nekonečným opakováním identických strukturních jednotek v prostoru.

**Strukturní jednotka** je v nejjednodušším případě tvořena jedním atomem (krystal prvkem), ale může obsahovat i  $10^4$  atomů (v krystalech bílkovin)

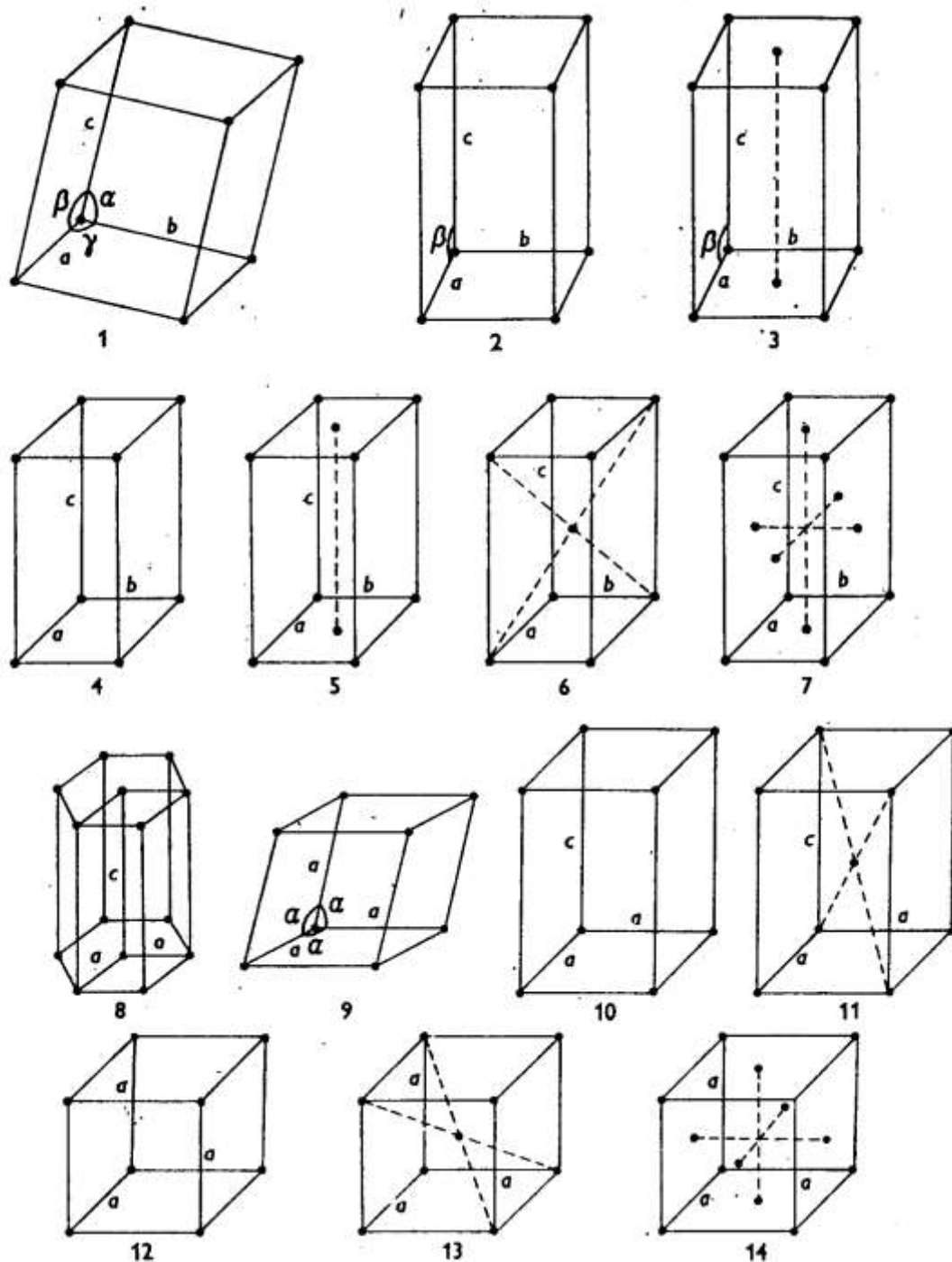
**Krystalová struktura** je tvořena periodickou prostorovou mřížkou bodů, (mřížkových bodů), ke každému mřížkovému bodu přísluší identický atomární motiv, **báze**.

**krystalová struktura = prostorová mřížka + báze**

Podle toho, kolik mřížkových bodů připadá na objem jedné buňky, se rozlišují následující typy mřížek :

- mřížky, které mají mřížkové body pouze ve vrcholech buňky, se nazývají **primitivní**,
- mřížky, které mají mřížkové body i mezi vrcholy buňky, se nazývají **centrované**, (složené, neprimitivní),
- mřížky se dvěma mřížkovými body uprostřed protilehlých stran buňky se nazývají **bazálně centrované**,
- mřížky s mřížkovým bodem v průsečíku tělesových úhlopříček buňky nazýváme **prostorově centrované**,

- mřížky s mřížkovými body uprostřed každé plochy buňky se nazývají **plošně centrované**. Jiné typy mřížek nemá smysl zavádět, protože je lze vždy převést na výše uvedené typy. Existuje celkem 14 základních, **Bravaisových mřížek**, z nichž 7 je primitivních a 7 složených, obr. 11.2.



Obr.11.2

1) Triklínická prostá, 2) monoklinická prostá, 3) monoklinická bazálně centrovaná, 4) ortorombická prostá, 5) ortorombická bazálně centrovaná, 6) ortorombická prostorově centrovaná, 7) ortorombická plošně centrovaná, 8) hexagonální, 9) romboedrická, 10) tetragonální prostá, 11) tetragonální prostorově centrovaná, 12) kubická prostá, 13) kubická prostorově centrovaná, 14) kubická plošně centrovaná.

Pojmy struktura a mřížka bychom neměli zaměňovat. Strukturou krystalu rozumíme konkrétní prostorové rozložení jeho atomů (molekul). Mřížka je abstrakce vystihující translační periodicitu tohoto uspořádání, která umožňuje popsat strukturu krystalu, např. určením rozmístění částic v jedné buňce mřížky

Čtrnáct Bravaisových mřížek je rozděleno do 7 soustav. Každá z nich je charakterizovaná velikostmi  $a, b, c$  základních vektorů a meziosovými úhly  $\alpha, \beta, \gamma$ , tab.11.1. Úhel mezi vektory  $\vec{b}, \vec{c}$  se označuje  $\alpha$ , úhel mezi  $\vec{a}, \vec{c}$  se značí  $\beta$  a mezi  $\vec{a}, \vec{b}$  je  $\gamma$ .

Tab.11.1

Triklinická	$a \neq b \neq c$	$\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq 90^\circ$	P
Monoklinická	$a \neq b \neq c$	$\alpha = \gamma = 90^\circ \neq \beta$	P,C
Rombická	$a \neq b \neq c$	$\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$	P,I,F,C
Trigonální	$a = b = c$	$\alpha = \beta = \gamma \neq 90^\circ$	P
Tetragonální	$a = b \neq c$	$\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$	P,I
Hexagonální	$a = b \neq c$	$\alpha = \beta = 90^\circ, \gamma = 120^\circ$	P
Kubická	$a = b = c$	$\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$	P,I,F

V tabulce je uvedeno značení buněk: P – primitivní, I – prostorově centrovaná, C – basálně centrovaná.

### 11.3 Mřížkové roviny

Každá rovina, v níž leží alespoň tři uzlové body krystalové mřížky, se nazývá **mřížková rovina** (tyto tři body nesmí ležet na přímce). Je-li některý mřížkový bod počátkem souřadnic, pak polohový vektor jiného libovolného mřížkového bodu může být vyjádřen podle vztahu (11.1) a trojice čísel  $u, v, w$  vytváří **indexy uzlu**, které se zapisují pomocí trojice čísel jako  $[[u\ v\ w]]$ .

Směr definovaný translačním vektorem  $\vec{T}$  označujeme jako  $[u\ v\ w]$ . Prostorovou mřížku si lze představit nekonečným počtem způsobů pomocí množin rovnoběžných **mřížkových rovin** navzájem stejně vzdálených. (Množina rovnoběžných rovin se nazývá **osnova mřížkových rovin**.) Postačující charakteristikou dané osnovy mřížkových rovin je orientace jedné z těchto rovin vzhledem ke zvoleným osám (ve směru vektorů  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ) a mezirovinná vzdálenost.

**Mezirovinná vzdálenost je definována jako kolmá vzdálenost mezi dvěma nejbližšími rovinami téže osnovy a označuje se symbolem  $d_{hkl}$  (např.  $d_{001}, d_{321}$ ). Užívá se pro ni často název mřížková konstanta.**

Pro přesnější identifikaci rovin v prostoru se používají **Millerovy indexy**. Určitá osnova mřížkových rovin má tedy obecně symbol  $h, k, l$ . Stačí udat orientaci té roviny, která je nejbližší počátku. Necht' tato rovina vytíná na osách úseky  $a/h, b/k, c/l$ . Pak celá čísla  $h, k, l$  se nazývají Millerovy indexy. Jsou to tři nesoudělná čísla, pro která platí

$$h : k : l = \frac{1}{r} : \frac{1}{s} : \frac{1}{t} , \quad (11.3)$$

kde  $r, s, t$  jsou úseky vytínané na osách uvažovaného systému.

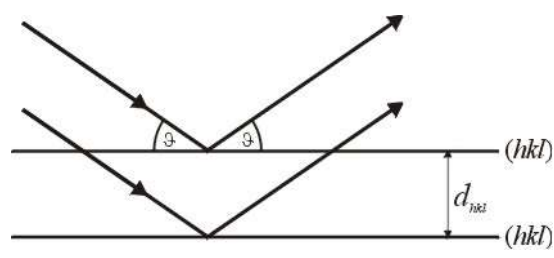
## 11.4 Difrakce záření krystalem

Nejrozšířenějším způsobem studia struktury látek jsou metody rentgenové difrakční analýzy. Je to řada metod založených na interakci rentgenového záření s látkou, v našem případě s krystalem. Vedle rentgenových difrakčních metod se pro studium struktury krystalů využívá interakce elektronů (elektronová difrakční analýza) nebo neutronů (neutronová difrakční analýza) s krystalem.

Rentgenové záření je elektromagnetické záření stejné fyzikální povahy jako světlo, ale jeho vlnová délka se pohybuje v oboru  $10^{-11}$  až  $10^{-8}$  m. Protože vzdálenost mezi jednotlivými částicemi ve strukturách krystalů je obvykle řádově  $10^{-9}$ – $10^{-10}$  m, využívá se v praxi pro strukturní analýzu krystalů záření o obdobné vlnové délce. Při průchodu rentgenového záření strukturou krystalu dochází k jeho difrakci.

Předpokládejme, že svazek rentgenového záření o vlnové délce  $\lambda$  dopadá na krystal reprezentovaný svazkem rovnoběžných rovin od sebe vzdálených o  $d_{hkl}$ . Situace je znázorněna na obr.11.3.

Po odrazu na jednotlivých rovinách vlny interferují a nenulovou intenzitu odražených vln zaznamenáme pro dráhový rozdíl  $\delta = n\lambda$ , kde  $n = 1, 2, 3 \dots$ . Dráhový rozdíl vln odražených od sousedních rovin můžeme vyjádřit vztahem



$$\delta = 2d_{hkl} \sin \vartheta, \quad (11.4)$$

kde  $\vartheta$  je úhel mezi dopadajícím svazkem a difraktující rovinou.

Obr.11.3

S využitím podmínky celistvého násobku vlny dostáváme **Braggovu rovnici** ve tvaru

$$2d_{hkl} \sin \vartheta = n\lambda . \quad (11.5)$$

Výsledkem difrakčních metod může být:

- určení mřížkových parametrů látek,
- měření tloušťky tenkých vrstev,
- studium textur (přednostní orientace)
- určení koeficientu tepelné roztažnosti
- určení makroskopických napětí v materiálu.

## 11.5 Vazby v pevných látkách

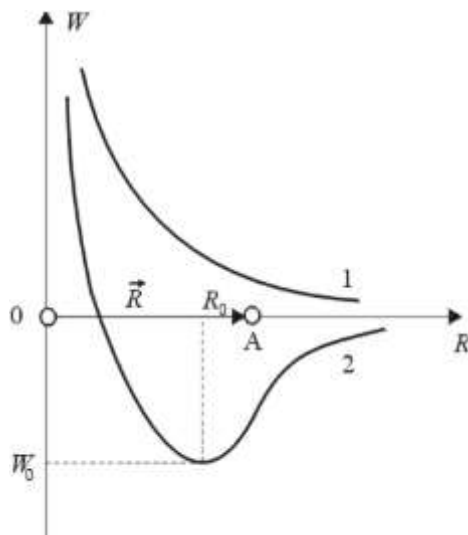
Budeme se zabývat pouze pevnými látkami s pravidelnou strukturou, tedy krystalickými látkami.

Jednotlivé atomy, resp. ionty jsou v pevné látce navzájem vázány **přitažlivými kohezními silami**. Víme ale, že na malých vzdálenostech musí rovněž existovat **odpudivé síly**. Uvažujme dva atomy, z nichž jeden je umístěn v počátku souřadnic a druhým budeme pohybovat ve směru osy  $r$ , obr.11.4. Budeme se zabývat průběhem potenciální energie  $W$ , která je důsledkem silového působení mezi atomy. Pro sílu  $\vec{F}$  platí vztah

$$\vec{F} = -\text{grad } W = -\frac{dW}{dr} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} . \quad (11.6)$$

**V místech, kde derivace  $\frac{dW}{dr}$  je kladná, má  $\vec{F}$  opačný směr než  $\vec{r}$  a je přitažlivá.**

**V místech, kde derivace  $\frac{dW}{dr}$  je záporná, má  $\vec{F}$  stejný směr jako  $\vec{r}$  a je odpudivá.**



Obr.11.4

Z obr.11.4 je vidět, že křivka 1 odpovídá případu, kdy se atomy na libovolné vzdálenosti vzájemně odpuzují. Křivka 2 odpovídá případu, kdy pro vzdálenost  $r < R_0$  se atomy odpuzují, a pro  $r > R_0$  se přitahují. Pro vzdálenost  $r = R_0$  je derivace  $\frac{dW}{dr} = 0$ , síla  $\vec{F}$  je nulová a soustava je v rovnovážném stavu.

Vzájemná interakce dvou atomů může být v takovém případě vyjádřena vztahem

$$W(r) = \frac{A}{r^m} - \frac{B}{r^n} , \quad (11.7)$$

kde  $A, B, m, n$  jsou kladné parametry. První člen popisuje odpudivou, druhý přitažlivou sílu. Tento vztah lze zobecnit i pro soubor  $N$  atomů. Hodnota  $R_0$  určená ze vztahu  $\frac{dW}{dr} = 0$  udává mřížkový parametr.

Formální matematický popis vzájemného silového působení, který jsme použili v předchozím odstavci, je třeba podpořit fyzikální úvahou o podstatě přitažlivých a odpudivých sil mezi atomy. V případě dvou atomů přitažlivá elektrostatická síla existuje mezi valenčními elektrony a jádrem druhého atomu, odpudivá síla působí mezi jádery atomů a zabraňuje jejich těsnému přiblížení. Ve stavu rovnováhy se obě síly vyrovnají, vytvoří se molekula s atomy v odpovídající vzdálenosti. V případě pevné látky je situace podobná, opět hledáme rovnováhu sil, ale atom nebude vázán vazbou pouze s jedním dalším atomem, ale s několika sousedy. Druh vazby mezi atomy se také bude měnit, a to podle elektronové struktury atomů. Jinou vazbu budou vytvářet atomy inertních plynů, které mají zcela uzavřené podslupky, jinou alkalické kovy, které mají jeden (valenční) elektron prakticky volný.

Klasifikace pevných látek s krystalickou strukturou podle původu meziatomových sil rozlišuje čtyři hlavní kategorie vazeb:



- **iontová**
- **kovalentní**
- **kovová**
- **Van der Waalsova.**
- 

### **Iontová vazba**

Dominantní kohezní silou v iontových krystalech je Coulombova přitažlivá elektrostatická síla mezi opačně nabitými ionty. Ionty  $\text{Na}^+$  a ionty  $\text{Cl}^-$  vzniknou doplněním podslupky atomu Cl slabě vázaným valenčním elektronem atomu alkalického kovu Na. V plošně centrované kubické mřížce NaCl je kladný iont  $\text{Na}^+$  obklopen 6 nejbližšími sousedy, záporně nabitými ionty  $\text{Cl}^-$ . Pokud uvažujeme pouze interakci mezi nejbližšími sousedy v mřížce, odpovídající potenciální energie  $W_p$  iontu v NaCl je

$$W_p = -6 \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a} ,$$

kde  $a$  je vzdálenost mezi nejbližšími sousedními ionty. V plošně centrované kubické mřížce je 6 iontů  $\text{Cl}^-$  obklopeno 12 dalšími nejbližšími ionty  $\text{Na}^+$ , které svým odpuzováním s původním iontem  $\text{Na}^+$  korigují přitažlivou sílu. Pro NaCl krystal můžeme výslednou potenciální energii iontu psát ve tvaru

$$W_p = - \sum_j \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_j} = - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a} \left( 6 - \frac{12}{\sqrt{2}} + \frac{8}{\sqrt{3}} - \dots \right) = -\alpha \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a} , \quad (11.8)$$

kde  $\alpha$  je Madelungova konstanta, která závisí pouze na typu mřížky, nikoliv na druhu iontů. Podobně jako NaCl je například vázán MgO, kde dokonce dva valenční elektrony z atomu Mg doplní podslupku atomu kyslíku O. protože se v tomto případě jedná o dvakrát ionizované ionty, bude také kohezní síla větší, než v případě NaCl. To se projeví ve fyzikálních vlastnostech látky, například v teplotě tání, která je pro oxid hořečnatý  $2800^\circ\text{C}$ , zatímco pro NaCl je  $800^\circ\text{C}$ .

Iontová vazba je nejsilnější ze všech druhů vazeb a energie vazby je řádově  $1,6 \cdot 10^{-18}$  J/atom.

### **Kovalentní vazba**

Vysvětlení kovalentní vazby je možné pouze v rámci kvantové fyziky. Kovalentní vazbou jsou v nejjednodušším případě vázány dva atomy vodíku v molekule  $\text{H}_2$ . V případě vodíkové molekuly jsou dva elektrony sdíleny společně oběma jádry (vyměňují si je) a lze dokázat, že energeticky výhodnější je uspořádání, kdy elektrony mají Obr. 5.4 a, b spiny orientované opačně.

Kovalentní vazbu vytvářejí například atomy C, Ge a Si ze IV. sloupce periodické tabulky prvků. Iontová vazba není možná, protože atomy v tomto sloupci již nejsou jednoduše ionizovatelné. Elektronová konfigurace uhlíku je  $1s^2, 2s^2, 2p^2$  a k doplnění podslupky  $2p$  chybějí čtyři elektrony. Jako možnost se proto nabízí sdílení potřebných elektronů s nejbližšími sousedními atomy.

Typické chování vykazuje diamant. Každý atom uhlíku je v tetraedrickém uspořádání obklopen čtyřmi nejbližšími sousedními atomy, s kterými sdílí čtyři elektrony. Kovalentní vazby jsou tedy vytvářeny se čtyřmi nejbližšími sousedy.

Čistě kovalentních krystalů je velice málo. Všechny kovalentní krystaly jsou tvrdé a mají vysoký bod tání.

Kovalentní vazbě odpovídá vazebná energie 5 až  $8 \cdot 10^{-19}$  J/atom.

### **Kovová vazba**

V krystalu kovu jsou atomy také ionizovány. Atomy z I.-III. sloupce snadno uvolňují valenční elektrony, které jsou pak společné všem atomům jako celku. Hovoříme (v rámci klasické fyziky) o **elektronovém plynu**. Valenční elektrony se krystalem mohou pohybovat prakticky volně a jejich mobilita podmiňuje velkou vodivost kovů.

V následující kapitole se budeme zabývat elektrickou vodivostí z hlediska kvantové pásové teorie pevných látek a budeme popisovat chování elektronu v periodickém potenciálu mřížky vytvořené kladně nabitými ionty. Uvidíme, že z energetického hlediska je pravidelné uspořádání atomů kovu v krystalu výhodnější, protože potenciální energie valenčních elektronů je v krystalu menší, a právě toto snížení potenciální energie podmiňuje kovovou vazbu.

Kovová vazba, jak vyplývá z její podstaty, není směrově orientovaná. Proto je v případě kovových sloučenin možné mísit kovové prvky, například měď a zlato, v jakémkoliv poměru. Energie vazby je 1,6 až  $8 \cdot 10^{-19}$  J/atom, kovová vazba je většinou slabší než vazba kovalentní.

### **Van der Waalsova vazba**

Inertní plyny při dostatečně nízké teplotě kondenzují a vytvářejí molekulární krystaly. Podobně se chovají další látky, jejichž molekuly se vyznačují zcela uzavřenými elektronovými podslupkami, například  $\text{CH}_4$ ,  $\text{CO}_2$ , atd., a nemají tedy k dispozici volné elektrony pro uskutečnění vazeb uvedených v předchozích odstavcích.

Atom s uzavřenými elektronovými slupkami si můžeme představit tak, že se skládá z kladně nabitého jádra a sférického záporně nabitého elektronového obalu. Jestliže se rozmístění náboje v elektronovém obalu v čase nemění, pak by mezi jednotlivými atomy neexistovalo žádné silové působení. Ukazuje se však, že molekuly některých látek se chovají přímo jako dipóly (například led), některé vykazují rychle se měnící dipólový moment, který je sice v průměru nulový, ale jeho okamžité změny mohou ovlivňovat rozmístění elektronů v okolních atomech. Fluktuující dipólové momenty vytvářejí elektrické pole, které je charakterizováno přitažlivou interakční silou, závislou na vzdálenosti jako  $1/r^7$ . Tato síla, nazývaná Van der Waalsova je silou slabou, krátkého dosahu, která je známa již ze vzájemného působení molekul plynů, kde způsobuje odchylky od zákonitostí pro ideální plyny.

Pro látky, vázané Van der Waalsovými silami jsou charakteristické: nízký bod tání a varu. Molekulární krystaly jsou výborné izolanty. Typická hodnota vazebné energie je přibližně  $1,6 \cdot 10^{-20}$  J/atom.

### **Krystaly se smíšenými vazbami**

V některých látkách s krystalickou strukturou se vyskytují současně různé vazby. Najdeme například kovalentně vázané látky, které zároveň vykazují vlastnosti kovů. Grafit se skládá z vrstev uhlíkových atomů, které jsou mezi sebou spojeny Van der Waalsovými silami. Ve vrstvě jsou atomy uhlíku zčásti vázány kovalentní a zčásti kovovou vazbou. Výsledkem jsou charakteristické vlastnosti grafitu: je vodivý a je dobrý lubrikant, protože jednotlivé vrstvy, vzhledem ke slabé vazbě mezi nimi, mohou po sobě snadno klouzat.

Podobně, v molekulárním krystalu CH<sub>4</sub> drží molekuly pohromadě kovalentní vazba, a krystal je vázán van der Waalsovými silami.

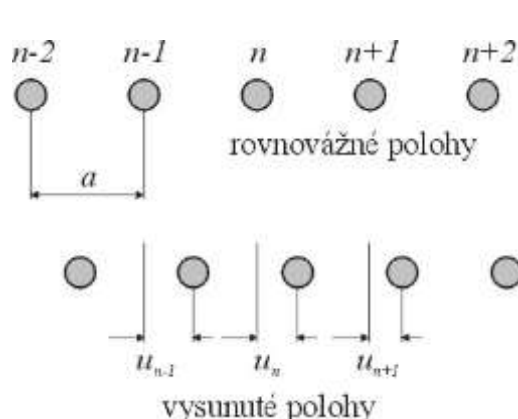
Prvek cín může vytvářet jak kovové tak kovalentní uspořádání atomů. Nad teplotou 13,2<sup>o</sup> C existuje **bílý cín**, jehož atomy jsou uspořádány v tetragonální prostorově centrované mřížce. Pod touto teplotou se vyskytuje kovalentní **šedý cín**, jehož struktura je stejná jako struktura diamantu.

Kromě uhlíku, jehož modifikace, diamant a grafit, fulleren, se vyznačují zcela odlišným krystalickým uspořádáním, většina ostatních látek se vyskytuje vždy za všech podmínek v určitém neměnném uspořádání. Výjimku tvoří například síra, cín, železo, které vykazují různá uspořádání charakteristická pro určitá rozmezí teploty a tlaku. Železo přechází při teplotě okolo 910<sup>o</sup>C a při normálním tlaku. Z uspořádání prostorově centrované mřížky do plošně centrované a na zpět do původního uspořádání se vrací při teplotě 1 400<sup>o</sup>C a stejném tlaku.

## 11.6 Kmity krystalové mřížky

Atomy krystalové mřížky vykonávají tepelné kmity kolem svých rovnovážných poloh, přičemž amplituda těchto kmitů závisí na síle vazby v látce a roste s teplotou. Jako názornou představu můžeme pro další úvahy představu hmotných bodů (kuliček) umístěných na struně. Předpokládejme pro jednoduchost jednorozměrnou mřížku se stejnými atomy. Vyjděme z okamžiku, kdy vychýlíme jeden atom z rovnovážné polohy. Situace je znázorněna na obr.11.5. Pak můžeme pro n-tý atom v řadě psát pohybovou rovnici, kde o velikosti  $F_n$  síly působící na tento atom můžeme předpokládat, že je přímo úměrná velikosti výchylky atomu z rovnovážné polohy. Tento předpoklad nazýváme harmonické přiblížení. Řešením pohybové rovnice, která má tvar vlnové rovnice, je postupná vlna, charakterizovaná frekvencí  $\nu$  a fázovou rychlostí  $v$ . Jestliže uvažujeme řetězec se dvěma různými druhy atomů, například v iontovém krystalu, bude situace vzhledem k povaze sil vazby komplikovanější. V tomto případě mohou vzniknout jak akustické, tak optické kmity. V optickém módu kmitají ionty proti sobě, v akustickém ve fázi. Mají-li atomy opačné náboje, lze optické kmity vyvolat elektrickým polem světelné vlny, a proto je nazýváme optické.

Pro krystal je třeba uplatnit zákonitosti kvantové mechaniky, a proto **energie přenášená kmity bude kvantovaná**.



Energie kmitů mřížky je kvantovaná. Dovolené hodnoty energie jsou

$$E = (n + \frac{1}{2})h\nu, \quad (11.9)$$

kde  $n$  je celé číslo, různé od nuly,  $\nu$  je frekvence kmitů mřížky. Vztah (11.9) vyplývá z řešení Schrödingerovy rovnice pro harmonický oscilátor, za který můžeme považovat každý kmitající atom. Na energetická kvanta kmitů můžeme v soulase s částicově-vlnovým dualizmem pohlížet jako na

Obr.11.5

kvazičástice s hybností  $p = \frac{h}{\lambda} = \frac{h\nu}{v}$ , kde  $v$  je fázová rychlost šíření kmitů mřížkou. Tyto kvazičástice v analogii s fotony dostaly název **fonony**.

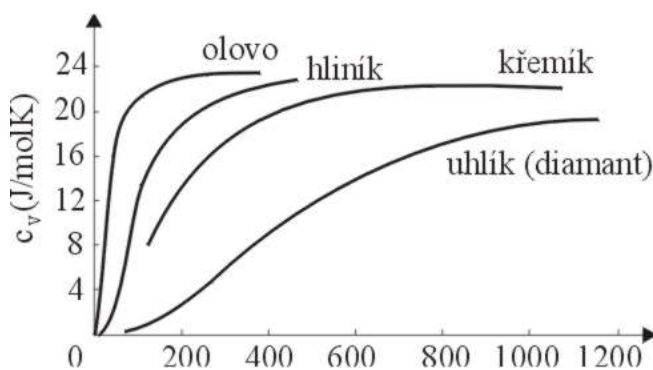
### Fonon je částice nesoucí kvantum tepelné energie.

Každé teplotě krystalu odpovídá široké spektrum fononů (v závislosti na jejich frekvenci nebo vlnové délce), od nízkých frekvencí akustických kmitů až po frekvence řádu  $10^{13}$  Hz. S rostoucí teplotou krystalu se v fononovém spektru uplatňují čím dál více i fonony s vyšší frekvencí.

## 11.6 Tepelné kapacity pevných látek

Pro výpočet molární tepelné kapacity pevné látky můžeme využít získané poznatky o tepelných kmitech mřížky. Bylo zjištěno, že pro měrné tepelné kapacity většiny pevných látek platí jednoduchý vztah, který se nazývá Dulongovo-Petitovo pravidlo. Říká, že

$$C_{vm} = 3R_m \cong 25 \text{ J/mol} \quad . \quad (11.10)$$



Obr.11.6

Vztah (11.10) však přestává platit pro teploty blízké se k absolutní nule, protože molární tepelné kapacity všech pevných látek při nízkých teplotách rychle klesají k nulové hodnotě. Závislost  $C_{vm}$  na teplotě pro čtyři prvky je na obr.11.6. Relace (11.10) neplatí, jestliže teplota klesne pod určitou teplotu, která pro většinu prvků leží v intervalu 100-400 K. Vysvětlení chování měrné tepelné kapacity pod touto teplotou je možné pouze s pomocí kvantové mechaniky, zejména vztahu (11.9) pro energii fononů.

## Příklady ke kap.11

### Příklad 11.1

Stanovte a) úhel  $\vartheta$ , při kterém dojde k difrakci 1. řádu monoenergetického rentgenového záření na rovinách (100) prosté kubické mřížky s mřížkovou konstantou  $3 \cdot 10^{-10}$  m, jestliže vlnová délka záření je  $1 \cdot 10^{-10}$  m. Stanovte b) energii rentgenového záření.

**Řešení:**

a)

Pro difrakci rentgenového záření platí Braggova rovnice, vztah (11.5)

$$2d_{hkl} \sin \vartheta = n\lambda .$$

Vzdálenost rovin (100) je pro prostou kubickou mřížku  $3 \cdot 10^{-10}$  m,  $n = 1$ . Z rovnice (11.5) dostaneme pro úhel  $\vartheta$  relaci

$$\vartheta = \arcsin \frac{n\lambda}{2d_{hkl}} = \arcsin \frac{1 \cdot 10^{-10}}{2 \cdot 3 \cdot 10^{-10}} = \arcsin \frac{1}{6} = 6^{\circ}36' .$$

Difrakce nastane pod úhlem  $6^{\circ}36'$ .

b)

Pro energii rentgenového záření platí obecný vztah pro energii elektromagnetického záření ve tvaru

$$E = h\nu = h \frac{c}{\lambda} .$$

Po dosazení dostaneme

$$E = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}{1 \cdot 10^{-10} \text{ m}} = 19,89 \cdot 10^{-16} \text{ J} = 12,4 \text{ keV} .$$

Energie rentgenového záření je 12,4 keV.

### **Příklad 11.2**

Stanovte energii neutronů, při kterém dojde k difrakci 1. řádu monoenergetického svazku neutronů na rovinách (100) prosté kubické mřížky s mřížkovou konstantou  $3 \cdot 10^{-10}$  m, jestliže svazek neutronů dopadá pod stejným úhlem jako v předchozím případě..

**Řešení:**

Pro difrakci neutronového záření platí Braggova rovnice, vztah (11.5)

$$2d_{hkl} \sin \vartheta = n\lambda .$$

Všechny parametry z minulého případu zůstávají stejné, musíme pouze z de Broglieovy vlnové délky stanovit energii neutronů.

Pro kinetickou energii neutronů vyjádřenou pomocí de Broglieovy vlnové délky platí relace

$$E_k = \frac{p^2}{2m} = \frac{h^2}{2m\lambda^2} = \frac{(6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s})^2}{2 \cdot 1,675 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \cdot (1 \cdot 10^{-10} \text{ m})^2} = 13,121 \cdot 10^{-19} \text{ J} \doteq 0,082 \text{ eV} .$$

Neutrony nesou energii 0,082 eV.

## 12. Kovy, izolanty, polovodiče

V této kapitole se budeme opět zabývat pouze pevnými látkami s krystalickou strukturou, tedy takovými látkami, které mají atomy pravidelně uspořádané v krystalové mřížce. Zaměříme se především na elektrické vlastnosti látek, a to **rezistivitu  $\rho$** , **teplotní závislost rezistivity** charakterizovanou parametrem  $\alpha$  a **konzentraci  $n$  elektrických nábojů**. Ukazuje se, že parametry  $\rho, \alpha, n$  jsou veličinami charakteristickými pro rozlišení látek na **kovy, polovodiče, izolanty**.

Izolanty jsou látky s vysokou hodnotou rezistivity.

Polovodiče mají rezistivitu podstatně větší než kovy, jejich rezistivita se zmenšuje s teplotou a jejich koncentrace nosičů elektrického náboje je značně menší než v kovech.

Kovy mají teplotní součinitel rezistivity kladný, jejich rezistivita se zvětšuje s teplotou.

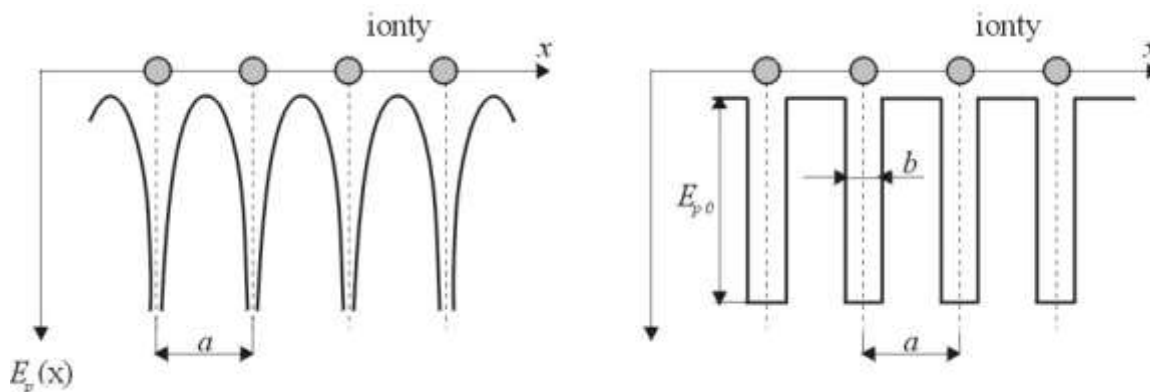
Problematiku vedení elektrického proudu v pevných látkách lze úspěšně řešit pouze s pomocí kvantové fyziky.

### 12.1 Elektron v periodickém potenciálu

V kap.8, odst. 8.5 jsme řešili případ elektronu v potenciálové jámě a konstatovali jsme, že stejným způsobem se chová elektron v atomu a jeho energie je kvantovaná. Jestliže nyní uvažujeme kov s periodickou strukturou krystalové mřížky, pak elektron, který se jako nosič náboje pohybuje touto strukturou, „vidí“ potenciály jednotlivých iontů. Pokud se dostane do blízkosti některého iontu, je odpuzován silou, která mu nedovolí se k iontu příliš přiblížit. V oblasti mezi ionty je elektron v poli s potenciálem závislým na převrácené hodnotě vzdálenosti, který odpovídá přitažlivé elektrostatické síle.

**Elektron se nachází v poli periodicky se měnícího potenciálu.**

Na obr. 12.1 je znázorněn průběh potenciální energie  $E_p(x)$  elektronu v krystalové mřížce kovu odpovídající coulombovským silám mezi elektronem a ionty mřížky. Vzdálenost sousedních



obr. 12.1

iontů mřížky je  $a$ . pro snadnější řešení Schrödingerovy rovnice je skutečný průběh potenciálu nahrazen obdélníkovou potenciálovou jámou hloubky  $E_{p0}$  a šířky  $b$ .

Řešením Schrödingerovy rovnice dostaneme jako v případě jedné jednorozměrné jámy tvar vlnové funkce  $\Psi(x)$ , která je pro tento případ periodická s periodou  $a$  mřížky. Platí pro ni

$$\Psi_k(x) = e^{ikx} u_k(x) \quad , \quad (12.1)$$

kde funkce  $u_k(x)$  splňuje podmínku

$$u_k(x+a) = u_k(x) \quad , \quad (12.2)$$

kde  $k$  je vlnové číslo (velikost vlnového vektoru  $\vec{k}$ ) charakterizující kvantový stav elektronu. Funkce  $\Psi(x)$  vyjádřená vztahem (12.1) se nazývá **Blochova funkce**. Pravděpodobnost nalezení elektronu v elementu  $\Delta x$  je opět dána  $|\Psi(x)|^2$  a je periodickou funkcí v krystalové mřížce.

Jestliže řešíme Schrödingerovu rovnici pro potenciálovou jámu, musíme se zabývat spojitostí vlnové funkce a její derivace na okrajích jámy uplatněním okrajových podmínek. Z řešení, které překračuje rámec tohoto skriptu dostaneme podmínku pro vlnová čísla, a tím i hodnoty energie, kterých může elektron v poli periodického potenciálu nabývat. Pro vlnová čísla  $k$  dostáváme podmínku

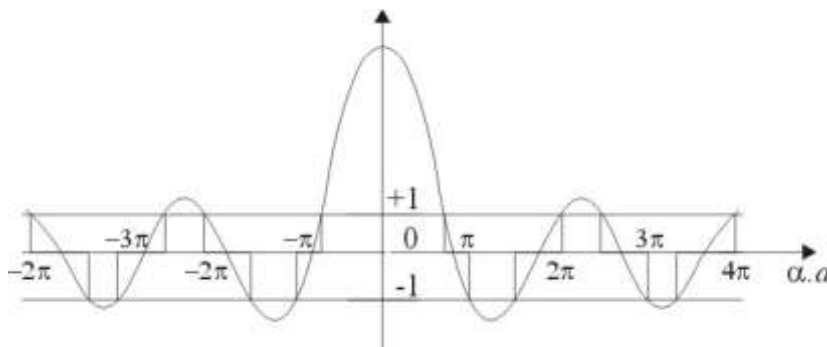
$$\cos ka = \frac{m_e a E_{p0} b}{\hbar^2} \frac{\sin \alpha a}{\alpha a} + \cos \alpha a \quad , \quad (12.3)$$

kde  $\alpha = \sqrt{\frac{2m_e E}{\hbar^2}}$ .

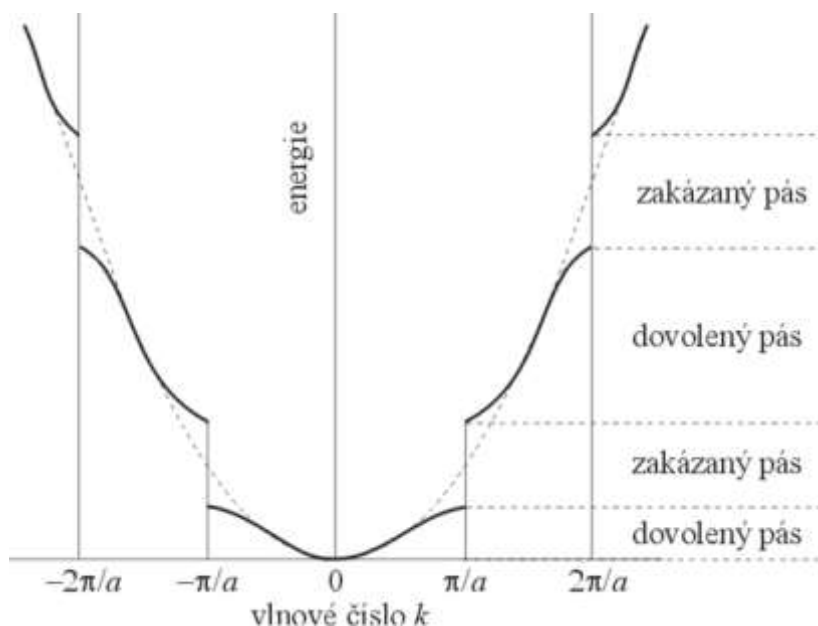
Levá strana rovnice může nabývat hodnoty pouze mezi  $-1$  a  $1$ . Z této podmínky vyplývají omezení pro hodnoty  $\alpha$  a tedy i pro  $E$ . Některé intervaly hodnot energie elektronu budou **zakázané**.

Výsledek řešení je v grafické podobě znázorněn na obr.12.2. Vyznačený interval hodnot  $\alpha a$  mezi  $-1$  a  $+1$  jsou hodnoty zakázané.

Obr.12.2



Důsledky řešení Schrödingerovy rovnice pro elektron v periodickém potenciálu můžeme interpretovat také přímo ze závislosti energie na vlnovém čísle. Pro volný elektron lze psát



Obr.12.3

vztah mezi energií a vlnovým číslem ve známém tvaru

$$E = \frac{p^2}{2m_e} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m_e}$$

a funkční závislostí je parabola. Skutečným řešením pro náš případ jsou křivky, tvořící pouze přibližně parabolu, uvedené na obr.12.3.

Nespojitosti na křivce nastávají pro hodnoty vlnového čísla  $k$ , které splňují rovnici

$$k = \pm \frac{\pi}{a}, \pm 2 \frac{\pi}{a}, 3 \frac{\pi}{a} \quad . \quad (12.4)$$

Tyto hodnoty vlnového čísla definují oblasti, nazývané **Brillouinovy zóny**. První zóna má hranice  $-\frac{\pi}{a}, +\frac{\pi}{a}$ , druhá probíhá v intervalech od  $-\frac{\pi}{a}$  do  $-2\frac{\pi}{a}$  a od  $+\frac{\pi}{a}$  do  $+2\frac{\pi}{a}$ . Zatím jsme ovšem předpokládali pouze jednorozměrné řešení potenciálové jámy, ve skutečnosti bude Brillouinova zóna trojrozměrný útvar.



## 12.2 Pásová struktura pevných látek

Existenci páسů dovolených a zakázaných hodnot energií je možné jednoduše pochopit na základě znalostí, které jsme doposud získali z řešení vodíkového a víceelektronových atomů.

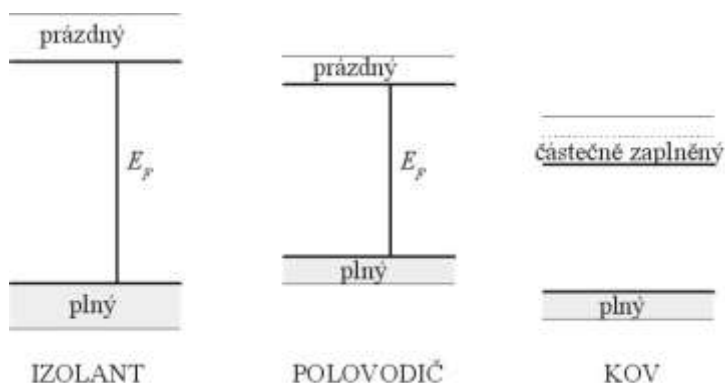
Máme-li dva stejné atomy, například sodíku, dostatečně vzdáleny od sebe, pak energie jejich valenčních elektronů, které jsou v podslupce  $3s$ , je identická. Jestliže k sobě při vytváření krystalové mřížky tyto atomy dostatečně přiblížíme, vlnové funkce elektronů se začnou překrývat a interakce mezi nimi způsobí, že jejich energie se nepatrně odliší. Říkáme, že energetická hladina  $3s$  se rozštěpila. Pro  $N$  atomů dojde k rozštěpení energetické hladiny  $3s$  na  $2N$  stavů (v každém stavu mohou být podle Pauliho principu dva elektrony s opačně orientovanými spiny) s velmi blízkými hodnotami energie, které vytvoří **energetický pás**.

**Každý energetický pás má  $N$  různých hladin. Hladina může být obsazena maximálně  $2(2l + 1)$  elektrony. Mezi pásy dovolených energií leží pásy zakázaných energií – zakázané pásy.**

Pás má obvykle šířku několik elektronvoltů. Protože počet atomů  $N$  i v malém množství látky je obrovský, jsou hladiny energie v pádu velmi blízké a počet hladin v pásu je veliký. Pásy s nižší energií ( $N = 1, 2, \dots$ ) jsou užší než pásy s větší energií. Důvodem je menší interakce elektronů z hluboko položených podslupek jednotlivých atomů mezi sebou než interakce vnějších elektronů. Odpovídající rozštěpení stavů je proto menší a pás je užší.

**Pro vedení elektrického proudu v pevné látce jsou rozhodující dva pásy. Směrem od nejnižších energií poslední obsazený pás (zcela nebo zčásti) a následující prázdný pás.**

Látka, v níž poslední valenční pás je obsazen elektrony jen zčásti, je schopná vést elektrický proud. Nazýváme ji **kov** a jeho vlastnostmi se budeme zabývat v dalším odstavci. Jestliže látka vůbec nevede elektrický proud, nazývá se **izolant**. Má plně obsazený valenční pás a Pauliho vylučovací princip brání elektronům přesouvat se do již zaplněných hladin. Nad zaplněným valenčním pásem je mnoho prázdných hladin v dalším nezaplňeném pásu. Aby mohl elektron zaplnit některou hladinu ve volném vodivostním pásu, musí překonat pásmo zakázaných energií, který odděluje valenční a volný pás. V izolantu je však šířka zakázaného pásu natolik velká (řádově několik eV), že elektron nikdy nemůže získat dostatek energie k jeho překonání. Při ohřátí látky na pokojovou teplotu mohou elektrony získat energii, která je v průměru o dva řády

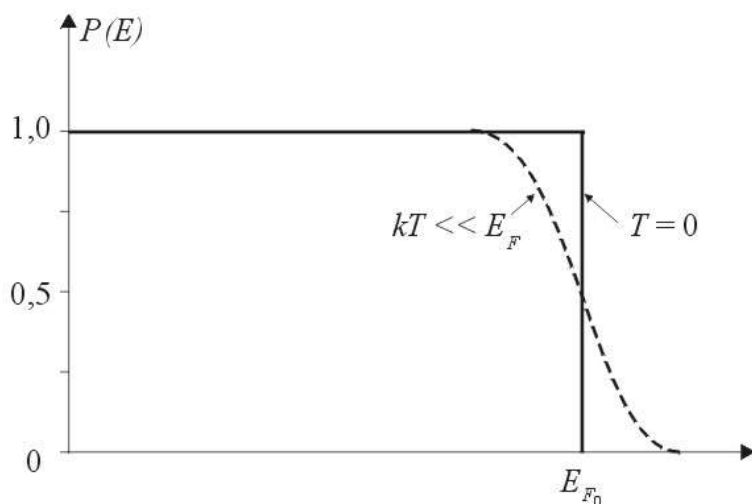


Obr.12.4

nižší než je šířka zakázaného pásu. Podobnou pásovou strukturu jako izolant má i **polovodič**. Poslední pás v polovodiči je rovněž zcela zaplněný, ovšem šířka zakázaného pásu je mnohem menší než v izolantu, takže část elektronů má při pokojové teplotě šanci dostat se do prázdného vodivostního pásu. Pásová struktura kovu, polovodiče a izolantu je znázorněna na obr.12.4.

## 12.3 Kovy

Pro kovy je, jak jsme uvedli v předchozím odstavci, charakteristický zčásti zaplněný valenční pás. Výjimečně se mohou v některých kovech také dva poslední pásy překrývat. Jako příklady lze uvést: z poloviny zaplněný pás má sodík, prvek z prvního sloupce periodické tabulky prvků, který má elektronovou konfiguraci  $1s^2, 2s^2, 2p^6, 3s^1$ , překryté poslední dva pásy má hořčík, který má elektronovou konfiguraci  $1s^2, 2s^2, 2p^6, 3s^2$  a poslední zaplněný pás má překrytý se zcela volným pásem  $3p$ . Elektronů mohou v neúplně zaplněném páse volně přecházet z jednoho energetického stavu do jiného, protože energie stavů v páse se liší jen velmi málo. Při



Obr.12.5

obsazování stavů musí však elektrony respektovat Pauliho vylučovací princip.

Obsazování stavů v pásech elektrony se děje stejně jako v jednotlivém atomu. Stavů jsou zaplňovány postupně od nejnižší energie. Výsledkem budou zcela zaplněné pásy a zčásti zaplněný valenční pás, který je zároveň vodivostním pásem. Ve vodivostním páse budou elektrony rovněž obsazovat stavy od nejmenší energie až po určitou hodnotu energie  $E_F$ , kterou nazýváme **Fermiho energie**. Tato jednoduchá úvaha však

platí pouze při teplotě absolutní nuly,  $T = 0$ . Ve skutečnosti nás však zajímá, jak se elektrony chovají při vyšších teplotách. Ukazuje se, že veličina  $kT$  ( $k$  je Boltzmannova konstanta) je vhodnou mírou pro energii, kterou mohou získat elektrony při tepelném pohybu krystalové mřížky. Hodnota této veličiny je i při vyšších teplotách velmi malá, a proto pouze malá část elektronů může získat dostatečnou energii pro přechod do prázdných vyšších energetických stavů ve vodivostním páse. Přesný kvantitativní obraz si můžeme vytvořit pouze tehdy, budeme-li znát, kolik kvantových stavů mohou elektrony obsadit a jaké budou jejich energie. Zodpovíme-li otázku obsazení volných kvantových stavů ve vodivostním páse, můžeme určit počet vodivostních elektronů.

Nejdříve budeme řešit otázku: Jaká je pravděpodobnost  $P(E)$  obsazení elektronem prázdného kvantového stavu s energií  $E$  ve vodivostním páse ?

Pro teplotu  $T = 0$  je situace jasná. Pravděpodobnost  $P(E) = 0$  pro všechny stavy s energiemi většími než  $E_F$  a  $P(E) = 1$  pro všechny stavy s energiemi menšími než  $E_F$ . Situace je znázorněna na obr.12.5 plnou čarou.

Jestliže řešíme případ, kdy  $T > 0$ , musíme respektovat skutečnost, že elektrony mají poločíselný spin a řídí se Fermiho-Diracovou statistikou. Pro pravděpodobnost  $P(E)$  obsazení stavu platí vztah

$$P(E) = \frac{1}{e^{(E-E_F)/kT} + 1}, \quad (12.5)$$

kde  $E_F$  je Fermiho energie. Na obr.12.5 je čárkovaně znázorněn průběh pravděpodobnosti v závislosti na energii  $E$  stavu pro teplotu  $T = 1000$  K. Z grafu vyplývá, že změny v rozdělení elektronů se týkají pouze stavů s energiemi blízkými k Fermiho energii. Dosadíme-li do vztahu (12.5) hodnotu energie  $E = E_F$ , dostaneme  $P(E) = 0,5$ .

**Fermiho energie pro určitý materiál je rovna energii kvantového stavu, který má pravděpodobnost 0,5, že bude obsazen elektronem.**

Abychom stanovili **hustotu obsazených stavů**  $N_{obs}$  pro energii  $E$  elektronů ve vodivostním pásu, musíme hustotu všech stavů  $N$  násobit pravděpodobností obsazení stavů. Platí obecný vztah

$$N_{obs}(E) = N(E)P(E) , \quad (12.6)$$

kde výpočtem celkové hustoty stavů  $N$  v závislosti na energii jsme se doposud nezabývali. Při určení  $N(E)$  bychom vyšli ze základní úvahy kovového vzorku jako potenciálové jámy, která má rozměry vzorku, a elektrony jsou popsány stojatými de Broglieovými vlnami. Pro hustotu stavů se dá odvodit výraz

$$N(E) = \frac{8\sqrt{2}\pi m_e^{3/2}}{h^3} E^{1/2} , \quad (12.7)$$

kde všechny veličiny mají svůj obvyklý význam.

Počet všech obsazených stavů ve vodivostním pásu, který je roven počtu vodivostních elektronů  $n$  je pak dán relací

$$n = \int_0^{E_F} N_{obs}(E) dE . \quad (12.8)$$

Počet  $n$  je vlastně **koncentrace elektronů** (nosičů náboje), která je číselně rovna počtu vodivostních elektronů v jednotkovém objemu kovu. Tato veličina, jak jsme uvedli v úvodu kapitoly, charakterizuje schopnost látky vést elektrický proud.

## 12.4 Polovodiče

Polovodiče mají stejnou pásovou strukturu jako izolanty, tj. nejvyšší plně obsazený valenční pás je od prázdného vodivostního pásu oddělen zakázaným pásem. Vzhledem k tomu, že v případě izolantů je šířka tohoto pásu 3 eV a více, je pravděpodobnost, že tepelné kmity krystalové mřížky udělí elektronům dostatečnou energii k jeho překonání prakticky nulová. Polovodiče mají zakázaný pás mnohem užší, v rozmezí asi od 0,5 eV do 1,5 eV . Díky tomu mohou být elektrony z obsazeného valenčního pásu excitovány tepelnými kmity do neobsazených hladin ve vodivostním pásu. Ve valenčním pásu po nich zůstávají neobsazené stavy, který nazýváme **díry**. Díry se chovají jako částice nesoucí jeden kladný elementární náboj a vnější elektrické pole způsobuje jejich pohyb krystalem ve směru vektoru intenzity elektrického pole. K elektrické vodivosti polovodiče přispívají jak elektrony excitované do vodivostního pásu, tak díry

ve valenčním pásu. Polovodivé materiály se podle složení rozdělují na dvě skupiny – na polovodiče vlastní (intrinsické) a polovodiče příměsové (extrinsické).

**Vlastní polovodiče (intrinsické)** jsou krystalické látky bez příměsí. Jejich konduktivita a závislost konduktivity na teplotě jsou určeny především šířkou zakázaného pásu  $E_g$ . Tyto veličiny jsou charakteristické pro daný polovodič, proto je určuje chemické složení polovodiče a nelze je nijak ovlivnit. Koncentrace nosičů náboje závisí na teplotě přibližně exponenciálně a proto konduktivita vlastních polovodičů roste přibližně exponenciálně s teplotou. Všimněte si faktu, že na rozdíl od kovů konduktivita polovodičů s teplotou roste. Typickými představiteli vlastních polovodičů jsou germanium s šířkou zakázaného pásu  $E_g = 0,7 \text{ eV}$  a křemík s  $E_g = 1,1 \text{ eV}$ . Pro hustotu obsazených stavů analogicky platí vztahy (12.6) a (12.7), ale koncentraci  $n$  elektronů ve vodivostním pásu určuje vztah

$$n = \int_{E_C}^{\infty} N(E)P(E)dE, \quad (12.9)$$

kde  $E_C$  je energie dna vodivostního pásu. Koncentrace děr ve valenčním pásu je dána analogickými rovnicemi s tou výjimkou, že koncentraci stavů  $N_v(E)$  ve valenčním pásu musíme násobit pravděpodobností, že daný stav není obsazen. Pro koncentraci děr  $p$  ve valenčním pásu platí vztah

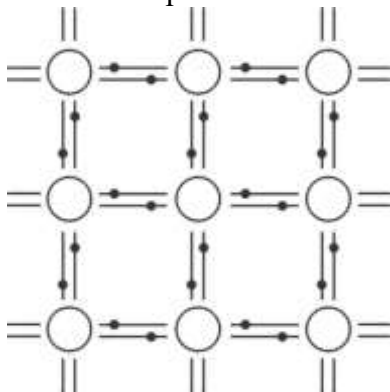
$$p = \int_{E_V}^{-\infty} N_v(E)(1-P(E))dE, \quad (12.10)$$

kde  $E_V$  je nejvyšší energie valenčního pásu. Ve vlastním polovodiči zůstává po excitaci elektronu do vodivostního pásu jedna díra ve valenčním pásu a proto platí

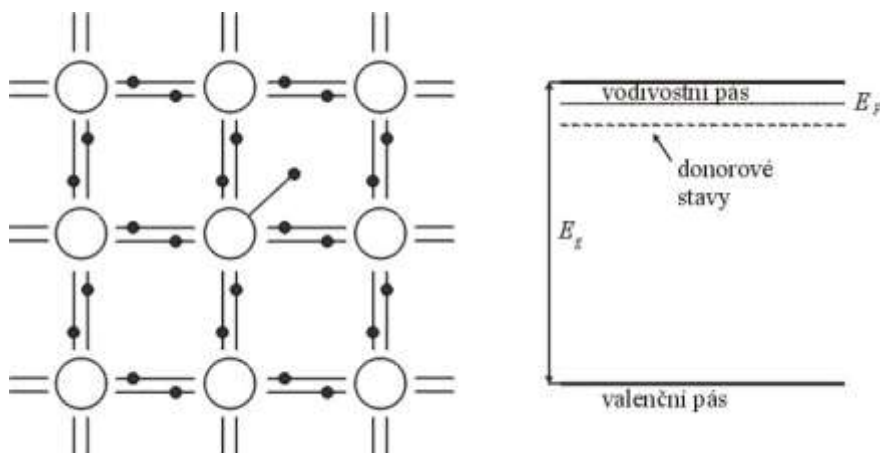
$$n = p. \quad (12.11)$$

Použití vlastních polovodičů pro technické účely je velmi omezené. Nejčastěji je nalezneme v **termistorech** – součástkách, které využívají silné závislosti konduktivity vlastních polovodičů na teplotě pro měření teploty nebo pro kompenzaci účinků změn teploty.

**Příměsové polovodiče (extrinsické)** jsou krystalické látky obsahující malou koncentraci určitého druhu příměsí. Volba této příměsí a její koncentrace významně ovlivňuje konduktivitu polovodiče, její teplotní závislost a rovněž další fyzikální vlastnosti polovodiče. Z toho důvodu jsou příměsové polovodiče základními materiály používanými v moderní elektronice a mikroelektronice. Jako příklad uvedeme, že křemík s příměsí bóru s koncentrací řádově  $10^{-5}$  má ve srovnání s čistým křemíkem konduktivitu asi tisíckrát vyšší. Lze dokázat, že volba prvku příměsí a jeho koncentrace významně ovlivňuje konduktivitu polovodiče. Další část textu věnujeme podrobnějšímu posouzení a zdůvodnění vlivu příměsí na vlastnosti polovodiče.



Obr. 12.6

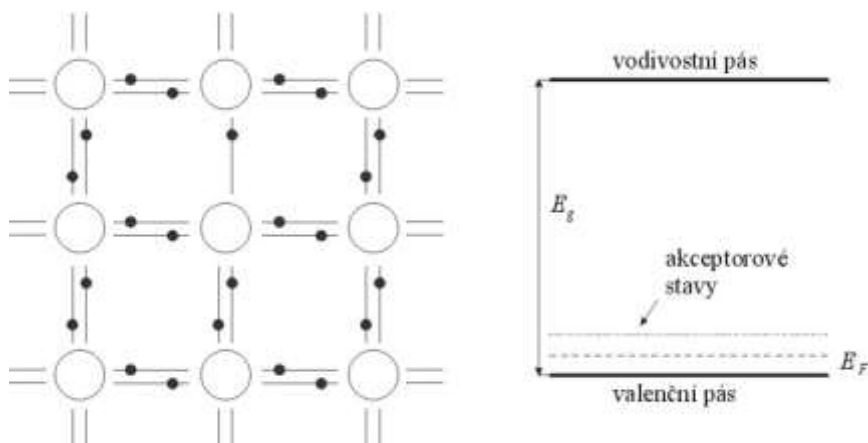


Obr. 12.7 a,b

Křemík i germanium jsou čtyřmocné prvky, které mají ve vnější slupce každý čtyři elektrony. Tyto elektrony zajišťují kovalentní vazbu každého atomu s jeho čtyřmi sousedy v krystalické mřížce (obr. 12.6). Jestliže do takové mřížky vpravíme atom, který má pět valenčních elektronů, např. arzén nebo antimon,

stačí u tohoto atomu na zajištění vazby se sousedními atomy pouze čtyři valenční elektrony a pátý se jeví jako nadbytečný (obr. 12.7 a). Tento nadbytečný elektron je jen slabě vázaný k atomu příměsi, může se snadno odtrhnout a přejít do vodivostního pásu a stát se vodivostním elektronem. Energie k tomu potřebná je řádu  $10^{-2}$  eV.

Atom příměsi se v takovém případě nazývá **donor**. Atomy příměsi jsou v krystalové mřížce vázány na určitém místě a označují se jako lokální stavy. Na energetickém schématu na obr. 12.7b jsou tyto **donorové stavy** vyznačeny čárkovanou čarou. Lze dokázat, že Fermiho hladina s dobrou přesností pólí energetický interval mezi donorovými stavy a dnem vodivostního pásu. Při nízkých teplotách zprostředkují přenos náboje právě elektrony excitované z donorových stavů. Polovodiče s donory se nazývají **polovodiče typu n** a říkáme, že polovodiče typu *n* mají **elektronovou vodivost**. Při vyšších teplotách může dojít k excitaci malé části elektronů z valenčního pásu do vodivostního pásu a ve valenčním pásu zůstávají díry, které se rovněž podílejí na vodivosti. V takovém případě jsou elektrony **majoritní nosiče** a díry označujeme jako **minoritní nosiče**.



Obr.12.8 a,b

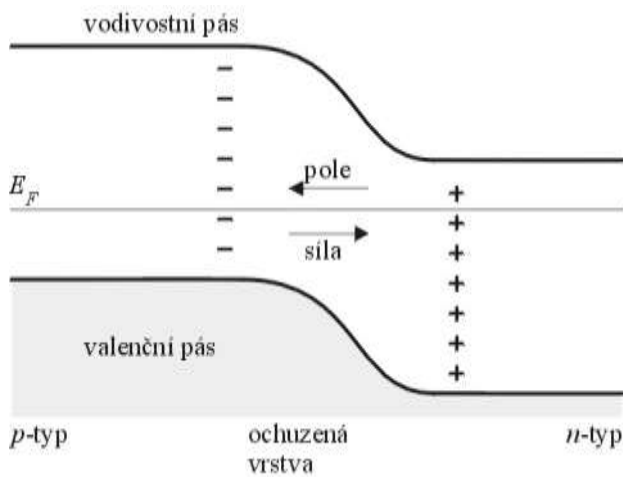
Jiný typ příměsi představují atomy trojmocných prvků, např. bór nebo hliník. Každý atom křemíku nebo germania má čtyři elektrony zajišťující vazbu a proto v okolí příměsi jeden elektron chybí (obr.12.8a). Při dodání energie se do tohoto okolí může

přesunout elektron ze sousedního čtyřmocného atomu a vzniká tak díra. Energie k tomu potřebná je rovněž řádu  $10^{-2}$  eV. Atom trojmocné příměsi přijímá elektron, proto se tento typ příměsi označuje jako **akceptor**. Na energetickém schématu na obr. 12.8b jsou lokální akceptorové stavy vyznačeny čárkovanou čarou, tenká plná čára udává polohu Fermiho hladiny. Při nízkých teplotách přenášejí náboj díry, proto se takový materiál označuje jako **polovodič typu**

$p$  a jeho vodivost jako **děrová vodivost**. Stejně jako u polovodiče typu  $n$  jsou při vyšších teplotách excitovány elektrony z valenčního do vodivostního pásu a přispívají k celkové vodivosti. V tomto případě jsou díry majoritní nosiče a elektrony minoritní nosiče náboje.

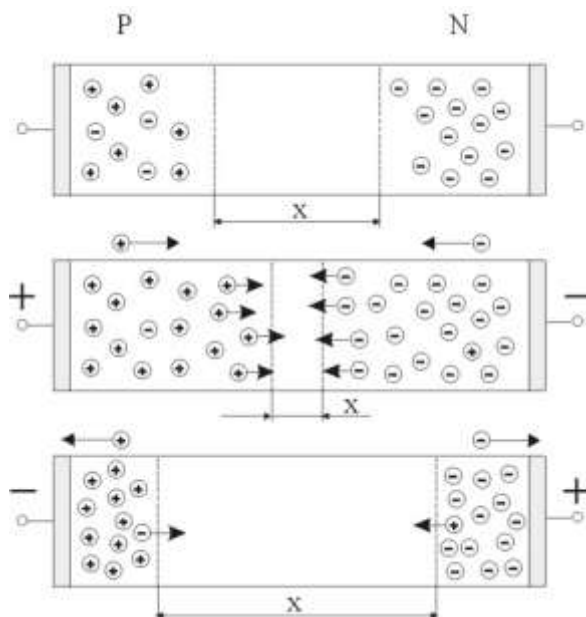
V současné době je použití příměsových polovodičů v technické praxi velmi mnohostranné. Nejde však o homogenní materiály s jedním typem vodivosti, ale o různé kombinace polovodičů typu  $n$  a typu  $p$ . Nejjednodušším případem je spojení dvou polovodičových materiálů s opačnými typy vodivosti, které se obvykle nazývá  **$p$ - $n$  přechod**. Popíšeme zjednodušený model chování tohoto přechodu.

V  $p$ - $n$  přechodu jsou spojeny polovodiče typu  $p$  a typu  $n$ . Protože koncentrace děr a elektronů je v obou materiálech rozdílná, dojde k difúzi nosičů náboje. V oblasti spojení přejde určitý počet děr z polovodiče typu  $p$  do polovodiče typu  $n$  a podobně přejdou elektrony opačným směrem. V důsledku tohoto procesu se polovodič typu  $p$  nabíjí záporně (v energetickém schématu se posouvá nahoru) a polovodič typu  $n$  kladně (v energetickém schématu se posouvá dolů). V oblasti přechodu se vytváří vnitřní elektrické pole, které působí proti difúzi nosičů náboje. V ustáleném stavu se Fermiho hladiny vyrovnají (obr. 12.9) a počet elektronů vstupujících do polovodiče typu  $p$  je roven počtu děr vstupujících do polovodiče typu  $n$ . Je zřejmé, že náboje přecházejících děr a elektronů se v oblasti přechodu navzájem kompenzují, celková hustota náboje klesá a vzniká **ochuzená vrstva** o šířce  $x$ , (obr.



Obr. 12.9

12.10). V důsledku řádově nižší koncentrace nosičů náboje je rezistivita ochuzené vrstvy podstatně vyšší ve srovnání se s rezistivitou polovodičů typu  $p$  a typu  $n$ .



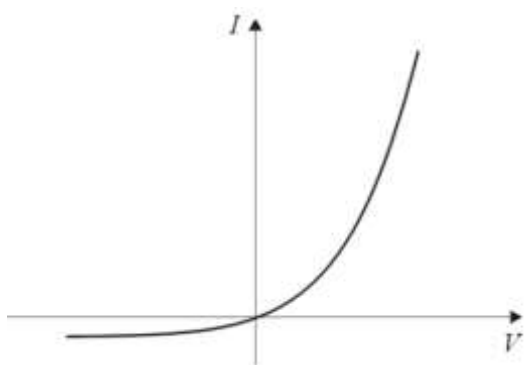
Obr. 12.10

**Propustný směr.** Vložíme-li na polovodiče napětí z vnějšího zdroje, vytvoří se v polovodiči elektrické pole. Vzhledem k vysokému odporu  $p$ - $n$  přechodu bude toto pole soustředěno do oblasti ochuzené vrstvy. Předpokládejme, že polovodič typu  $p$  je připojen na kladný pól zdroje a polovodič typu  $n$  na záporný pól. Vnější pole v oblasti přechodu má takový směr, že podporuje difúzní pohyb nosičů náboje. Energetické pásy polovodiče typu  $p$  se posunou dolů a polovodiče typu  $n$  nahoru. Je-li napětí zdroje  $U$ , sníží se energetická bariéra mezi polovodiči o hodnotu  $eU$ . Tím se usnadní tok tepelně excitovaných elektronů z oblasti  $p$  do oblasti  $n$ . Podle obr. 12.10 se ochuzená vrstva zúží a vodivost přechodu

vzroste. Říkáme, že přechod  $p-n$  je zapojen v **propustném směru**.

**Závěrný směr.** Je-li  $p-n$  přechod zapojen s opačnou polaritou, tj. polovodič typu  $p$  na záporný pól zdroje a polovodič typu  $n$  na kladný pól zdroje, posunou se energetické pásy  $p$  polovodiče nahoru a polovodiče  $n$  dolů. Tím se zvýší energetická bariéra pro tok elektronů z polovodiče typu  $p$  do polovodiče typu  $n$ . Vnější pole působí proti difúznímu proudu, ochuzená vrstva se rozšíří (obr. 12.10) a konduktivita přechodu klesá.  $p-n$  přechod je zapojen v **závěrném směru**.

Přesný kvantitativní popis pochodů v  $p-n$  přechodu je komplikovaný. Odhad závislosti velikosti proudu tekoucího přechodem na napětí  $U$  na přechodu vychází ze skutečnosti, že pravděpodobnost překonání potenciálové bariéry o výšce  $\Phi$  je přímo úměrná Boltzmannovu faktoru  $e^{\frac{e\Phi}{kT}}$ . Jestliže  $I_0$  označuje konstantu úměrnou proudu teplotně excitovaných elektronů, platí pro proud  $I$  v propustném směru



Obr. 12.11

$$I = I_0 \left( e^{\frac{eU}{kT}} - 1 \right) \quad (12.12)$$

a v závěrném směru

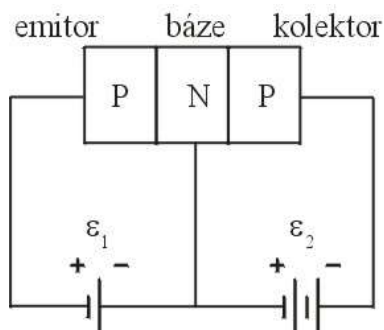
$$I = I_0 \left( e^{-\frac{eU}{kT}} - 1 \right) . \quad (12.13)$$

Těmto závislostem odpovídá voltampérová charakteristika  $p-n$  přechodu na obr. 12.11.

Elektronická součástka s přechodem  $p-n$  se nazývá dioda a má schopnost usměrňovat střídavý proud.

Je-li běžná dioda zapojena v propustném směru, teče přechodem vysoký proud (při napětí 1V je  $I \approx 10^7 I_0$ ), zatímco v závěrném směru je proud o mnoho řádů nižší (při napětí  $-1V$  je  $I \approx -I_0$ ).

Složitější polovodičové součástky jsou **tranzistory**, které obsahují dva  $p-n$  přechody. Na obr. 12.12 je schéma  $pnp$  tranzistoru. Dvě oblasti s děrovou vodivostí jsou odděleny tenkou vrstvou polovodiče typu  $n$ . Vnější oblast prvního přechodu se nazývá **emitor**, střední část je **báze** a poslední oblast je **kolektor**. Zdroj napěťového signálu  $\varepsilon_1$  je připojen k přechodu emitor-báze v propustném směru. Zdroj  $\varepsilon_2$  je připojen v závěrném směru a přechodem báze-kolektor proto teče jen slabý proud. Vzhledem k malé tloušťce báze dochází k difúzi nosičů náboje do oblasti přechodu báze-kolektor a tím k silnému ovlivnění proudu v kolektorovém obvodu. Je tedy patrné, že malé změny napětí na přechodu emitor-báze vyvolávají silné změny proudu v obvodu báze-kolektor.



Obr. 12.12

**Diody LED, laserové diody.** Při dopadu fotonů světla na povrch polovodiče může dojít např. k interakci elektronů s elektrony ve valenčním pásu a tím

k jejich excitaci do vodivostního pásu. Interakce se světlem proto ovlivňuje vlastnosti polovodičů a na této skutečnosti jsou založeny fotočlánky, fotodiody, fototranzistory a další optoelektronické prvky. Jiné polovodičové prvky slouží jako zdroje světla. Proud tekoucí vhodným  $p-n$  přechodem vybuzuje např. elektrony do excitovaného stavu a tyto elektrony při rekombinaci s děrami ztrácejí energii, která se vyzařuje ve formě fotonů. V LED (light emitting diode) diodách jsou polovodičové materiály voleny tak, aby energie emitovaných fotonů odpovídala určité barvě světla. V  $p-n$  přechodech polovodičů s vysokou koncentrací příměsí může dojít k takovému překrytí energetických pásů, že v určité oblasti přechodu se koncentrují excitované elektrony a vytvářejí **inverzní populaci stavů** (odstavec 10.5). Takový polovodič představuje **aktivní prostředí** a lze ho využít pro konstrukci laserů. Polovodičové krystaly s vhodným  $p-n$  přechodem mají vyleštěná čela do zrcadlového lesku tak, že tvoří **optický rezonátor**. Průchod proudu přechodem vyvolává vznik inverzní populace stavů, dochází ke stimulované emisi světla usměrňovaného optickým rezonátorem a součástíka emituje laserové záření.

## Příklady ke kap.12

### Příklad 12.1

Jaká je pravděpodobnost, že stav  $\Delta E = 0,062$  eV nad Fermiho energií bude obsazen elektronem při teplotě

- $T = 0$  K
- $T = 320$  K.

#### Řešení:

a)

Pro teplotu  $T = 0$  platí, že pravděpodobnost obsazení je pro všechny stavy s energiemi většími než  $E_F$  nulová.

$$P(E) = 0$$

b)

Při teplotách  $T > 0$  K je pravděpodobnost obsazení stavu určena vztahem (12.5), v němž  $E - E_F = \Delta E$ .

$$P(E) = \frac{1}{e^{\frac{0,062 \text{ eV} \cdot 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J} \cdot \text{eV}^{-1}}{1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot 320 \text{ K}}} + 1} = 0,096$$

### Příklad 12.2

a) Jaká je maximální vlnová délka světla  $\lambda_{\max}$ , které vybudí elektron z valenčního pásu diamantu do vodivostního pásu? Šířka zakázaného pásu diamantu je  $E_g = 5,5$  eV.

b) V jaké části elektromagnetického spektra tato vlnová délka leží?

#### Řešení:

a)



Nejnižší energie  $E_{\min}$  fotonu schopného vybudit elektron z valenčního pásu do vodivostního pásu je rovna šířce zakázaného pásu  $E_{\min} = E_g$ . S použitím vztahu (7.14) a relace  $\nu = c/\lambda$  odvodíme rovnici

$$\lambda_{\max} = \frac{hc}{E_g}.$$

Po dosazení

$$\lambda_{\max} = \frac{6,62 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}{5,5 \text{ eV} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J} \cdot \text{eV}^{-1}} = 226 \text{ nm}.$$

b)

Záření s vlnovou délkou 226 nm je ultrafialové záření.

### Příklad 12.3

Dioda LED je založena na  $p$ - $n$  přechodu vytvořeném v polovodivém materiálu GaAsP, jehož zakázaný pás má šířku  $E_g = 1,9 \text{ eV}$ . Jaká je vlnová délka  $\lambda$  světla emitovaného diodou?

**Řešení:**

Nejpravděpodobněji dochází k přechodům elektronů mezi dnem vodivostního pásu a vrcholem valenčního pásu a energie emitovaných fotonů je proto rovna  $E_g$ . Použijeme-li rovnici odvozenou v příkladu 12.2, dostáváme relaci

$$\lambda = \frac{hc}{E_g}.$$

Po dosazení

$$\lambda = \frac{6,62 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}{1,9 \text{ eV} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J} \cdot \text{eV}^{-1}} = 650 \text{ nm}.$$

## 13. Atomové jádro

### 13.1 Základní charakteristiky atomového jádra

Atomové jádro zaujímá velice malou část atomu, a přitom představuje 99,9% hmotnosti atomu. Skládá se z **protonů** a **neutronů**. Základní charakteristiky jádra jsou

$Z$  – **protonové číslo**, které udává počet protonů v jádře,

$A$  – **nukleonové číslo**, které udává celkový počet nukleonů v jádře,

$N$  – **neutronové číslo**, které udává počet neutronů v jádře,  $N = A - Z$ .

Jádro určitého prvku  $X$  charakterizujeme pomocí symbolů  $Z, A$  následujícím způsobem:  ${}^A_Z X$ .

Například atom  ${}^{235}_{92}\text{U}$  má v jádře 92 protonů a 143 neutronů. Symbol  $Z$  při popisu jader obvykle neuvádíme, protože vyplývá z názvu a známého pořadí prvku v Mendělejevově tabulce. Jádra atomů určitého prvku obsahují stejný počet protonů (i stejný počet elektronů v atomovém obalu), ale mohou se lišit počtem neutronů. Atoma s takovými jádry představují různé **izotopy** téhož prvku.

**Izotopy jednoho prvku mají stejné  $Z$ , ale různé  $N$  a  $A$ . Mají stejné chemické vlastnosti, ale liší se fyzikálními vlastnostmi.**

Nejlehčí prvek, vodík, se vyskytuje ve třech izotopech. Kromě jádra  ${}^1_1\text{H}$  s jedním protonem v jádře, existuje ještě těžší izotop  ${}^2_1\text{H}$  nazvaný deuterium, který má v jádře navíc jeden neutron. Nejtěžší izotop vodíku je tritium,  ${}^3_1\text{H}$ , který má v jádře dva neutrony. Jednotlivé izotopy vodíku se liší především svou stabilitou. Pouze lehký vodík je jádro stabilní v čase, ostatní izotopy jsou **nestabilní, radioaktivní**. Tyto **radionuklidy** při své přeměně obvykle emitují nějakou částici a původní jádro se mění na jiné.

### 13.2 Hmotnost a náboj jádra

Hmotnost jader lze poměrně s velkou přesností určit například pomocí moderních hmotnostních spektrometrů. Protože se jedná o malé hmotnosti, je výhodné k jejich vyjádření použít atomovou hmotnostní jednotku.

**Atomová hmotnostní jednotka  $u$  je zavedena jako 1/12 hmotnosti atomu  ${}^{12}_6\text{C}$  a vztah této jednotky k jednotce hmotnosti SI je přibližně**

$$1u \doteq 1,661 \cdot 10^{-27} \text{ kg}.$$

Proton i neutron mají hmotnosti přibližně rovné  $1u$ , přesněji

$$m_p = 1,007276 \text{ u}$$

$$m_n = 1,008665 \text{ u}$$

$$m_e = 0,0005486 \text{ u} .$$

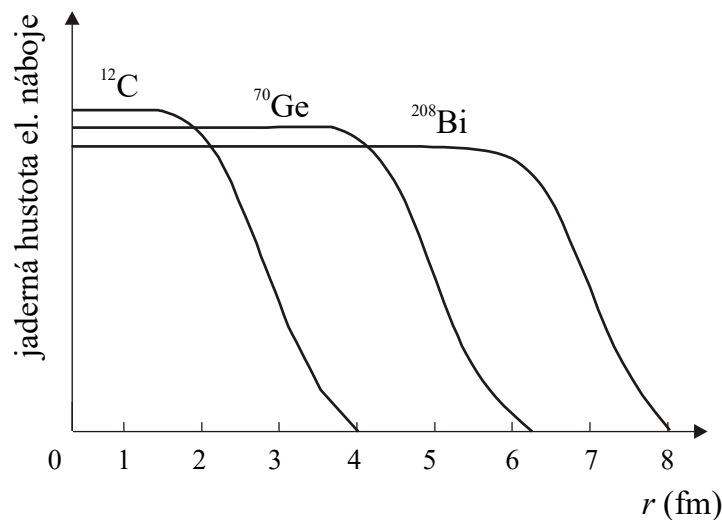
Často, zejména při bilanci jaderných reakcí, je zvykem vyjadřovat hmotnosti nukleonů s použitím Einsteinova vztahu ekvivalence mezi hmotností a energií. Klidová energie částice s hmotností  $m_0$  je  $E_0 = m_0 c^2$ , kde  $c$  je rychlost světla ve vakuu. Energie odpovídající hmotnosti 1u je 931,5 MeV. Pro proton dostaneme dosazením do tohoto vztahu hodnotu energie  $E_0 = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg} (3 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1})^2 = 1,50 \cdot 10^{-10} \text{ J} = 938 \text{ MeV}$  . Klidová energie elektronu je 0,511 MeV.

Proton nese kladný elementární elektrický náboj. Neutron nese žádný náboj, je elektricky neutrální. Celkový náboj jádra je proto dán součtem kladných nábojů protonů obsažených v jádře.

### 13.3 Poloměr a tvar atomového jádra

Tvar a rozměry atomových jader se studují pomocí rozptylu urychlených elektronů , kterými jsou bombardována jádra. Energie těchto rozptylovaných elektronů musí být velká (nejméně 200 MeV). Experimenty ukázaly, že rozměr atomového jádra není větší než  $10^{-14} \text{ m}$ . Vhodnou jednotkou pro měření takových vzdáleností je **1 femtometr**,  $1 \text{ fm} = 10^{-15} \text{ m}$  (jednotka s názvem fermi). Definovat přesně rozměr atomového jádra je ještě obtížnější než definovat rozměr atomu, protože nelze hovořit o orbitách protonu nebo neutronu v jádře. Rozměry atomového jádra ale úzce souvisí s povahou a velikostí sil působících mezi nukleony v jádře. Jsou to přitažlivé síly, které přes elektrostatické odpuzování mezi protony drží jádro pohromadě. Přesto však přitažlivé síly nezpůsobí zvětšenou hustotu nukleonů směrem ke středu jádra, jak by se dalo předpokládat. Na obr.13.1 je znázorněna závislost hustoty náboje jádra na

Obr.13.1



poloměru pro tři vybraná jádra. Hustota náboje, a proto i hustota jádra je v celém objemu konstantní.

Dalším důležitým závěrem vyplývajícím z experimentů je, že hustota jádra nezávisí na jeho nukleonovém čísle  $A$ . Lehká jádra mají téměř stejnou hustotu jako těžká. Tento poznatek můžeme formulovat tak, že počet nukleonů na jednotkový objem zůstává v jádrech všech prvků konstantní. Platí vztah

$$\frac{A}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \text{konst.} , \quad (13.1)$$

kde  $R$  je poloměr atomového jádra. Ve vztahu jsme použili modelovou představu sférického jádra, i když závěry mnoha experimentů ukazují, že existují jak jádra sférická, tak výrazně nesférická, s tvarem elipsoidu. Ze vztahu (13.1) vyplývá, že  $A \sim R^3$ . Tím jsme získali relaci mezi  $A$  a  $R$ . Můžeme psát

$$R = R_0 A^{\frac{1}{3}} , \quad (13.2)$$

kde konstanta  $R_0$  se určuje experimentálně. Platí pro ni  $R_0 \approx 1,2 \text{ fm}$ .

### 13.4 Spin jádra a magnetický moment

Nukleony, podobně jako elektron, mají kromě orbitálního momentu hybnosti vlastní moment hybnosti, **spin**. Stejně jako elektron, mají nukleony hodnotu spinového kvantového čísla poločíselnou. Spin atomového jádra vznikne složením orbitálních a spinových momentů hybnosti jednotlivých nukleonů. Princip skládání momentů jednotlivých nukleonů je velmi složitá záležitost a přesahuje rámec tohoto skriptu. Existence mechanického momentu jádra podmiňuje vznik magnetického momentu jádra. Nukleony a atomová jádra vykazují magnetické momenty, jejichž chování v magnetickém poli lze využít v metodě, která je nazvaná podle svého principu **nukleární magnetická rezonance** a byla již popsána v odst.9.5.

### 13.5 Vazebná energie jádra

**Hmotnost jádra  $m_j$  je vždy menší než součet hmotností jednotlivých nukleonů.**

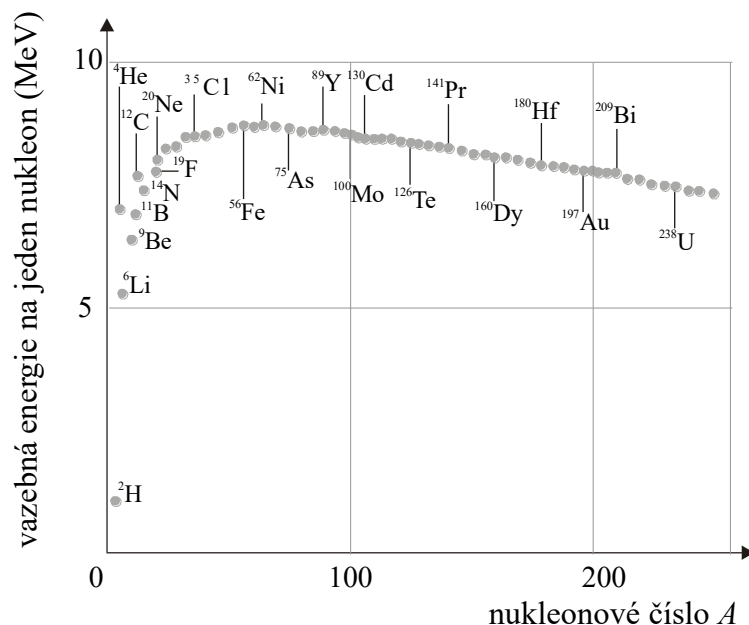
Abychom mohli jádro rozdělit na nukleony, musíme dodat určité množství energie. Bilanci hmotnosti při vytvoření atomového jádra můžeme zapsat vztahem

$$Zm_p + (A - Z)m_n - m_j = \Delta m , \quad (13.3)$$

kde  $\Delta m$  je **hmotnostní schodek**. Použijeme-li vztah mezi hmotností a energií, dostaneme výraz pro **vazebnou energii  $\mathcal{E}$  jádra**. Platí

$$\mathcal{E} = \Delta mc^2 \quad (13.4)$$

Vhodnější veličinou pro charakterizaci atomových jader je **vazebná energie na jeden nukleon**, kterou získáme vydělením vazebné energie celkovým počtem nukleonů v jádře. Na obr.13.2 je znázorněna závislost této veličiny na nukleonovém čísle  $A$ .



Obr.13.2

Vazebná energie dosahuje nejdříve ostré lokální maximum pro jádro  $^4_2\text{He}$ , pak dále roste a při hodnotě  $A = 56$  pro jádro  $^{56}_{26}\text{Fe}$  dosahuje maximální hodnotu 8,79 MeV. Od této hodnoty  $A$  vazebná energie na jeden nukleon zvolna klesá k hodnotě asi 7,6 MeV pro nejtěžší jádra. Tento graf ukazuje, že jadernou energii lze uvolňovat dvojím způsobem, a to **štěpením těžkých jader a fúzí (syntézou) lehkých jader**. Při zmíněných procesech mají výsledná jádra vždy vazebnou energii větší než počáteční jádro.

Z atomové fyziky je známo, že při přiblížení elektronu a protonu a dostatečně malou vzdálenost vznikne atom vodíku a uvolní se energie 13,6 eV. V energetické bilanci je výsledná hmotnost atomu vodíku o 13,6 eV menší než součet hmotností volného elektronu a protonu. Právě tak, hmotnost dvou lehkých jader převyšuje hmotnost z nich vytvořeného jádra. Jestliže se opravdu podaří taková jádra spojit v jedno jádro, je k dispozici energie odpovídající úbytku hmotnosti. Tento proces se nazývá **jaderná fúze** a úbytek hmotnosti může dosahovat až 0,5% původní hmotnosti jader. Energie uvolněná při výbuchu vodíkové bomby je energie získaná právě při fúzi jader.

Jestliže naopak se jádro rozštěpí na dvě lehčí jádra, součet jejich hmotností bude menší než hmotnost původního nerozštěpeného jádra až o 0,1%. Energie uvolněná při výbuchu atomové bomby nebo v atomovém reaktoru představuje právě energii, která má původ ve štěpení jader.

## 13.6 Energetické hladiny v jádře

Energie, které ve svých stavech nabývá atomové jádro, jsou stejně jako hodnoty energie atomu, kvantované. Jádro se tedy může nacházet pouze v určitých diskrétních kvantových stavech, ve kterých má energie určité hodnoty. Energie kvantových stavů jádra bývá řádově MeV. Jádro přechází z hladiny s větší hodnotou energie (vyšší hladina) na hladinu s menší hodnotou energie (nižší hladina) skokem při současném vyslání fotonu, jehož energie odpovídá rozdílu energií zúčastněných hladin. Přechody mezi hladinami se řídí určitými pravidly. Excitovaný stav (hladina) ve které setrvává jádro delší dobu než je obvyklá doba přechodu (řádově  $10^{-8}$ s) se nazývá metastabilní.

## 13.7 Jaderné síly

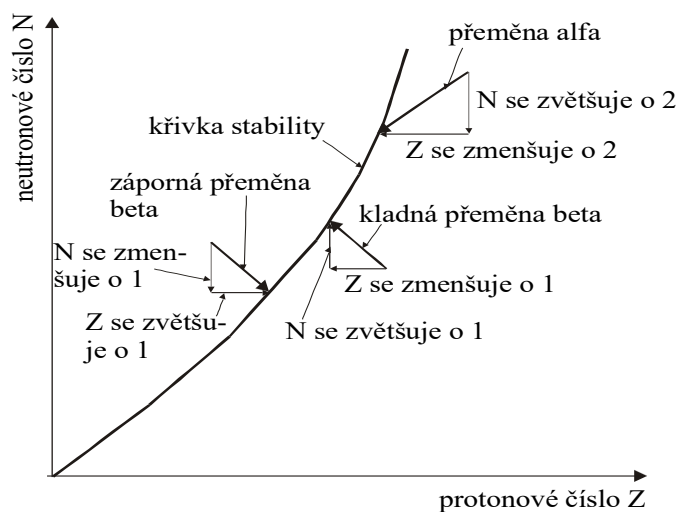
Nukleony v jádře na sebe působí silami, které označujeme jako **jaderné síly**. Pro udržení jádra pohromadě musí být tato síla přitažlivá, dostatečně silná, aby překonala elektrostatickou odpuzivou sílu mezi protony, i když na malých vzdálenostech se zřejmě mění v odpuzivou. Jaderná síla musí být silou krátkého dosahu, protože její působení nesahá příliš daleko za rozměry jádra.

V současné době není k dispozici úplná teorie jaderných sil a jejich působení, proto je vhodné pracovat s **jadernými modely**, které chápání atomových jader usnadňují. Dva z těchto modelů se ukázaly jako velmi užitečné, i když jsou založeny na opačných předpokladech. Každým z nich je možné popsat určité jevy spojené s chováním jader. Prvním z nich je **kolektivní model** založený na principu silné interakce mezi nukleony, druhý je **model nezávislých částic**, který pracuje s nukleony pohybujícími se téměř nezávisle na sobě a zřídka absolvujícími srážku.

## 13.8 Stabilita jader a jejich přeměny

Jednou z charakteristických vlastností atomových jader je jejich **stabilita**. Křivka na obr.13.3 je **křivka stability**.

Obr13.3



Pro každý prvek existuje k počtu  $Z$  protonů jistý počet  $N$  neutronů, které dohromady vytvoří nejstabilnější konfiguraci. Jestliže existuje pro určitý prvek několik možných izotopů, pak nejstabilnější z nich se vyskytuje s největším zastoupením v přirozené směsi tohoto prvku. Všechny uměle připravené izotopy jsou **nestabilní** a přeměňují se. Jestliže jádro vzhledem ke svému uspořádání (počet protonů a počet neutronů) leží na křivce, je stabilní. Neodpovídá-li jádro svými parametry křivce, samovolně se přeměňuje takovým způsobem, aby se octlo na křivce. Pro lehká jádra, jak je vidět z průběhu křivky, je počet protonů přibližně roven počtu neutronů. Pro těžší jádra musí přebytek neutronů s čistě přitažlivými vzájemnými silami kompenzovat elektrostatische odpuzování mezi protony.

**Těžká jádra od  $Z = 83$  jsou všechna nestabilní, jsou radioaktivní.  
Radioaktivní jádra nazýváme radionuklidy.**

Nestabilní jádra se transformují v stabilní dvěma typy přeměn, alfa a beta, při kterých se mění  $Z$  a  $N$ . Při přeměně část vznikají jádra, která jsou ve vzbuzeném (excitovaném) stavu, a do základního stavu (stavu s nejnižší energií), se dostávají emisí záření gama.

### 13.9 Radioaktivní přeměny

Při radioaktivních přeměnách se jádra chovají jako statistický soubor. Statistickou podstatu jevu můžeme vyjádřit tvrzením, že úbytek počtu radioaktivních jader (počet přeměn)  $-dN$  způsobený samovolnými přeměnami za čas  $dt$  souvisí s počtem  $N(t)$  dosud nepřeměněných jader v čase  $t$  vztahem

$$-dN = \lambda N(t) dt \quad , \quad (13.5)$$

kde  $\lambda$  je konstanta úměrnosti nazývaná **přeměnová konstanta**, která má význam pravděpodobnosti přeměny jednoho jádra za 1s.

Přeměny radioaktivních jader probíhají náhodně a nemůžeme dopředu předpovědět, která jádra se přemění. Pro všechna jádra je pravděpodobnost přeměny stejná. Můžeme pouze s určitou pravděpodobností stanovit, kolik jader se za určitý časový interval přemění.

Integrací vztahu (13.5) dostaneme přeměnový zákon v integrálním tvaru. Má tvar

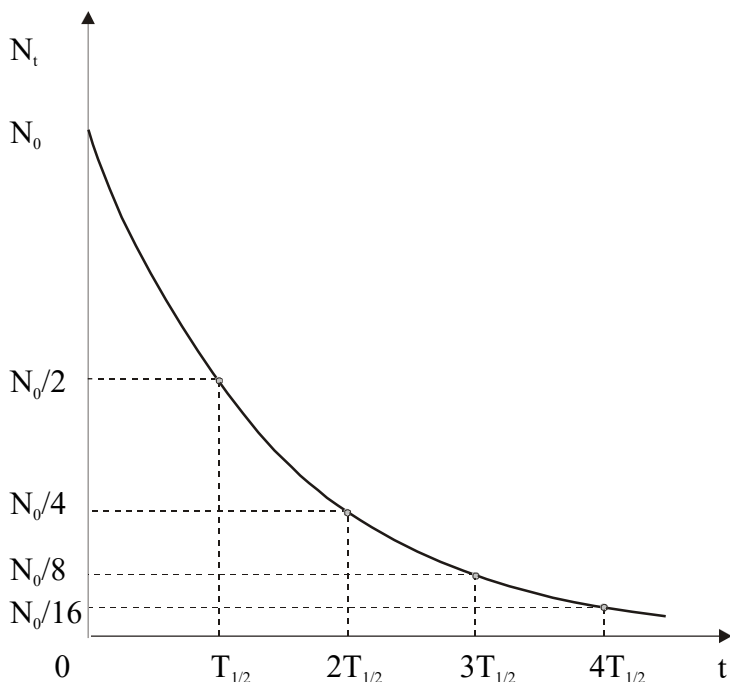
$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t} \quad , \quad (13.6)$$

kde  $N_0$  je počet radioaktivních (dosud nepřeměněných) jader v čase  $t = 0$ .

Užitečným parametrem charakterizujícím přeměny v určitém radionuklidu je **poločas přeměny**  $T_{1/2}$ .

**Poločas přeměny je definovaný jako střední doba potřebná k přeměně poloviny všech radioaktivních jader souboru.**

Vyjádříme-li poločas přeměny pomocí vztahu (13.6), dostaneme relaci mezi poločasem přeměny a přeměnovou konstantou. Platí



$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} \quad (13.7)$$

Poločas přeměny je konstanta charakteristická pro daný radionuklid a typ přeměny. Závislost počtu dosud nepřeměněných jader na čase je na obr.13.4.

Obr.13.4

Veličina charakterizující množství a rychlost radioaktivních přeměn, ke kterým ve vzorku radionuklidu (zářiči) dochází, se nazývá **aktivita**.

**Aktivita je definována jako podíl středního počtu  $dN$  samovolných jaderných přeměn z daného energetického stavu v určitém množství radionuklidu za časový interval  $dt$  a délky tohoto časového intervalu.**

Pro aktivitu  $A$  platí vztah

$$A = \frac{dN}{dt} \quad (13.8)$$

Jednotkou aktivity v soustavě SI je 1 Bq, **becquerel** a rozměr aktivity je  $[A] = s^{-1}$ .

Starší jednotkou, která se stále používá, je 1 Ci, **curie**.  $1 \text{ Ci} = 3,7 \cdot 10^{10} \text{ Bq}$  a je to aktivita 1g Ra.

### 13.10 Zákony zachování v radioaktivních přeměnách

Při studiu radioaktivních přeměn nebo jaderných reakcí zjistíme, že výsledné produkty těchto procesů jsou ovlivněny platností zákonitostí, které můžeme označit jako obecně v přírodě platné **zákony zachování**. Jsou to zejména:

- **zákon zachování energie**. Z platnosti tohoto zákona jednoznačně vyplyne, je-li určitá přeměna nebo jaderná reakce možná z energetického hlediska. Známe-li hmotnost  $m(X)$  původního jádra, o kterém předpokládáme, že je v klidu, a hmotnost výsledného jádra  $m(Y)$ , může k přeměně dojít pouze tehdy, je-li splněna podmínka



$$m(X)c^2 \geq m(Y)c^2 + m(x)c^2, \quad (13.9)$$

kde  $m(x)$  je klidová hmotnost emitované částice. Energie  $Q$  daná rozdílem energií odpovídající levé a pravé strany rovnice (13.9)

$$Q = m(X)c^2 - (m(Y)c^2 + m(x)c^2) \quad (13.10)$$

se nazývá **energie reakce**. Přeměna nebo reakce je možná, je-li  $Q$  kladné číslo. Tato veličina má význam zejména při charakterizování jaderných reakcí.

- **zákon zachování hybnosti soustavy**. Je-li původní jádro v klidu, potom součet hybností výsledného jádra a emitované částice je nulový, protože celková hybnost soustavy se zachovává.

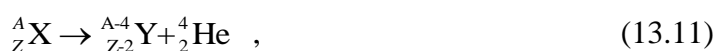
- **zákon zachování momentu hybnosti soustavy**, který zahrnuje jak spinové, tak orbitální momenty hybnosti. Jádro má svůj vlastní spinový moment hybnosti a emitovaná částice odnáší spinový i orbitální moment hybnosti.

- **zákon zachování elektrického náboje**. Celkový elektrický náboj před a po přeměně musí být stejný.

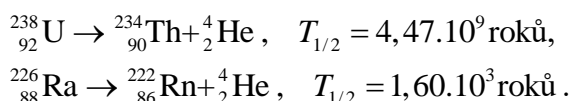
- **zákon zachování počtu nukleonů**. Existují sice přeměny, při kterých se mění neutron v proton a naopak (přeměna beta), ale celkový počet nukleonů se zachovává. Navíc může vzniknout pouze částice, která není nukleon.

## 13.11 Přeměna alfa

Jestliže radioaktivní jádro se samovolně přemění a emituje částici alfa, ztrácí dva protony a dva neutrony. Částice alfa je héliové jádro. Přeměnu alfa můžeme symbolicky zapsat pomocí schématu



kde  $X$  představuje výchozí (mateřské) a  $Y$  výsledné (dceřinné) jádro. Příklady přeměn alfa:



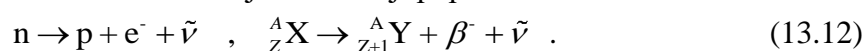
Příčinou toho, proč jádra emitují právě částice alfa a nikoliv třeba protony nebo jiné konfigurace nukleonů, je velká vazebná energie héliového jádra. Energie částic alfa emitovaných jádry leží v intervalu 5 – 9 MeV. Energetické spektrum vyletujících částic alfa, tj. jejich rozdělení podle energií je nespojitě (čárové). Částice alfa jsou emitovány s jednou, maximálně s několika hodnotami energie. Vysvětlení najdeme, využijeme-li analogie uspořádání jádra s atomovým obalem. Jakákoliv emise energie ve formě záření nebo částice se musí dít takovým způsobem, že vyslaná energie odpovídá rozdílu energií dvou energetických hladin obsazených nukleony

v jádře. Otázka způsobu, jakým částice alfa opouští jádro, zodpovídá kvantová mechanika. Působení jaderných sil mezi nukleony v jádře lze modelovat představou potenciálové jámy a emisi částice alfa, která má energii menší, než je hloubka této jámy, lze vysvětlit pouze existencí **tunelového jevu**, o kterém jsme se zmínili v odstavci 9.6. Z hlediska klasické mechaniky je nemožné, aby taková částice opustila jádro.

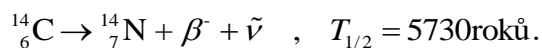
## 13.12 Přeměna beta

Jestliže radioaktivní jádro se samovolně přemění přeměnou beta, výsledné jádro má stejný počet nukleonů jako výchozí,  $A$  se nemění, ale protonové číslo se mění o 1. Rozlišují se tři přeměny beta:

a) **přeměna  $\beta^-$**  provázenou emisí elektronu z jádra . Lze ji popsat schématem

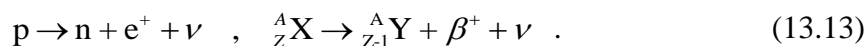


Příklad přeměny  $\beta^-$  :

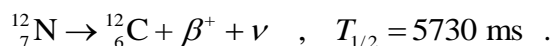


V případě přeměny se v jádře z neutronu vytvoří proton, elektron a antineutrino  $\bar{\nu}$  . Antineutrino je jedna z elementárních částic, nenesou žádný elektrický náboj, má prakticky nulovou hmotnost a má poločíselný spin.

b) **přeměna  $\beta^+$**  provázenou emisí pozitronu z jádra . Lze ji popsat schématem



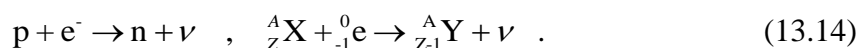
Příklad přeměny  $\beta^+$  :



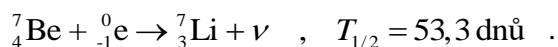
Při přeměně  $\beta^+$  se v jádře z protonu vytvoří neutron a jádro opustí pozitron a neutrino  $\nu$  . Neutrino má stejné vlastnosti jako antineutrino a liší se od něj pouze orientací vlastního momentu hybnosti, spinu. Energetické spektrum emitovaných pozitronů je ze stejného důvodu jako v případě přeměny  $\beta^-$  spojité. Přeměna  $\beta^+$  byla prokázána pouze pro uměle vytvořené radio-nuklidy. Je to důsledek toho, že přeměna  $\beta^+$  je pro jádro v základním stavu neuskutečnitelná, protože hmotnost protonu je menší než součet hmotností vzniklého neutronu a pozitronu. Proto k přeměně  $\beta^+$  může dojít pouze v případě vysoce excitovaných stavech jader, jaké jsou právě produktem jaderných reakcí.

c) **záchyt elektronu ze sféry  $K$** , obvykle se značí EC a označuje se anglickým názvem **electron capture**.

Lze jej popsat schématem



Příklad záchytu:

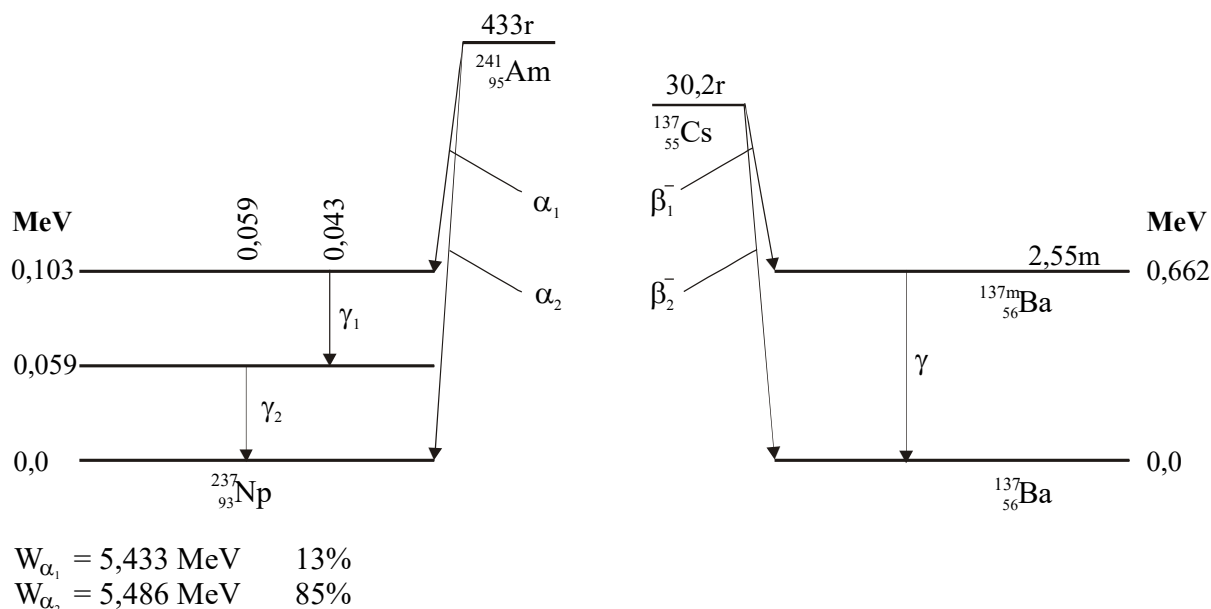


K záchytu elektronu ze sféry *K* dochází zejména u těžších jader, kde jsou rozměry sféry *K* dostatečně malé. Vzhledem k náročnosti přeměny  $\beta^+$  dávají tato jádra přednost elektronovému záchytu, který je energeticky výhodnější než přeměna  $\beta^+$ . Uvolněné místo ve sféře *K* elektronového obalu se zaplní elektronem z vyšší sféry a přebytečná energie je vyzářena ve formě fotonu rentgenového záření.

### 13.13 Emise záření gama

Nachází-li se jádro po přeměně alfa nebo beta ve vzbuzeném stavu, je jeho energie větší než v základním stavu. Jádro obvykle samovolně přechází do nejnižšího energetického stavu a přebytečnou energii emituje ve formě fotonu. Vysílané fotony mají velmi krátkou vlnovou délku a nesou energii až několik MeV. Energetické spektrum emitovaných fotonů, které nazýváme **záření gama**, je čárové.

Příklad vyzáření fotonů následně po přeměně alfa a beta je znázorněn na zjednodušeném přeměnovém schématu na obr.13.5.



Obr.13.5

V přeměnovém schématu se uvádějí všechny údaje nutné pro charakterizování dané přeměny, tj. původní a výsledné jádro, poločas přeměny a energie hladin jádra a emitovaného záření, eventuálně další parametry, jako jsou spin a parita energetických hladin, což je další charakteristika jádra.

### 13.14 Datování radionuklidů

Jestliže je znám poločas přeměny určitého radionuklidu, můžeme použít rychlost této radioaktivní přeměny využít ke stanovení délky časového intervalu. Přeměny alfa těžkých jader s dlouhými poločasy přeměny lze využít k měření stáří hornin, doby, která uplynula od jejich vzniku. Tato metoda odhaduje maximální stáří hornin na Zemi asi na  $4,5 \cdot 10^9$  let.

Přeměny beta jádra  $^{14}\text{C}$  uvedené jako příklad přeměny  $\beta^-$  se využívá jako metody pro určení stáří organických vzorků. Kosmické záření způsobuje v atmosféře Země jadernou reakci, při které vzniká radionuklid  $^{14}\text{C}$ , takže v molekulách oxidu uhličitého v zemské atmosféře je množství izotopu  $^{14}\text{C}$  k  $^{12}\text{C}$  v konstantním poměru  $1,3 \cdot 10^{-12}$ . Proto i všechny živé organizmy na zemi obsahují izotopy uhlíku ve stejném poměru. Jakmile se organizmus stane neživým, přestane absorbovat  $^{14}\text{C}$  z okolí a jeho množství začne klesat v důsledku přeměny beta. S pomocí známé hodnoty poločasu přeměny (5730 let) je možné určit stáří zkoumaného organického vzorku asi v rozmezí 1000 až 25000 roků nazpět. Popsaná metoda spolehlivě určila stáří mnoha archeologických nálezů.

### Příklady ke kap.13

#### Příklad 13.1

Poločas přeměny  $^{226}_{88}\text{Ra}$  je  $T_{1/2} = 1602$  let. Určete

- přeměnovou konstantu,
- kolik atomů rádia se přemění za 1 minutu v 10 mg rádia.

**Řešení:**

a) S použitím vztahu (14.7) dostaneme

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} = \frac{\ln 2}{1602 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 \text{s}} \doteq 1,372 \cdot 10^{-11} \text{s}^{-1}.$$

b) Pro výpočet použijeme přibližný vztah, protože můžeme předpokládat, že pro časový interval  $\Delta t = 1$  minuta zůstává aktivita zářiče (10 mg rádia) konstantní. Aktivita v čase  $t = 0$  je dána vztahem

$$A_0 = \lambda N_0,$$

kde  $N_0$  je počet radioaktivních jader v čase  $t = 0$ . Protože aktivita je rovna počtu přeměněných jader 1s, je počet přeměněných jader  $N'$  za čas  $t$  roven výrazu

$$N' = \lambda N_0 t = \lambda \frac{m}{A_r m_u} t,$$

kde  $m$  je hmotnost,  $A_r$  je relativní atomová hmotnost a  $m_u$  je atomová hmotnostní konstanta.

Po dosazení do uvedeného vztahu dostaneme hodnotu  $N'$

$$N' = \frac{1,372 \cdot 10^{-11} \text{ s}^{-1} \cdot 10^{-5} \text{ kg} \cdot 60 \text{ s}}{226 \cdot 1,6605655 \cdot 10^{-27} \text{ kg}} \doteq 2,194 \cdot 10^{10} .$$

Přemění se  $2,194 \cdot 10^{10}$  atomů.

### Příklad 13.2

Aktivita zářiče poklesne za 3 hodiny z  $1,3 \cdot 10^8 \text{ s}^{-1}$  na  $1,15 \cdot 10^8 \text{ s}^{-1}$ . Jaký je poločas přeměny?

#### Řešení:

Aktivita je definována obecně vztahem (13.8). Aktivita v čase  $t = 0$  je dána relací

$$A_0 = \lambda N_0 .$$

V čase  $t_1$  poklesne na hodnotu

$$A_1 = \lambda N_0 e^{-\lambda t_1} .$$

Z podílu aktivit můžeme stanovit přeměnovou konstantu  $\lambda$ . Platí vztah

$$\frac{A_1}{A_0} = e^{-\lambda t}$$

a po zlogaritmování

$$\lambda t = \ln \frac{A_0}{A_1} .$$

Využijeme-li souvislost mezi přeměnovou konstantou  $\lambda$  a poločasem přeměny  $T_{1/2}$ , vztah (13.8), platí

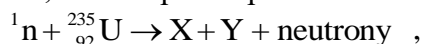
$$T_{1/2} = \frac{t \ln 2}{\ln \frac{A_0}{A_1}} = \frac{3 \text{ hod} \cdot \ln 2}{\ln \frac{1,3 \cdot 10^8}{1,15 \cdot 10^8}} = 17 \text{ hodin} .$$

Poločas přeměny je přibližně 17 hodin.

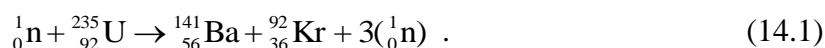
## 14. Procesy uvolňující jadernou energii

### 14.1 Štěpení těžkých jader

**Štěpení těžkých jader** probíhá v přírodě samovolně, bez vnějšího zásahu, ovšem velmi zřídka, například pro jádro  $^{235}\text{U}$  s poločasem přeměny  $8 \cdot 10^5$  roků. Jestliže však dojde k interakci mezi pomalým neutronem a tímto jádrem, vzroste pravděpodobnost štěpení. Nastane reakce typu



kde X, Y se nazývají **fragmenty štěpení**. Na jednu štěpnou reakci vznikne v průměru 2,47 neutronů, tj. dva nebo tři neutrony v jedné štěpné reakci. Pro štěpení, jako pro každou jadernou reakci, musí platit v minulé kapitole zmíněné zákony zachování. Jako štěpné fragmenty vznikají různá jádra, typickou reakcí je například



Rozdíl hmotností jádra uranu a produktů štěpení je tak velký, že na jedno štěpení se v průměru uvolní energie cca 200 MeV. Při štěpení 1 g uranu se získá energie ekvivalentní 0,1% jeho hmotnosti, tj. asi  $9 \cdot 10^{10}$  J, což je přibližně  $3 \cdot 10^6$  krát více než při spálení 1 g uhlí. Díky tomu, že při každém procesu štěpení se emitují dva nebo tři neutrony, z nichž každý může vyvolat další štěpení, může štěpná reakce probíhat jako řetězová. V dostatečně velkém souboru jader vzroste pravděpodobnost dalších štěpení natolik, že celý soubor se rozštěpí rychleji než za tisícinu sekundy. Na nekontrolovaném štěpení spočívá princip atomové bomby. Kdybychom uvolnili všechnu energii obsaženou v 1 kg  $^{235}\text{U}$ , odpovídalo by to výbuchu 20 000 tun TNT.

Abychom lépe pochopili mechanismus procesu štěpení, je potřebné se zmínit o způsobu, jakým neutrony interagují s látkou. Neutrony nejsou elektricky nabitě, nepůjde proto o elektrostatické působení neutronů na protony nebo elektrony. Nicméně, ukazuje se, že zejména **pomalé neutrony** (s malou kinetickou energií) způsobují v látkovém prostředí kterým procházejí, jaderné reakce. Volný neutron je beta radioaktivní, se střední dobou života asi 10 minut. Obvykle však neutron, než se přemění, ještě interaguje, způsobí jadernou reakci nebo srážku s částicemi prostředí. Jestliže se jedná o **rychlý neutron**, tj. má větší energii než 1 MeV, interaguje s prostředím především prostřednictvím srážek s atomovými jádry. V těchto srážkách ztrácí postupně svoji energii, až je v tepelné rovnováze s prostředím. Takový neutron se nazývá **tepelný**. Pro tepelné neutrony je velmi pravděpodobný, zejména v některých materiálech, záchyt jádrem s vysláním fotonu. Proběhne reakce



Produkt reakce, výsledné jádro, je obvykle beta radioaktivní.

Mechanismy, kterými neutrony interagují s prostředím, zejména postupný pokles energie neutronů ve srážkách a záchyt neutronů, jsou důležité pro využití procesu štěpení. Jestliže srážky neutronů navíc probíhají v látce složené především z vodíkových jader nebo jader jen o něco

těžších, neutrony ztrácejí v jedné srážce až polovinu své kinetické energie. Jejich zpomalování v takovém případě probíhá intenzivně.

### **Látky bohaté na vodík nebo jiné lehlé prvky se používají jako moderátory neutronů.**

Využívají se v reaktorech a jsou to nejčastěji lehká voda, těžká voda, parafín. Neutron zpomalený v moderátoru má při pokojové teplotě energii asi 0,04 eV. Rychlé neutrony, které vniknou do moderátoru, dosáhnou tepelné rovnováhy s prostředím za dobu menší než 1 ms. Pokud potřebujeme z nějakého důvodu zmenšit počet pomalých neutronů, zvolíme pro interakci látku, v které dochází s velkou pravděpodobností k záchytu neutronů.

### **Nejčastěji používanou látkou pro záchyt neutronů je kadmium (Cd).**

Princip jaderného reaktoru spočívá ve využití uvolněné jaderné energie z **řízené štěpné jaderné reakce**. Jak jsme se již zmínili, na jedno štěpení jádra  $^{235}\text{U}$  se uvolní dva nebo tři neutrony. Reakce bude řízená, jestliže tato reprodukční konstanta bude rovna jedné. Odpovídající stav reaktoru označujeme jako **kritický**. Je-li konstanta menší než 1, je stav **podkritický**, opačný stav nazýváme **nadkritický**. Zatím jsme pro jednoduchost předpokládali, že všechny emitované neutrony mohou způsobit další štěpení. Situace je ale mnohem komplikovanější. Nejdříve je třeba neutrony uvolněné při štěpení zpomalit v moderátoru, protože  $^{235}\text{U}$  je štěpitelný pouze pomalými neutrony. V procesu zpomalování může být část neutronů zachycena jádrem moderátoru. Určitý počet neutronů také unikne ven z reaktoru, ještě než vůbec dojde k jejich zpomalení.

Jestliže optimalizujeme všechny procesy s neutrony, o kterých jsme se zmínili, stále zůstává problém, jak udržet reaktor v kritickém stavu. Za tímto účelem jsou v reaktoru obvykle umístěny tyče z materiálu, který s velkou účinností absorbuje neutrony, například Cd (kadmium). Řídící tyče zasouváme do reaktoru, aby se snížil výkon, a vysouváme, aby se zvýšil.

V České republice jsou v provozu jaderné elektrárny pracující s tlakovodním reaktorem (PWR). V tomto typu reaktoru se používá jako moderátor voda. Zároveň je i médiem pro přenos tepla. V **primárním okruhu** protéká nádobou reaktoru voda o vysoké teplotě a tlaku, která přenáší uvolněnou tepelnou energii od jádra reaktoru k parogenerátoru, který je součástí **sekundárního okruhu**. V parogenerátoru vzniká vysokotlaká pára, která pohání turbínu generátoru elektrického proudu. V sekundárním okruhu pára nakonec kondenzuje a jako voda se vháří nazpět do parogenerátoru.

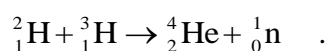
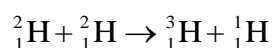
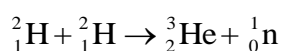
Provoz reaktoru je provázen nepříznivým jevem, kterým je hromadění radioaktivního odpadu, který je tvořen jak radioaktivními produkty štěpení, tak těžkými transuranovými nuklidy, jako plutonium a americiem.

## **14.2 Termojaderná fúze**

Z průběhu křivky vazebné energie, obr.13.2, vyplývá, že při sloučení dvou lehkých jader do jednoho těžšího se může uvolnit energie. Tento proces nazýváme **fúze**. Například při syntéze dvou jader deuteria v jádro hélia se uvolní energie asi 27 MeV ekvivalentní 0,6% hmotnosti původních jader. Z hlediska velikosti uvolněné energie je tento proces přibližně šestkrát efektivnější než štěpení uranu. Navíc, zásoby deuteria ve vodách jsou obrovské ve srovnání s jinými

druhy paliv. Vážnou potíží v uskutečňování jaderné fúze je však coulombovské elektrostatické odpuzování jader deuteria, které zabraňuje jádrům přiblížit se natolik, aby se uplatnily přitažlivé jaderné síly. Nejnadějnější cestou, jak mohou částice překonat coulombovskou bariéru, je zvýšení teploty látky. Pak, díky svému tepelnému pohybu, mají jádra šanci překonat bariéru. Kdyby se podařilo deuterium zahřát na teplotu  $5 \cdot 10^8 \text{K}$ , došlo by k syntéze jader. Proto se tato reakce nazývá **termojaderná fúze**. Při vysokých teplotách je již látka plně ionizována a chová se jako **plazma**. Díky kvantovému efektu – tunelovému jevu, stačí k překonání bariéry teplota o řád nižší, než jsme uvedli. K syntéze lehkých jader dochází na Slunci, kde je dostatečně velká teplota a předpokládá se, že probíhá **proton-protonový cyklus**.

Ukazuje se, že proton-protonový cyklus není vhodný pro využití v pozemských podmínkách, protože vyžaduje příliš velkou hustotu protonů a je příliš pomalý. Získat dlouhodobý zdroj energie založený na principu řízené termojaderné fúze je zatím velmi obtížně řešitelným problémem. Jako nejvhodnější pro termojadernou fúzi se ukazují jádra deuteria nebo tritia v reakcích buď (d,d) nebo (d,t). jedná se o reakce



Deuterium, které je hlavní složkou těchto reakcí, je dostupné v neomezeném množství v mořské vodě. Pro úspěšný průběh termojaderné fúze musí být splněny následující podmínky:

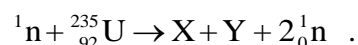
**vysoká hustota částic,**  
**vysoká teplota plazmatu,**  
**dostatečně dlouhá doba udržení fúze.**

Velkým problémem je právě udržení plazmatu s dostatečně velkou hustotou částic a teplotou, aby fúze probíhala ve velkém objemu paliva. Pro každou z výše uvedených reakcí existuje **kritická iniciační teplota**, při které je již zisk energie (uvolněná energie převažuje nad radiačními ztrátami). Tato teplota je  $4 \cdot 10^6 \text{K}$  pro (d,d) reakci a  $4,5 \cdot 10^7 \text{K}$  pro (d,t) reakci.

## Příklady ke kap.14

### Příklad 14.1

Charakteristická štěpná reakce je



Jedním z fragmentů je jádro je jádro  ${}^{94}\text{Sr}$ . S jakými charakteristikami bude vyslán druhý fragment?



**Řešení:**

Při štěpné reakci musí platit zákon zachování počtu nukleonů a celkového elektrického náboje. Proto jádro druhého fragmentu musí mít parametry

$$Z = 92 - 38 = 54 ,$$

$$A = 235 - 94 - 1 = 140 .$$

Jedná se o jádro Y s parametry  ${}_{54}^{140}\text{Y}$ , což je izotop xenonu,  ${}_{54}^{140}\text{Xe}$ .