

Jemný úvod do numerických metod.

Matematické algoritmy (11MA)

Jan Příkryl

Ústav aplikované matematiky
ČVUT v Praze, Fakulta dopravní

7. přednáška 11MA
čtvrtek 11. listopadu 2010

verze: 2010-11-29 13:32



Obsah přednášky

- 1 Úvod do numerické matematiky
 - Matematické modelování
 - Pozice numerické matematiky
 - Numerická úloha
- 2 Zobrazení čísel v počítači
- 3 Typy chyb
- 4 Typy numerických úloh



Matematické modelování

Zopakujme si Modelování systémů a procesů

Systém – část prostředí, kterou lze vnímat odděleně od jejího okolí.

Abychom mohli zkoumat chování nějakého systému, můžeme

- provádět **experimenty** anebo
- popsat systém matematicky – sestavit jeho matematický **model**.

Závaží na pružině

Kmity závaží na pružině popisuje diferenciální rovnice

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \omega^2 y(t) = 0$$



Matematické modelování

Zopakujme si Modelování systémů a procesů

Systém – část prostředí, kterou lze vnímat odděleně od jejího okolí.

Abychom mohli zkoumat chování nějakého systému, můžeme

- provádět **experimenty** anebo
- popsat systém matematicky – sestavit jeho matematický **model**.

Model vývoje dluhu

Finanční model vývoje zadlužení může mít tvar diferenční rovnice

$$y(n+1) = [1 + \alpha(n)] \cdot y(n) - x(n)$$



Matematické modelování

Co stojí za Matlabem a Simulinkem?

K zkoumání matematických modelů systémů jsme používali Matlab a Simulink.

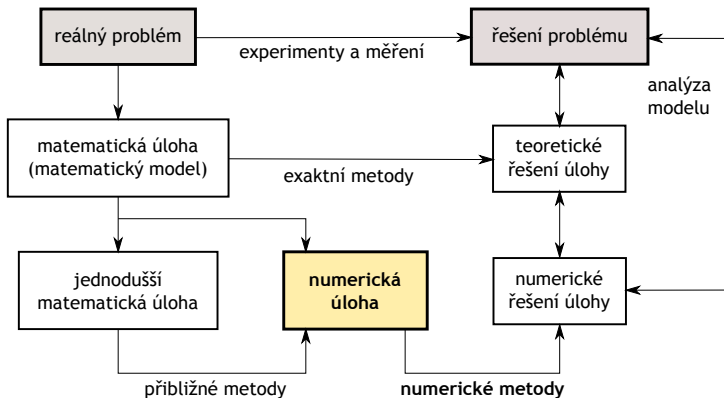
V příštích přednáškách si stručně povíme

- co vlastně počítač musí umět, aby dokázal s dostatečnou přesností počítat s matematickými modely reálného světa,
- jaké matematické algoritmy se ve vybraných případech používají, a
- proč není dobré počítači vždycky slepě věřit.



Matematické modelování

Pozice numerické matematiky



Čím se numerická matematika zabývá

Numerické úlohy a metody

Numerická úloha – jasný a jednoznačný popis funkčního vztahu mezi *konečným* počtem vstupních a výstupních dat.

Data – vyjádřitelná konečným počtem čísel.

⇒ Je to matematický model reálného problému, jenž může být v konečném čase realizován na počítači.

Numerický algoritmus – zajímá nás realizace aritmetických operací s čísly, nikoliv logické operace.

Konstrukce a analýza metod a algoritmů pro realizaci numerických úloh na počítačích: **numerická matematika**.



Numerické úlohy

Příklady

Toto je numerická úloha

Řešení rovnice $x^4 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$ je možno počítat numericky pro konkrétní vstupní vektor $\mathbf{a} = [a_1, a_2, a_3] \in \mathbb{R}^3$.

Výstupem numerické metody řešení bude vektor

$$\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3, x_4] \in \mathbb{C}^4$$

Toto není numerická úloha

Řešení rovnice $y''(x) - y(x)^2 = 0$ za daných počátečních podmínek nelze hledat numericky.

Numerický přístup pouze pro vyšetření hodnot ve vybraných bodech $x \in \{x_i\}_1^n$



Obsah přednášky

- 1 Úvod do numerické matematiky
- 2 Zobrazení čísel v počítači
- 3 Typy chyb
- 4 Typy numerických úloh



Zobrazení čísel v počítači

Celá čísla, pevná a plovoucí řádová čárka

Počítač \Rightarrow binární logika, binární reprezentace čísel.

Celá čísla – ekvivalenty ve dvojkové soustavě, jeden (nejvyšší) bit na znaménko

Příklad

$$66_{10} = 01000010_2, -126_{10} = 11111110_2$$

Pevná řádová čárka – pevný počet bitů pro celou a desetinnou část čísla

Příklad

$$5,3100_{10} \approx 10101010_2 (= 101,01010_2), 7,5625_{10} = 11110010_2$$

Plovoucí řádová čárka – převod na tvar $m \cdot 10^n$



Zobrazení čísel v počítači

Mantisa a exponent

Definice

Číslo x lze reprezentovat v **semilogaritmickém tvaru s normalizovanou mantisou** jako

$$x = \operatorname{sgn} x \left(\frac{a_1}{q} + \frac{a_2}{q^2} + \dots + \frac{a_l}{q^l} \right) q^b$$

kde $q > 1$ je *základ*, $a_i \in \{0, 1, \dots, q - 1\}$ jsou *číslíčky mantisy* a $b \in \{m_1, \dots, m_2\}$ je *exponent*.

Reprezentace x pokrývá pouze podmnožinu \mathbb{R} – má pouze $2(q - 1)q^{l-1}(m_2 - m_1 + 1) + 1$ prvků

\Rightarrow některá reálná čísla nelze přesně reprezentovat.



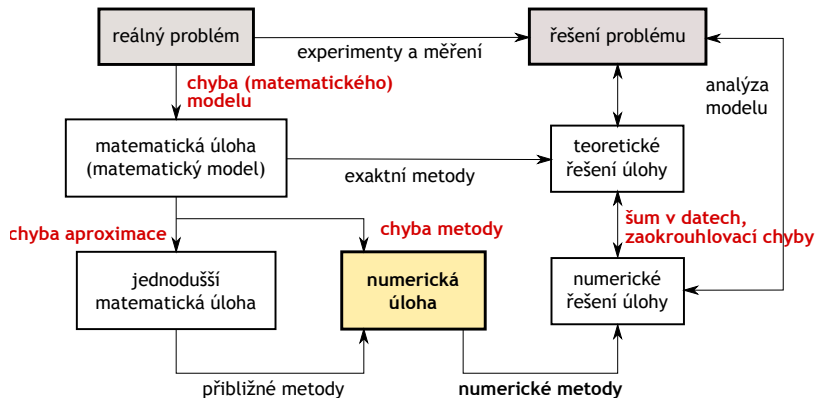
Obsah přednášky

- 1 Úvod do numerické matematiky
- 2 Zobrazení čísel v počítači
- 3 Typy chyb**
Chyby výpočtu
- 4 Typy numerických úloh



Chyby výpočtu

Typy



Chyby výpočtu

Relativní a absolutní chyba

Číslo x v numerickém algoritmu reprezentováno přiblížením \tilde{x}

Definice

Absolutní chybou $\mathcal{A}(x)$ aproximace čísla x číslem \tilde{x} označujeme rozdíl

$$\mathcal{A}(x) = |x - \tilde{x}|$$

Relativní chybou $\mathcal{R}(x)$ aproximace čísla x číslem \tilde{x} označujeme podíl

$$\mathcal{R}(x) = \frac{\mathcal{A}(x)}{|x|} = \left| \frac{x - \tilde{x}}{x} \right|, x \neq 0$$



Chyby výpočtu

Vlastnosti $\mathcal{A}(x)$ a $\mathcal{R}(x)$

Aritmetické operace mohou mít na nepřesné reprezentace čísel devastující vliv (například podíl velkého a malého čísla).

Relativní chyba se vždy výrazně zvětší při odčítání dvou blízkých čísel:

$$\mathcal{R}(x \pm y) = \frac{\mathcal{A}(x \pm y)}{|x \pm y|}$$

Násobení ani dělení nemají na $\mathcal{A}(x)$ a $\mathcal{R}(x)$ výraznější vliv.



Chyby výpočtu

Příklad

Mějme čísla $x_1 = 758320$, $x_2 = 757940$, reprezentována jako $\tilde{x}_1 = 758330$ a $\tilde{x}_2 = 757930$. Platí $\mathcal{A}(x_1) = 10$, $\mathcal{A}(x_2) = 10$,

$$\mathcal{R}(x_1) = \frac{10}{758320} \leq 1,32 \cdot 10^{-5}, \mathcal{R}(x_2) = \frac{10}{757940} \leq 1,32 \cdot 10^{-5}.$$

Odčítání

Máme-li $v = x_1 - x_2 = 380$, bude $\tilde{v} = \tilde{x}_1 - \tilde{x}_2 = 400$. Proto $\mathcal{A}(v) = |v - \tilde{v}| = 20$ a

$$\mathcal{R}(v) = \frac{\mathcal{A}(v)}{|v|} = \frac{20}{380} \leq 0,053.$$

Relativní chyba rozdílu $v = x_1 - x_2$ je o tři řády vyšší.



Obsah přednášky

- 1 Úvod do numerické matematiky
- 2 Zobrazení čísel v počítači
- 3 Typy chyb
- 4 Typy numerických úloh
 - Korektnost úloh
 - Podmíněnost úloh



Matematická úloha

A její formalizace

Mějme dány dva vektorové prostory \mathcal{B}_x (vstupní data) a \mathcal{B}_y (výstupní data).

Definice

Úlohou rozumíme relaci

$$y = U(x), \quad x \in \mathcal{B}_x, y \in \mathcal{B}_y$$

\Rightarrow transformuje posloupnost vstupních dat na posloupnost výsledků.



Korektní úloha

Definice

Definice

Řekneme, že úloha je **korektní**, pokud

- 1 ke každému $x \in \mathcal{B}_x$ existuje jediné $y \in \mathcal{B}_y$,
- 2 řešení spojitě závisí na datech, tedy pokud $x_n \rightarrow x$ a $U(x_n) = y_n$, pak také $y_n \rightarrow y = U(x)$.

Nekorektní úlohy – nejednoznačně řešitelné problémy, intervalové odhady, nevhodná formulace zadání

Příklad

Určete matici **A** splňující rovnici **Ax = b** máte-li dány hodnoty **x** a **b**. Určete $\sqrt{4}$.



Dobře podmíněné úlohy

Definice

Podíl

$$C_p = \frac{\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|}}{\frac{\|\Delta y\|}{\|y\|}}$$

se nazývá číslo podmíněnosti úlohy.

Definice

Budeme říkat, že korektní úloha je **dobře podmíněná**, jestliže malá změna ve vstupních datech vyvolá malou změnu řešení (resp. $C_p \approx 1$).



Taxonomie úloh

