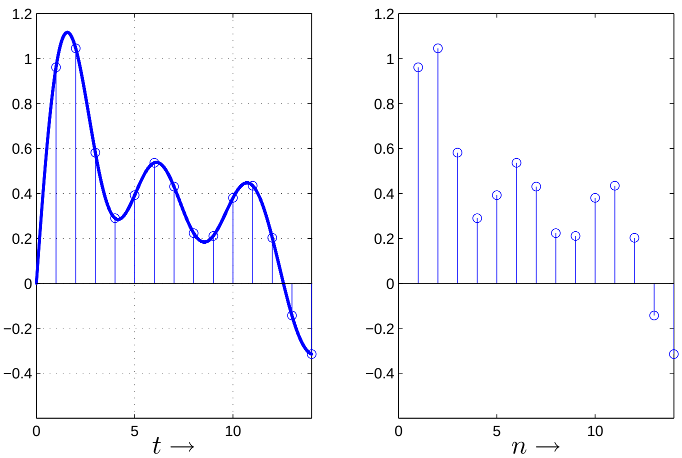
z - transformace

prof. RNDr. Miroslav Vlček, DrSc.

27. dubna 2006

O původu diskrétní transformace



Obrázek 1. Spojitá funkce $f(t)$ a její ideální vzorkování

Vztah mezi spojitou funkcí $f(t)$ a ideálně vzorkovanou funkcí $f^*(t)$ lze formálně zapsat jako

$$f^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f(t)\delta(t - nT)\,. \tag{1}$$

Jestliže budeme hledat Laplaceovu transformaci funkce $f^*(t)$ dostaneme postupně

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left[f^*(t)\right] &= \int_0^{\infty} f^*(t)\, e^{-pt} dt \\
&= \int_0^{\infty} dt \sum_{n=0}^{\infty} f(t)\,\delta(t - nT)\, e^{-pt} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} dt \delta(t - nT)\, f(t)\, e^{-pt} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) e^{-pnT} = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) z^{-n}\,,
\end{aligned}$$

kde jsem zavedli komplexní proměnnou $z = e^{pT}$ a $\{f(nT)\}$ je posloupnost vzorků příslušné spojité funkce. Veličinu T nazýváme periodou vzorkování a položíme ji pro zjednodušení $T = 1$.

z transformace - definice

Jednostranná z transformace posloupnosti $f(n)$ je definována nekonečnou řadou

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) z^{-n}\,, \tag{2}$$

kterou často označujeme $F(z) = \mathcal{Z}\left[f(n)\right]$. Uvedená řada konverguje na vnějšku jednotkové kružnice $|z| > 1$ pro $f(n)$ omezené.

Zpětná z transformace má tvar integrálu podél uzavřené křivky C, která obsahuje všechny singulární body funkce $F(z)$. Pro všechna $n = 0, 1, \ldots$ platí

$$f(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathrm{C}} F(z) z^{n-1} dz \equiv \mathcal{Z}^{-1}\left[F(z)\right]\,. \tag{3}$$

Víme, že vnější popis diskrétního lineárního časově invariantního systému vede na diferenční rovnici n tého řádu s konstantními koeficienty. Ukážeme si, že z-transformací obdržíme algebraickou rovnici a vztah mezi vstupem a výstupem je dán racionální lomenou funkcí. Pro racionální lomené funkce

$$F(z) = \frac{Q(z)}{N(z)}$$

se výpočet zpětné z-transformace podstatně zjednoduší.

z transformace - vlastnosti

- z transformace je lineární

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}\left[\sum_k a_k f_k(n)\right] &= \sum_k a_k \mathcal{Z}\left[f_k(n)\right] \\
\mathcal{Z}^{-1}\left[\sum_m b_m F_m(z)\right] &= \sum_m b_m \mathcal{Z}^{-1}\left[F_m(z)\right]
\end{aligned} \tag{4}$$

- Věta o změně měřítka

$$a^{-n} f(n) = \mathcal{Z}^{-1}\left[F(az)\right] \qquad F(a^{-1}z) = \mathcal{Z}\left[a^n f(n)\right]$$

- Věta o posunutí
  Platí

$$\mathcal{Z}\left[f(n-m)\right] = z^{-m}\mathcal{Z}\left[f(n)\right] = z^{-m}F(z)\,,$$

jestliže uvažujeme $f(n-m)=0$ pro $n-m<0$.

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}\left[f(n+m)\right] &= z^m\left[\mathcal{Z}\left[f(n)\right]-\sum_{\nu=0}^{m-1} f(\nu)z^{-\nu}\right]\\ &= z^m\left[F(z)-\sum_{\nu=0}^{m-1} f(\nu)z^{-\nu}\right]\end{aligned}$$

- Věta o transformaci částečné sumy posloupnosti

$$\mathcal{Z}\left[\sum_{\nu=0}^{n-1} f(\nu)\right] = \frac{1}{z-1}\mathcal{Z}\left[f(n)\right] = \frac{1}{z-1}F(z)$$

- Věta o transformaci diferencí
  Pro $m=1,2,\ldots$ definujeme

$$\begin{aligned}\Delta^0 f(n) &= f(n)\\ \Delta^1 f(n) &= f(n+1)-f(n),\\ \Delta^m f(n) &= \Delta\left[\Delta^{m-1}f(n)\right]\end{aligned}$$

a platí

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}\left[\Delta f(n)\right] &= (z-1)F(z)-f(0)z\\ \mathcal{Z}\left[\Delta^2 f(n)\right] &= (z-1)^2F(z)-f(0)z(z-1)\\ &\quad +\Delta f(0)z\end{aligned}$$

- Věta o konvoluci (na přednášce jsme ji dokazovali pomocí násobení polynomů !)

$$\mathcal{Z}\left[\sum_{m=0}^{\infty} f(n-m)g(m)\right] = F(z)G(z)$$

- Věta o derivaci obrazu

$$\mathcal{Z}\left[nf(n)\right] = z\frac{dF(z)}{dz}$$

Tabulka z - transformace

$f(n)=\mathcal{Z}^{-1}\left[F(z)\right]$	$F(z)=\mathcal{Z}\left[f(n)\right]$
$f(n)=\dfrac{1}{2\pi i}\int_C F(z)z^{n-1}dz$	$F(z)=\sum_{n=0}^{\infty} f(n)z^{-n}$
$\delta(n)$	1
$1(n)$	$\dfrac{1}{1-z^{-1}}$
a^n	$\dfrac{1}{1-az^{-1}}$
na^n	$\dfrac{a\,z^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$
n	$\dfrac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$
n^2	$\dfrac{z^{-1}(1+z^{-1})}{(1-z^{-1})^3}$
$a^n\sin n\vartheta$	$\dfrac{az^{-1}\sin\vartheta}{1-2az^{-1}\cos\vartheta+a^2z^{-2}}$
$a^n\cos n\vartheta$	$\dfrac{1-az^{-1}\cos\vartheta}{1-2az^{-1}\cos\vartheta+a^2z^{-2}}$
$a^n\sinh n\varphi$	$\dfrac{az^{-1}\sinh\varphi}{1-2az^{-1}\cosh\varphi+a^2z^{-2}}$
$a^n\cosh n\varphi$	$\dfrac{1-az^{-1}\cosh\varphi}{1-2az^{-1}\cosh\varphi+a^2z^{-2}}$
$T_n(x)$	$\dfrac{1-xz^{-1}}{1-2xz^{-1}+z^{-2}}$
$U_{n-1}(x)$	$\dfrac{z^{-1}}{1-2xz^{-1}+z^{-2}}$