Laplaceova transformace a řešení diferenciálních rovnic

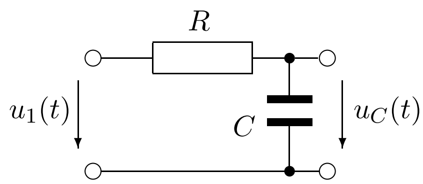
prof. RNDr. Miroslav Vlček, DrSc.

6. dubna 2006

1 Příklady řešení diferenciální rovnice s konstatními koeficienty

1.1 Diferenciální rovnice prvního řádu

Diferenciální rovnice pro napětí $u_C(t)$ integračního RC článku jsme odvodili v první přednášce



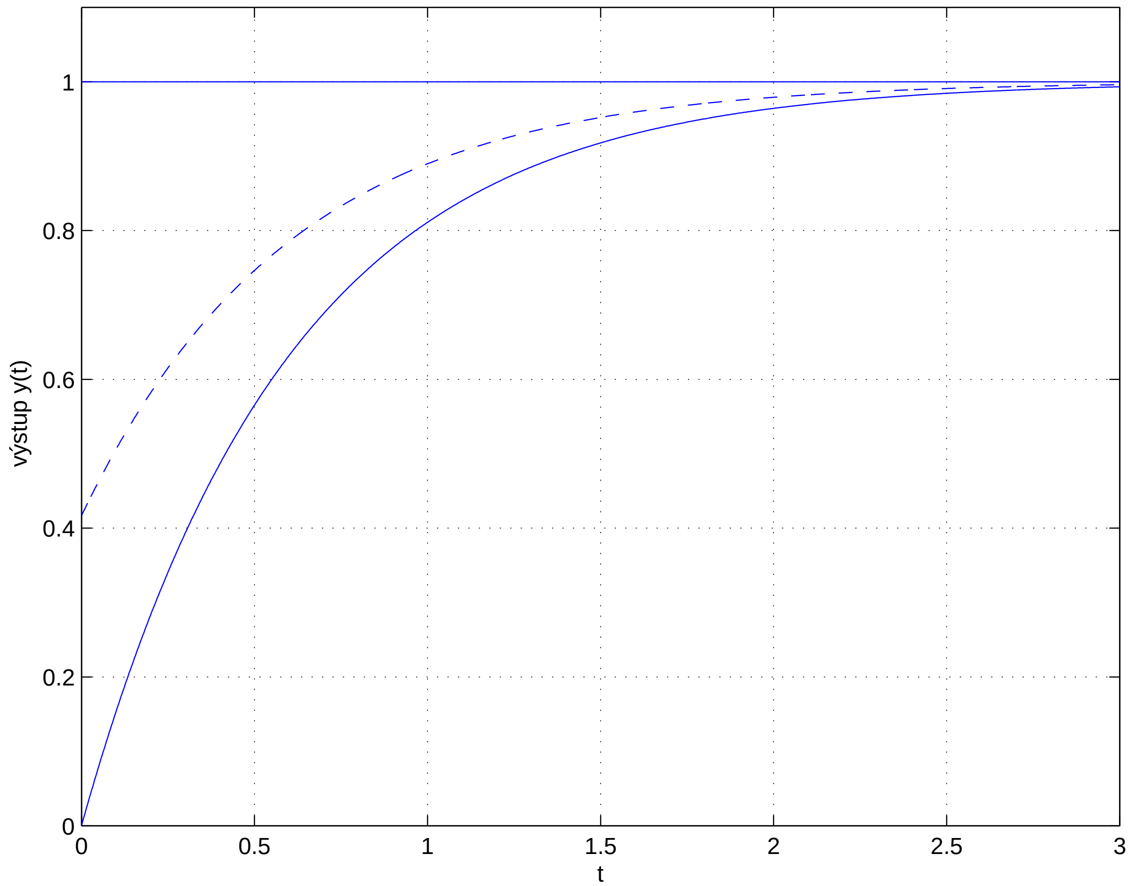
ve tvaru diferenciální rovnice prvního řádu pro $y(t) = u_C(t)$

$$RC\frac{y(t)}{dt} + y(t) = u_1 t, \tag{1}$$

kde $u_1(t) = U_0 \times 1(t)$ je funkce jednotkového skoku, která určuje připojené stejnosměrné napětí U_0. Počáteční hodnota napětí na kondenzátoru je například $y(0) = U_A$. Řešení diferenciální rovnice (1) se skládá ze 4 základních kroků:

1. provedeme Laplaceovu transformace původní diferenciální rovnice a získáme tak algebraickou rovnici pro neznámou veličinu $Y(p)$,
$$RC\,[pY(p) - y(0)] + Y(p) = \frac{U_0}{p}, \tag{2}$$
2. s použitím počátečních podmínek nalezneme řešení algebraické rovnice ve tvaru racionální lomené funkce $Y(p) = \dfrac{Q(p)}{N(p)}$,
$$Y(p) = \frac{U_0 + pU_A RC}{p(1 + pRC)}, \tag{3}$$
3. nalezneme rozklad racionální lomené funkce na parciální zlomky
$$Y(p) = \frac{U_0 + pU_A RC}{p(1 + pRC)} = \frac{k_1}{p} + \frac{k_2}{1 + pRC}, \tag{4}$$
pro hodnoty
$$\begin{aligned} k_1 &= \lim_{p\to 0} p\frac{U_0 + pU_A RC}{p(1 + pRC)} = U_0 \\ k_2 &= \lim_{p\to -1/RC} (1 + pRC)\frac{U_0 + pU_A RC}{p(1 + pRC)} = -RC(U_0 - U_A) \end{aligned}$$
získáme
$$Y(p) = \frac{U_0}{p} - \frac{U_0 - U_A}{p + 1/RC}. \tag{5}$$

Obrázek 1: Principelní průběh nabíjení integračního článku s počáteční podmínkou $y(0) = 0$ a $y(0) = \frac{5}{12}U_0$.



4. provedeme zpětnou Laplaceovu transformaci a získáme tak řešení původní diferenciální rovnice pro $t \geq 0$ ve tvaru
$$y(t) = U_0 - (U_0 - U_A)e^{-t/RC}. \tag{6}$$

1.2 Diferenciální rovnice druhého řádu

Uvažujme lineární spojitý systém, který je posaný diferenciální rovnicí

$$\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + 2y(t) = 5u(t), \tag{7}$$

kde $u(t) = 1(t)$ je jednotkový skok a počáteční stav systému je dán stavem výstupu a rychlosti v čase $t = 0$, tj. $y(0) = -1$ a $\dot{y}(0) = 2$. Po Laplaceově transformaci diferenciální rovnice dostaneme algebraickou rovnici

$$p^2Y(p) - py(0) - \dot{y}(0) + 3pY(p) - 3y(0) + 2Y(p) = \frac{5}{p}. \tag{8}$$

S použitím počátečních podmínek nalezneme řešení algebraické rovnice ve tvaru

$$Y(p) = \frac{5 - p - p^2}{p(p+1)(p+2)}. \tag{9}$$

Rozložíme racionální lomenou funkci na parciální zlomky

$$Y(p) = \frac{5}{2p} - \frac{5}{p+1} + \frac{3}{2(p+2)}. \tag{10}$$

Hledané řešení je pro $t \geq 0$

$$y(t) = \frac{5}{2} - 5e^{-t} + \frac{3}{2}e^{-2t}. \tag{11}$$

První člen odpovídá ustálenému stavu, další dva členy popisují přechodový děj.

1.3 Obecné řešení diferenciální rovnici druhého řádu

Diferenciální rovnici

$$\ddot{y}(t) + 2a\dot{y}(t) + (a^2 + b^2)y(t) = u(t) \tag{12}$$

s počátečními podmínkami ve tvaru

$$y(0) = c_1 \quad \text{a} \quad \dot{y}(0) = c_2, \tag{13}$$

řešíme pomocí Laplaceovy transformace. Protože platí

$$\mathcal{L}\left(\frac{d}{dt}y(t)\right) = pY(p) - y(0) \tag{14}$$

$$\mathcal{L}\left(\frac{d^2}{dt^2}y(t)\right) = p^2Y(p) - py(0) - \dot{y}(0) \tag{15}$$

nalezneme Laplaceovou transformací diferenciální rovnice její algebraický tvar

$$p^2Y(p) - py(0) - \dot{y}(0) + 2a(pY(p) - y(0)) + (a^2 + b^2)Y(p) = U(p) \tag{16}$$

Vyřešíme rovnici (16) vzhledem k obrazu výstupní veličiny Y(p) a dostáváme

$$\left(p^2 + 2ap + (a^2 + b^2)\right) Y(p) = U(p) + py(0) + \dot{y}(0) + 2ay(0) \tag{17}$$

nebo

$$\boxed{Y(p) = \frac{U(p) + c_2 + (p + 2a)c_1}{(p + a + ib)(p + a - ib)}}$$

Přenosová funkce $H(p)$ je definována jako podíl obrazu výstupu k obrazu vstupu $\dfrac{Y(p)}{U(p)}$ pro nulové počáteční podmínky a tedy

$$\boxed{H(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{1}{(p + a + ib)(p + a - ib)}}$$

Impulsní odezvu určíme jako inversní Laplaceovu transformaci přenosové funkce a platí

$$\boxed{\mathcal{L}^{-1}(H(p)) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(p + a)^2 + b^2}\right) = \frac{1}{b}e^{-at}\sin bt}$$

Přechodovou odezvu $s(t)$ určíme inversní Laplaceovu transformaci $s(t) = \mathcal{L}^{-1}(H(p)\dfrac{1}{p})$ a platí

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p((p + a)^2 + b^2)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{a^2 + b^2}\left[\frac{1}{p} - \frac{p + 2a}{(p + a)^2 + b^2}\right]\right\} =$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{a^2 + b^2}\left[\frac{1}{p} - \frac{p + a}{(p + a)^2 + b^2} - \frac{a}{(p + a)^2 + b^2}\right]\right) = \frac{1}{a^2 + b^2}\left[1 - e^{-at}\cos bt - \frac{a}{b}e^{-at}\sin bt\right],$$

takže platí

$$\boxed{\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{a^2 + b^2}\left[\frac{1}{p} - \frac{p + 2a}{(p + a)^2 + b^2}\right]\right\} = \frac{1}{a^2 + b^2}\left[1 - e^{-at}\cos bt - \frac{a}{b}e^{-at}\sin bt\right]}$$