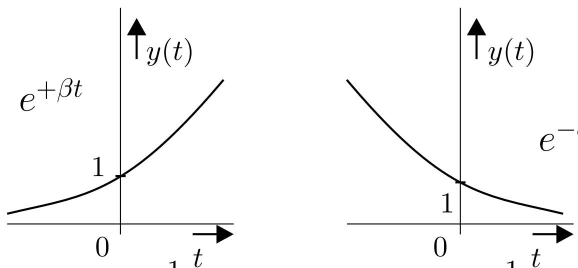
Stabilita a vnitřní popis systémů

prof. RNDr. Miroslav Vlček, DrSc.

20. dubna 2006

1. Stabilita LTI systémů

LTI systém klasifikujeme jako stabilní, jestliže reálná část pólů přenosové funkce $\Re(p_{\infty\mu}) < 0$ a jako nestabilní, jestliže reálná část pólů přenosové funkce $\Re(p_{\infty\mu}) > 0$.



$\mathcal{L}\left[e^{+\beta t}\right] = \dfrac{1}{p-\beta}$ $\qquad$ $\mathcal{L}\left[e^{-\alpha t}\right] = \dfrac{1}{p+\alpha}$

Obrázek 1: Nestabilní a stabilní odezvy příslušné polohám pólů $\Re(p_{\infty 1}) = \beta > 0$ a $\Re(p_{\infty 2}) = -\alpha < 0$

2. Dynamické vlastnosti

Na dynamických vlastnostech a časových odezvách výsledného systému se podílejí póly $[p_{1\infty\mu}, p_{2\infty\mu}]$ dílčích přenosových funkcí

$$H_1(p) = \frac{Q_1(p)}{N_1(p)} \quad H_2(p) = \frac{Q_2(p)}{N_2(p)}. \tag{1}$$

Pro výsledný

- **kaskádní** systém se poloha pólů nemění, protože součin přenosových funkcí
$$H_1(p).H_1(p) = \frac{Q_1(p)Q_2(p)}{N_1(p)N_2(p)}$$
má shodné rozložení pólů s původními subsystémy;

- **paralelní** systém se poloha pólů nemění, protože součet přenosových funkcí
$$H_1(p) + H_1(p) = \frac{Q_1(p)N_2(p) + Q_2(p)N_1(p)}{N_1(p)N_2(p)}$$
má shodné rozložení pólů s původními subsystémy;

- **zpětnovazební** se poloha pólů významně mění, neboť platí
$$\frac{H_1(p)}{1 + H_1(p)H_2(p)} = \frac{Q_1(p)N_2(p)}{N_1(p)N_2(p) + Q_1(p)Q_2(p)} \tag{2}$$
Této vlastnosti záporné zpětné vazby se využívá v oblasti řízení (control theory) pro stabilizaci systémů.

Příklad
Naším úkolem je nalézt přenosovou funkci systému, který je tvořen tak, že k nestabilnímu systému druhého řádu

$$H_1(p) = \frac{p^2 + 3p + 2}{p^2 - p + 1}$$

je zapojen zesilovací člen se zesílením B. Systém je uzavřen zápornou zpětnou vazbou.
Výsledek

$$H(p) = B\frac{p^2 + 3p + 2}{(B+1)p^2 + (3B-1)p + 2B + 1}.$$

3. Vnitřní popis dynamického systému

$$\boxed{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}} \Longrightarrow \boxed{H(p)}$$

Stavový model lineárního časově invariantního systému

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\,\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \end{aligned}$$

převedeme pomocí Laplaceovy na algebraické rovnice rovnice tvaru

$$pX(p) - x(0) = \mathbf{A}\,X(p) + \mathbf{B}\,U(p) \tag{3}$$
$$Y(p) = \mathbf{C}\,X(p) + \mathbf{D}\,U(p) \tag{4}$$

Rovnici (6) upravíme do tvaru

$$(p\mathbf{1} - \mathbf{A})\;X(p) = x(0) + \mathbf{B}\,U(p)$$

a vypočítáme

$$X(p) = (p\mathbf{1} - \mathbf{A})^{-1}\;x(0) + (p\mathbf{1} - \mathbf{A})^{-1}\;\mathbf{B}\,U(p).$$

Přenosová funkce je definována pro nulovou počáteční podmínku $x(0) = 0$. Po dosazení do rovnice (7) dostáváme

$$\begin{aligned} Y(p) &= \mathbf{C}\,(p\mathbf{1} - \mathbf{A})^{-1}\,\mathbf{B}\,U(p) + \mathbf{D}\,U(p) \\ &= \left[\mathbf{C}\,(p\mathbf{1} - \mathbf{A})^{-1}\,\mathbf{B} + \mathbf{D}\right]\,U(p) \end{aligned} \tag{5}$$

protože platí $Y(p) = H(p)\,U(p)$ je přenosová funkce

$$H(p) = \mathbf{C}\,(p\mathbf{1} - \mathbf{A})^{-1}\,\mathbf{B} + \mathbf{D}\,. \tag{6}$$

Pokud se jedná o ryzí systém, který nemá žádnou přímou vazbu ze vstupu na výstup a tedy $\mathbf{D} = 0$, potom

$$H(p) = \mathbf{C}\,(p\mathbf{1} - \mathbf{A})^{-1}\,\mathbf{B} \tag{7}$$

4. Příklad - přenos a stavové rovnice

Uvažujme systém se dvěma vstupy a dvěma výstupy, které jsou popsány soustavou dvou diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} y_1''(t) + 4y_1'(t) - 3y_2(t) &= u_1(t) \\ y_1'(t) + y_2'(t) + y_1(t) + 2y_2(t) &= u_2(t) \end{aligned}$$

Naším úkolem je vypočítat přenosovou funkci. Řešení se sestává ze dvou podstatných kroků:

1. Nalezení stavového popisu, který přísluší výchozím rovnicím.
2. Nalezení přenosové funkce pomocí $H(p) = \mathbf{C}\,(p\mathbf{1} - \mathbf{A})^{-1}\,\mathbf{B} + \mathbf{D}$.

Řešení

Stavový vektor je dán volbou

$$\begin{aligned} x_1(t) &= y_1(t) \\ x_2(t) &= y_1'(t) \\ x_3(t) &= y_2(t) \end{aligned}$$

ze které vyplývá popis ve stavovém tvaru, tj. diferenciální rovnicemi prvního řádu

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ x_3'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 3 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} \tag{8}$$

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} \tag{9}$$

Přenosovou matici $H(p)$, pro kterou musí platit $Y(p) = H(p)U(p)$

$$\begin{bmatrix} Y_1(p) \\ Y_2(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11}(p) & H_{12}(p) \\ H_{21}(p) & H_{22}(p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(p) \\ U_2(p) \end{bmatrix} \tag{10}$$

odvodíme pomocí vztahů (10). Nejprve sestavíme matici

$$(p\mathbf{1} - \mathbf{A}) = \begin{bmatrix} p & -1 & 0 \\ 0 & p+4 & -3 \\ 1 & 1 & p+2\,. \end{bmatrix} \tag{11}$$

Determinant této matice je

$$det\,(p\mathbf{1} - \mathbf{A}) = p^3 + 6p^2 + 11p + 3.$$

Tento polynom, bude jmenovatelem všech čtyř dílčích přenosů $H_{ij}(p)$. Adjungovaná matice k $(p\mathbf{1} - \mathbf{A})$ je dána subdeterminanty této matice a platí

$$adj\,(p\mathbf{1} - \mathbf{A}) = \begin{bmatrix} p^2 + 6p + 11 & p+2 & 3 \\ -3 & p(p+2) & 3p \\ -(p+4) & -(p+1) & p(p+4) \end{bmatrix}.$$

Po vynásobení zleva maticí $\mathbf{C}$ a zprava maticí $\mathbf{B}$ dostáváme matici 2×2, jejíž jednotlivé prvky jsou polynomy v proměnné p a odpovídají čitateli jednotlivých

$$\mathbf{C}\,adj\,(p\mathbf{1} - \mathbf{A})\,\mathbf{B} = \begin{bmatrix} p+2 & 3 \\ -(p+1) & p(p+4) \end{bmatrix}.$$

Výsledná přenosová matice je

$$H(p) = \frac{\begin{bmatrix} p+2 & 3 \\ -(p+1) & p(p+4) \end{bmatrix}}{p^3 + 6p^2 + 11p + 3}.$$