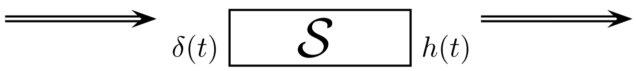
Přenosová funkce a spojování subsystémů

prof. RNDr. Miroslav Vlček, DrSc.

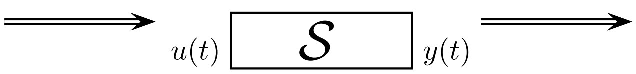
13. dubna 2006

1. Vnější popis dynamického systému



Přenosová funkce LTI systému je ve spojitém čase definována jako Laplaceův obraz odezvy systému na jednotkový impuls při nulových počátečních podmínkách.

$$H(p) = \mathcal{L}(h(t)) \tag{1}$$



Ekvivalentně je přenosová funkce definována jako poměr Laplaceova obrazu výstupu k Laplaceově obrazu vstupu při nulových počátečních podmínkách

$$H(p) = \frac{\mathcal{L}(y(t))}{\mathcal{L}(u(t))} = \frac{Y(p)}{U(p)} \tag{2}$$

Protože vstup a výstup LTI systému spolu souvisí prostřednictvím konvoluce

$$y(t) = \int_0^\infty h(t-\tau)u(\tau)d\tau = h(t) * x(t)\,, \tag{3}$$

platí, že Laplaceova transformace impulsní odezvy $h(t)$ je přenosová funkce

$$H(p) = \mathcal{L}\left[h(t)\right] = \int\limits_0^\infty h(t)e^{-pt}dt\,, \tag{4}$$

pro kterou je splněn vztah

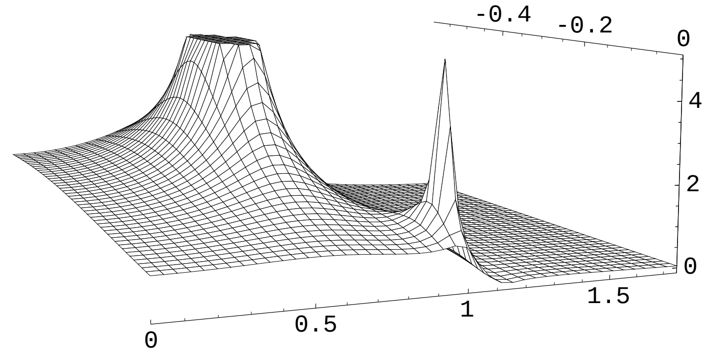
$$Y(p) = H(p)\,U(p)\,. \tag{5}$$

Přechodová odezva $s(t)$) je definována jako integrál impulsní odezvy

$$s(t) = \int_0^t h(\tau)d\tau\,, \tag{6}$$

takže platí

$$s(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{H(p)}{p}\right]\,. \tag{7}$$



Obrázek 1: Přenosová funkce znázorněná nad komplexní rovinou $p = \sigma + \jmath\omega$ s řezem podél imaginární osy

2. Diferenciální rovnice a přenosová funkce

Předpokládejme, že LTI systém je popsán diferenciální rovnicí

$$\begin{aligned} &a_n y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y^{(1)} + a_0 y = \\ &\quad = b_m u^{(m)} + b_{m-1}u^{(m-1)} + \cdots + b_1 u^{(1)} + b_0 u \end{aligned} \tag{8}$$

kde koeficienty a_i a b_j jsou reálná čísla a pro indexy platí $n \geq m$.

Je-li $n > m$, systém se nazývá ryzí a výstup systému má vždy jisté zpoždění. Přenos lineárního systému odvodíme pro nulové počáteční podmínky pomocí Laplaceovy transformace obou stran rovnice (3). Výsledkem je rovnice

$$\begin{aligned} &\left(a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \cdots + a_1 p^1 + a_0\right) Y(p) = \\ &\quad = \left(b_m p^m + b_{m-1}p^{m-1} + \cdots + b_1 p^1 + b_0\right) U(p) \end{aligned} \tag{9}$$

Přenosová funkce má potom tvar racionální lomené funkce

$$H(p) = \frac{b_m p^m + b_{m-1}p^{m-1} + \cdots + b_1 p^1 + b_0}{a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \cdots + a_1 p^1 + a_0} \tag{10}$$

Kmitočtovou charakteristiku získáme z přenosové funkce substitucí

$$p = \jmath\omega\,, \tag{11}$$

kde ω je úhlový kmitočet. Dostáváme tak

$$H(p)|_{p=\jmath\omega} = \frac{b_m(\jmath\omega)^m + b_{m-1}(\jmath\omega)^{m-1}\cdots + b_0}{a_n(\jmath\omega)^n + a_{n-1}(\jmath\omega)^{n-1}\cdots + a_0} = A(\omega)e^{\jmath\Phi(\omega)}\,, \qquad (12)$$

kde $A(\omega)$ je amplitudová charakteristika a $\Phi(\omega)$ se nazývá fázová charakteristika.

3. Spojování a vazby mezi systémy

Subsystémy mohou být spojeny třemi typy vazeb

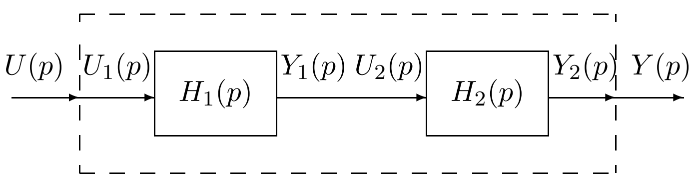
- **kaskádní**

$$\boxed{H(p) = H_1(p).H_2(p)}$$

Pro výslednou přenosovou funkci kaskádního řazení dvou subsystémů platí

$$H(p) = \frac{Y_1(p)}{U(p)}.\frac{Y(p)}{Y_1(p)} = \frac{Y_1(p)}{U_1(p)}.\frac{Y(p)}{U_2(p)} = H_1(p).H_2(p). \qquad (13)$$

$$H(p) = H_1(p) \times H_2(p)$$



- **paralelní**

$$\boxed{H(p) = H_1(p) + H_2(p)}$$

Pro výslednou přenosovou funkci paralelního řazení dvou subsystémů platí

$$H(p) = \frac{Y_1(p)}{U(p)} + \frac{Y_2(p)}{U(p)} = H_1(p) + H_2(p). \qquad (14)$$

- **zpětnovazební**

$$\boxed{H(p) = \frac{H_1(p)}{1 + H_1(p).H_2(p)}}$$

Pro výslednou přenosovou funkci zpětnovazebního řazení dvou subsystémů odvodíme postupně

$$\begin{aligned} &\text{na výstupu} \quad && Y_1(p) = Y(p) = U_2(p) \\ &\text{na vstupu} \quad && U_1(p) = U(p) - Y_2(p)\,. \end{aligned}$$

Nyní vyjádříme výstupní $Y_1(p)$ a $Y_2(p)$ pomocí dílčích přenosových funkcí a dostaneme

$$\begin{aligned} Y(p) = Y_1(p) = H_1(p)U_1(p) &= \\ = H_1(p)\left(U(p) - Y_2(p)\right) &= \\ = H_1(p)\left(U(p) - H_2(p)U_2(p)\right)& \\ = H_1(p)\left(U(p) - H_2(p)Y(p)\right)&. \end{aligned} \qquad (15)$$

Vyjádříme nakonec

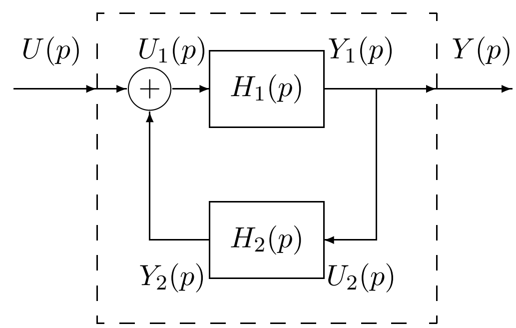
$$Y(p) + H_1(p)H_2(p)Y(p) = H_1(p)U(p)\,, \qquad (16)$$

a je

$$H(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{H_1(p)}{1 + H_1(p)H_2(p)}\ . \qquad (17)$$

Přenos systému s jednoduchou **zápornou zpětnou vazbou** je dán poměrem přenosu přímé větve ku přenosu celé rozpojené smyčky zvětšenému o 1.

$$H(p) = \frac{H_1(p)}{1 - H_1(p)H_2(p)}$$



Pokud je zpětný signál na vstupu přičítán, hovoříme o **kladné zpětné vazbě** s znaménko ve jmenovateli je opačné

$$\boxed{H(p) = \frac{H_1(p)}{1 - H_1(p).H_2(p)}}$$