Inverzní z - transformace a řešení diferenčních rovnic

prof. RNDr. Miroslav Vlček, DrSc.

11. května 2006

Inverzní z transformace

Zpětná z transformace má tvar integrálu podél uzavřené křivky C, která obsahuje všechny singulární body funkce $Y(z)$. Pro všechna $n = 0, 1, \dots$ platí

$$y(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C} Y(z) z^{n-1} dz \equiv \mathcal{Z}^{-1}\left[Y(z)\right]. \quad (1)$$

Metody výpočtu inverzní z transformace

O racionální lomené funkci $\frac{Q(z)}{N(z)}$ říkáme, že má **nulové** body $z_{0\nu}$, jestliže $Q(z_{0\nu}) = 0$ a že má **póly** $z_{\infty\mu}$, jestliže $N(z_{\infty\mu}) = 0$.

Pokud má funkce $\frac{Q(z)}{N(z)}$ jednoduché póly, potom

$$\begin{aligned} N(z) &= \prod_{\mu=1}^{N} (1 - z_{\infty\mu} z^{-1}) = \\ &= (1 - z_{\infty 1} z^{-1})(1 - z_{\infty 2} z^{-1}) \dots \\ &\dots \qquad (1 - z_{\infty N} z^{-1}) \end{aligned} \quad (2)$$

Rozklad racionální lomené funkce na parciální zlomky

$$\begin{aligned} \frac{Q(z)}{N(z)} &= \sum_{\mu=1}^{N} \frac{k_\mu}{1 - z_{\infty\mu} z^{-1}} \\ &= \frac{k_1}{1 - z_{\infty 1} z^{-1}} + \frac{k_2}{1 - z_{\infty 2} z^{-1}} + \dots \\ &\qquad \dots + \frac{k_N}{1 - z_{\infty N} z^{-1}} \end{aligned} \quad (3)$$

kde k_μ je residuunm, pro které platí

$$\begin{aligned} k_\mu &= \lim_{z \to z_{\infty\mu}} (1 - z_{\infty\mu} z^{-1}) \frac{Q(z)}{N(z)} \\ &= Q(z_{\infty\mu}) \lim_{z \to z_{\infty\mu}} (1 - z_{\infty\mu} z^{-1}) \frac{1}{N(z)} \\ &= Q(z_{\infty\mu}) \lim_{z \to z_{\infty\mu}} \frac{1}{\dfrac{N(z)}{1 - z_{\infty\mu} z^{-1}}} \\ &= Q(z_{\infty\mu}) \frac{1}{N'(z_{\infty\mu})} \end{aligned} \quad (4)$$

Pro jednoduchost budeme dále psát $z_{\infty\mu} \to z_\mu$. Protože pro $|az^{-1}| < 1$ platí

$$\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{1}{1 - az^{-1}}\right] = \mathcal{Z}^{-1}\left[\sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n}\right] = a^n$$

dostaneme

$$\begin{aligned} &\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{Q(p)}{N(p)}\right] \\ &\qquad = \mathcal{Z}^{-1}\left[\sum_{\mu=1}^{N} \frac{k_\mu}{1 - z_\mu z^{-1}}\right] \\ &\qquad = \sum_{\mu=1}^{N} k_\mu z_\mu^n. \end{aligned} \quad (5)$$

Tím jsme dokázali vzorec pro zpětnou transformaci racionální lomené funkce s jednoduchými póly.

Řešení diferenční rovnice prvního řádu

V první přednášce jsme si ukazovali jak lze odvodit diferenční rovnici pro jednoduchý model variace ceny vlivem nabídky a poptávky.
Rovnice nabídky - nabídka *dnes* závisí na *včerejší* ceně a to tak, že nabídka stoupá s rostoucí cenou. Pro $\mathcal{C} > 0$ platí

$$n(k) = \mathcal{C} c(k-1) + \mathcal{A} u(k). \quad (6)$$

Rovnice poptávky - poptávka *dnes* závisí na *dnešní* ceně a to tak, že poptávka klesá s rostoucí cenou. Pro $\mathcal{D} > 0$ platí

$$p(k) = -\mathcal{D} c(k-1) + \mathcal{B} u(k). \quad (7)$$

Rovnost nabídky a poptávky

$$n(k) = p(k) \quad (8)$$

pak vede na diferenční rovnici prvního řádu

$$c(k) + \frac{\mathcal{C}}{\mathcal{D}} c(k-1) = \frac{\mathcal{B} - \mathcal{A}}{\mathcal{D}} u(n). \quad (9)$$

Budem hledat řešení diferenční rovnice prvního řádu pro variaci ceny $c(k) \equiv y(n)$ ve tvaru

$$y(n) + \gamma\, y(n-1) = \alpha\, u(n). \quad (10)$$

Budeme předpokládat, že pro všechna $n < 0$ platí $y(n) = 0$ a $u(n) = \mathbf{1}(n)$. Rovnici (10) řešíme pomocí z-transformace. Protože platí

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\{y(n-m)\} &= z^{-m}\left[Y(z) + \sum_{\nu=1}^{m} y(-\nu) z^{\nu}\right], \\ \mathcal{Z}\{y(n)\} &= Y(z)\,, \qquad\qquad (11) \\ \mathcal{Z}\{y(n-1)\} &= z^{-1}\left[Y(z) + y(-1)\,z\right], \\ \mathcal{Z}\{u(n)\} &= \frac{1}{1-z^{-1}}\,, \end{aligned}$$

nalezneme pro $y(-1) = 0$ algebraický tvar diferenční rovnice (10)

$$Y(z)\left(1 + \gamma\, z^{-1}\right) = \frac{\alpha}{1 - z^{-1}} \qquad (12)$$

a její řešení ve tvaru

$$Y(z) = \frac{\alpha}{(1-z^{-1})(1+\gamma\, z^{-1})}\,. \qquad (13)$$

K nalezení posloupnosti $y(n)$ inverzní transformací použijeme rozklad řešení (13) na parciální zlomky

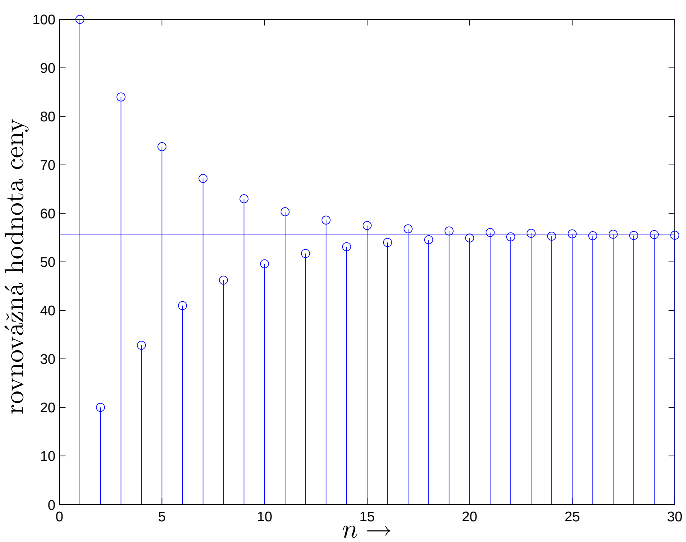
$$Y(z) = \alpha\left[\frac{k_1}{1-z^{-1}} + \frac{k_2}{1+\gamma\, z^{-1}}\right]. \qquad (14)$$

Residua $k_{1,2}$ vypočteme

$$\begin{aligned} k_1 &= \lim_{z\to 1}(1-z^{-1})Y(z) = \lim_{z\to 1}\frac{\alpha}{1+\gamma\, z^{-1}} = \frac{\alpha}{1+\gamma} \\ k_2 &= \lim_{z\to -\gamma}(1+\gamma\, z^{-1})Y(z) = \lim_{z\to -\gamma}\frac{\alpha}{1-z^{-1}} = \frac{\alpha\,\gamma}{1+\gamma} \end{aligned}$$

a posloupnost $y(n)$ je pro $\forall\, n \geq 0$ určena vztahem

$$y(n) = \frac{\alpha}{1+\gamma}\left[1 + \gamma\,(-\gamma)^n\right] = \alpha\frac{1-(-\gamma)^{n+1}}{1-(-\gamma)} \qquad (15)$$



Obrázek 1. Cena $y(n)$ pro citlivost trhu $\gamma = 0.8$