Analýza algoritmů. Složitost.

Matematické algoritmy (K611MA)

Jan Přikryl

6. přednáška K611MA
čtvrtek 4. listopadu 2010

verze: 2010-11-03 16:06

1 Úvod

1.1 Analýza algoritmů

Algoritmy a programy Co je co

Algoritmus:

- myšlenka řešení nějakého problému
- konečný počet kroků řešení
- vyjadřujeme nejčastěji slovně nebo pseudokódem

Program:

- implementace algoritmu ve zvoleném programovacím jazyce

Bez algoritmu nelze napsat program.

Každý problém lze v matematice řešit mnoha různými postupy. Existuje tedy mnoho různých algoritmů, které vedou ke stejnému cíli. Pokud programátor píše program, který bude použit jenom jednou, zvolí patrně řešení, které lze snadno a rychle implementovat. Jaký algoritmus bychom ale měli preferovat v případě, kdy bude zvolený kus kódu používán opakovaně? V takovém případě je třeba posuzovat různá subjektivní hlediska (strozumitelnost kódu, rozšiřitelnost algoritmu na různé typy vstupních dat, přenositelnost na jiné architektury počítačů a efektivitu výpočtu).

Efektivita algoritmu přímo závisí na tom, kolik zvolený algoritmus spotřebovává výpočetních zdrojů, tedy například jak dlouho bude trvat jeho vykonávání pro určitou množinu vstupních dat, kolik bude potřebovat operační paměti, do jaké míry bude využívat diskový subsystém či síťové rozhraní.

Primárním hladiskem posuzování efektivity algoritmu je čas. Uvědomme si ale, že v mnoha případech musí při implementaci docházet k určitým kompromisům – algoritmus může být možné zrychlit pouze za cenu neúměrného zvýšení spotřeby operační paměti. Mnohdy také platí, že implementace velmi efektivních algoritmů jsou mnohem hůře pochopitelné a udržovatelné.

Analýza složitosti algoritmů Proč nás to vlastně zajímá

Ideální kombinace: *efektivní algoritmus + efektivní implementace*

Analýza algoritmu:

- poskytne **předpověď výkonnosti** algoritmu
- je **vhodnější než experimenty**
- umožní výběr **vhodné varianty** řešení

Asymptotická složitost **paměťová** × složitost **časová**

Rychlost vykonávání programu (implentace zvoleného algoritmu) závisí na zvoleném programovacím jazyce, výpočetním výkonu počítače, jeho momentální zátěži či na zvoleném kompilátoru. Přesto bychom rádi znali předem orientační odhad toho, jak efektivní je algoritmus, jenž jsme zvolili k implementaci.

Existují dva základní způsoby, jak si udělat představu o tom, jak se algoritmus chová:

- experimentální ověření chování implementace
- analýza na základě pseudokódu

Analýza složitosti algoritmů (2) Předpověď chování

Analýza efektivity: Identifikace efektivních a neefektivních částí algoritmu umožní soustředit se na ty části, jejichž úprava přinese nejvyšší nárůst výkonu.

Předpověď výkonnosti programu

Velké projekty potřebují apriorní odhad výkonnosti pro daný hardware – je třeba učinit odhad bez znalosti detailů programového kódu.

Identifikace úzkých míst a jejich vhodné ošetření ještě před vlastním naprogramováním.

Analýza složitosti algoritmů (3) Ověření vlastností

Vhodnější než experimenty

Experimenty ověří chování pouze ve vybraných krizových případech – místo „dokázali jsme, že daný algoritmus funguje správně“ lze pouze tvrdit: *„nenalezli jsme způsob, jak prokázat, že algoritmus je špatně“.*

Záruky funkčnosti poskytuje jedině **formální analýza**.

Výběr vhodné varianty

Ne vždy je nejvhodnější varianta ta, jenž je v počtu instrukcí nejefektivnější a tedy nejrychlejší – *např. implementace pro jednočipový počítač* × *pracovní stanice.*

2 Vývojová stádia algoritmu

Ilustrační příklad Fibonacciho posloupnost

Poprvé popsána italským matematikem Leonardem z Pisy, známým také jako Fibonacci (1202).

Růstu populace králíků za poněkud idealizovaných podmínek.

Číslo $F(n)$ popisuje velikost populace po n měsících, předpokládáme-li, že

- první měsíc se narodí jediný pár,
- nově narozené páry jsou produktivní od druhého měsíce svého života,

- každý měsíc zplodí každý produktivní pár jeden další pár,
- králíci nikdy neumírají, nemají predátory.

Ilustrační příklad Stavy populace králíků

Fibonacciho číslo	Stav
$F(1) = 1$	začínáme s jedním párem
$F(2) = 1$	ještě jsou příliš mladí
$F(3) = 2$	tento měsíc již zplodí první potomky
$F(4) = 3$	druhý pár potomků
$F(5) = 5$	první potomci třetí generace

Obecně

$$F(n) = F(n-1) + F(n-2)$$

Jak efektivně zjistit $F(n)$ pro zvolené n?

2.1 Algoritmus pomocí explicitního řešení

Explicitní řešení Přímé vyjádření $F(n)$

Explicitní nerekurzivní vztah pro n-tý člen Fibonacciho posloupnosti je

$$F(n) = \frac{\phi^n - (1-\phi)^n}{\sqrt{5}},$$

kde ϕ je hodnota zlatého řezu,

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}61803398874989\cdots \approx 1{,}618.$$

Algoritmus 1 Přímá varianta výpočtu $F(n)$.

Spočti

$$F(n) = \frac{\phi^n - (1-\phi)^n}{\sqrt{5}}.$$

Analýza Algoritmu 1 Aneb co všechno může dopadnout špatně

Reprezentace čísel v plovoucí řádové čárce má svá omezení. V počítači budeme vztah reprezentovat jako

$$F(n) = \frac{1{,}61803^n - 0{,}61803^n}{2{,}23606}.$$

Jaké budou výsledky?

$F(2) = 1{,}00000$ je v pořádku $F(3) = 1{,}78884$ zaokrouhlíme na 2 $F(20) = 6764{,}69$ ještě zaokrouhlíme na 6765 $F(21) = 10945{,}4$ už zaokrouhlíme na 10945 místo 10946 $F(25) = 75020{,}6$ by mělo být 75025

Existuje přesnější varianta výpočtu?

Algoritmus 2 Varianta výpočtu $F(n)$ rekurzivním algoritmem.

Require: $n \geq 0$
Ensure: $y = F(n)$
1: **if** $n = 0$ **then**
2: $\quad y \Leftarrow 0$
3: **else if** $n \leq 2$ **then**
4: $\quad y \Leftarrow 1$
5: **else**
6: $\quad y \Leftarrow F(n-1) + F(n-2)$
7: **end if**

2.2 Rekurzivní algoritmus

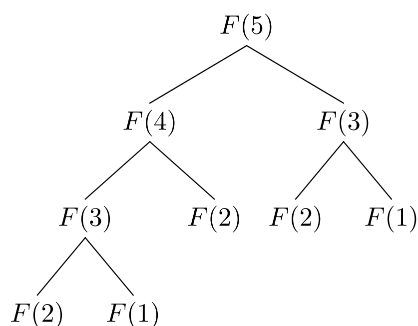
Rekurzivní algoritmus Výpočet podle definice

Hodnoty $F(0)$ až $F(2)$ předpočítáme, zbytek lze s jejich pomocí vyjádřit.

Jak efektivní je daný algoritmus?

Rekurzivní algoritmus Efektivita

Posloupnost výpočtu $F(5)$:



Počet kroků pro $F(n)$ je $\tau(n) = 3 \cdot F(n) - 2$.

2.3 Dynamické programování

Dynamické programování Varianta „shora dolů“

Technika matematické optimalizace.

Dekompozice problému na identické podproblémy.

Dva základní přístupy:

- **shora dolů** – řešíme podproblémy postupně a pamatujeme si řešení
- **zdola nahoru** – vyřešíme všechny potřebné podproblémy a skládáme je

Dynamické programování Varianta „zdola nahoru“

Algoritmus 3 potřebuje pole n prvků pro uchování minulých členů posloupnosti.

Jde to ale i bez něj.

Algoritmus 3 Varianta výpočtu $F(n)$ pomocí dynamického programování přístupem shora dolů.

Require: $n \geq 0$
Ensure: $y = F(n)$

```
1: Alokuj f[1...n]
2: f[0] ⇐ 0
3: f[2] ⇐ f[1] ⇐ 1
4: for i = 3 to n do
5:     f[i] ⇐ f[i − 1] + f[i − 2]
6: end for
7: y ⇐ f[n]
```

Algoritmus 4 Varianta výpočtu $F(n)$ pomocí dynamického programování přístupem zdola nahoru.

Require: $n \geq 0$
Ensure: $y = F(n)$

```
 1: if n = 0 then
 2:     y ⇐ 0
 3: else
 4:     a ⇐ 1, b ⇐ 1
 5:     for i = 3 to n do
 6:         c ⇐ a + b
 7:         a ⇐ b, b ⇐ c
 8:     end for
 9:     y ⇐ b
10: end if
```

2.4 Maticová varianta pomocí opakovaného mocnění

Pro členy Fibonacciho posloupnosti platí také

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix}$$

Použitím opakovaného mocnění snížíme počet kroků na $O(\log n)$.

Důkaz. Indukcí pro $n \to n+1$. Začneme pro $n = 1$, kde platí

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_2 & F_1 \\ F_1 & F_0 \end{bmatrix}$$

a vztah tedy pro $n = 1$ dává korektní výsledek. Za předpokládu, že vztah platí pro n, dostaneme pro $n + 1$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{n+1} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} F_{n+1} + F_n & F_{n+1} \\ F_n + F_{n-1} & F_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{n+2} & F_{n+1} \\ F_{n+1} & F_n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

□

Odvození celého maticového předpisu vychází z teorie dvouprvkových rekurencí a na žádost některých z vás zde uvádím stručný výtah. K dispozici máte volně stažitelnou plnou verzi článku [1], z níž jsem čerpal.

Definice 1 (Množina $\mathcal{R}(a,b)$)**.** Mějme dvojici reálných čísel a a $b \neq 0$ a posloupnost A_n definovanou rekurentním vztahem

$$A_{n+2} = a \cdot A_{n+1} + b \cdot A_n.$$

Potom pro pevné hodnoty parametrů a a b označíme $\mathcal{R}(a,b)$ množinu všech takto parametrizovaných posloupností.

Jedním z význačných prvků $\mathcal{R}(1,1)$ je Fibonacciho posloupnost F s počátečními členy $F_0 = 0$ a $F_1 = 1$.

Definice 2 (Posloupnost A)**.** Všechny prvky posloupnosti $A_0, A_1, A_2, \dots$ tvořící vektor v $\mathbb{R}^\infty$ označíme jako *posloupnost* A.

Definice 3. Operátor *posunu doleva*, označovaný $\lhd$, odstraní z posloupnosti A její nejlevější prvek.

Z původní posloupnosti $A = A_0, A_1, A_2, A_3, \dots$ vznikne posunem doleva o jednu pozici posloupnost $\lhd A = A_1, A_2, A_3, A_4, \dots$.

Studiem vlastností dvouprvkových rekurencí snadno dospějeme k závěru, že vlastnosti rekurencí $A \in \mathcal{R}(a,b)$ jsou zcela určeny volbou A_0 a A_1. Prostor $\mathcal{R}(a,b)$ je proto dvourozměrný a každé $A \in \mathcal{R}(a,b)$ musíme být schopni vyjádřit jako lineární kombinaci dvou bázových posloupností X a Y s prvky $X_0 = 1, X_1 = 0$ a $Y_0 = 0, Y_1 = 1$,

$$X = 1, 0, b, ab, a^2b + b^2, \dots,$$
$$Y = 0, 1, a, a^2 + b, a^3 + 2ab, \dots.$$

Pro všechna $A \in \mathcal{R}(a,b)$ je tedy

$$A = A_0 X + A_1 Y.$$

Všimněte si, že pro $a = 1$ a $b = 1$ je $Y = F$ (půjde o Fibonacciho posloupnost) a také, že

$$\lhd X = b \cdot Y,$$

takže můžeme jakoukoliv posloupnost $A \in \mathcal{R}(a,b)$ psát jako posloupnost členů

$$A_n = A_0 b Y_{n-1} + A_1 Y_n = A_0 b F_{n-1} + A_1 F_n.$$

Operátor posunu doleva lze v $\mathcal{R}(a,b)$ s bázovými prvky X a Y vyjádřit maticí $\mathbf{M}$ jako

$$\lhd \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \mathbf{M}^\mathsf{T} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}.$$

Prvky matice $\mathbf{M}$ jsou dány vztahy

$$\lhd X = b \cdot Y,$$
$$\lhd Y = X + a \cdot Y,$$

a proto

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ b & a \end{bmatrix}.$$

Posloupnost $A \in \mathcal{R}(a,b)$ je v bázi $[X, Y]$ možno zapsat jako

$$A = \begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \end{bmatrix}$$

přičemž pro n-krát posunutou posloupnost bude platit

$$\overset{n}{\lhd} A = \begin{bmatrix} A_n \\ A_{n+1} \end{bmatrix}.$$

Vzhledem k definici transformační matice M je ale také $\lhd^n A = \mathsf{M}^n A$, a proto

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ b & a \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_n \\ A_{n+1} \end{bmatrix}.$$

Pro n-násobné posuny bázové posloupnosti X a Y můžeme psát

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ b & a \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} X_0 \\ X_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} \\ m_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_n \\ X_{n+1} \end{bmatrix},$$

respektive

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ b & a \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} Y_0 \\ Y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{12} \\ m_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_n \\ Y_{n+1} \end{bmatrix},$$

z čehož vyplývá

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ b & a \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_n & Y_n \\ X_{n+1} & Y_{n+1} \end{bmatrix}.$$

Již dříve jsme si všimli, že $Y = F$ (a tedy $Y_n = F_n$) a že $\Lambda X = b \cdot F$ (a tedy $X_n = b \cdot F_{n-1}$). V $\mathcal{R}(a, b)$ bude proto platit

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ b & a \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} b \cdot F_{n-1} & F_n \\ b \cdot F_n & F_{n+1} \end{bmatrix}$$

a v $\mathcal{R}(1, 1)$ ekvivalentně

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} F_{n-1} & F_n \\ F_n & F_{n+1} \end{bmatrix}.$$

Výše uvedený zápis lze pomocí opakovaného mocnění zapsat Algoritmem 5. Hlavní cyklus využívá funkce matpow, kterou definujeme Algoritmus 6.

Algoritmus 5 Algoritmus maticové reprezentace Fibonacciho posloupnosti.

Require: $n \geq 0$
Ensure: $y = F(n)$
1: **if** $n = 0$ **then**
2: $\quad y \Leftarrow 0$
3: **else**
4: $\quad \mathbf{M} \Leftarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
5: $\quad \mathbf{M} \Leftarrow \text{matpow}(\mathbf{M}, n-1)$
6: $\quad y \Leftarrow M[0, 0]$
7: **end if**

Algoritmus 6 Algoritmus opakovaného mocnění matic.

Require: $n \geq 0, \mathbf{A}[2 \times 2]$
Ensure: $\mathbf{B} = \text{matpow}(\mathbf{A}, n)$
1: **if** $n > 1$ **then**
2: $\quad \mathbf{B} \Leftarrow \text{matpow}(\mathbf{A}, n/2)$
3: $\quad \mathbf{B} \Leftarrow \mathbf{BA}$
4: **end if**
5: **if** n je liché **then**
6: $\quad \mathbf{B} \Leftarrow \mathbf{A} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
7: **end if**

Porovnání variant Vlastnosti jednotlivých algoritmů

Algoritmus	Paměťové nároky	Časová složitost
1	$O(1)$	$O(\log N)$
2	$O(N)$	$O(F(N))$
3	$O(N)$	$O(N)$
4	$O(1)$	$O(N)$
5	$O(\log N)$	$O(\log N)$

3 Asymptotická složitost

Asymptotická složitost Velká $\mathcal{O}$ notace

Jakým způsobem se bude chování algoritmu měnit v závislosti na velikosti (počtu, objemu) vstupních dat?

Dva základní typy:

- **časová složitost** – vliv na dobu výpočtu
- **paměťová složitost** – nároky na operační paměť

Značíme:

- $\mathcal{O}(N)$ – lineární složitost,
- $\mathcal{O}(N^2)$ – kvadratická složitost,
- $\mathcal{O}(\log N)$ – logaritmická složitost.

Složitost $\mathcal{O}(N)$ znamená lineárně rostoucí nároky, $\mathcal{O}(N) \sim k \cdot N + q$ pro nějaká $k, n \in \mathbb{N}$, pro $\mathcal{O}(1)$ jsou nároky konstantní, $O(1) \sim q$.

Asymptotická složitost Velká $\mathcal{O}$ notace

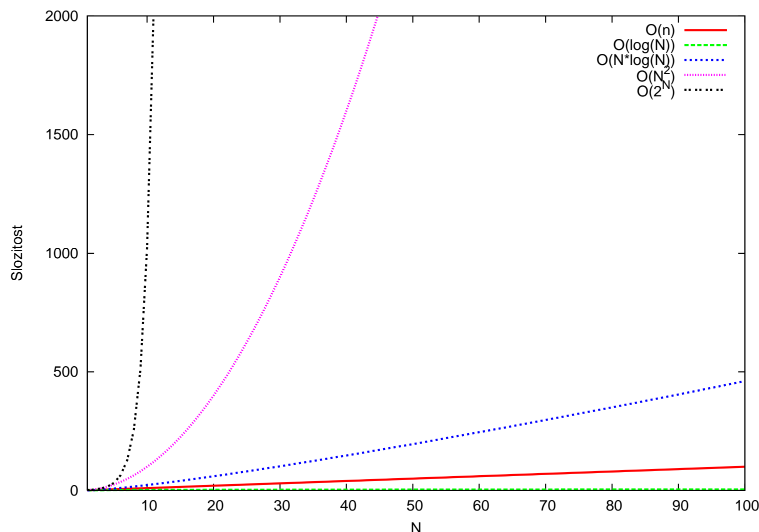
Vliv asymptotické časové složitosti

Pro $O(N^2)$ má zdvojnásobení objemu vstupních dat za následek čtyřnásobnou dobu vykonávání algoritmu. Pro $O(\log N)$ může mít čtyřnásobný počet dat na vstupu za následek dvojnásobnou dobu vykonávání algoritmu. Pro $O(1)$ je doba vykonávání algoritmu nezávislá na velikosti vstupu.

Vliv asymptotické paměťové složitosti

Pro $O(N)$ má zdvojnásobení velikosti vstupu za následek dvojnásob vysoké nároky na operační paměť. Pro $O(2^N)$ čtyřnásobná velikost vstupu zosminásobí paměťové nároky.

Asymptotická složitost Obrázek



4 NP-úplné problémy

Jistě jste už někde slyšeli či četli, že nějaký matematický problém je **NP-úplný** (angl. *NP-complete*, v češtině se někdy také používá označení NP-složitý). Podívejme se na závěr této přednášky krátce na to, co tento termín znamená a proč je z hlediska algoritmů tak důležitý. Detailnější pohled na celý problém lze nalézt například v poznámkách prof. Demlové na FEL [2].

Rozhodovací úlohy, třída $\mathcal{P}$

Jako **rozhodovací úlohu** označujeme úlohu, jejímž řešením jsou výroky „ANO“ respektive „NE“. Jako výstup v případě počítače můžeme uvažovat hodnoty `true` a `false` nebo 1 a 0.

Běžné úlohy v matematice lze snadno převést na rozhodovací úlohy. Například hledání nejkratší cesty v ohodnoceném grafu lze převést na rozhodovací úlohu „Lze v grafu najít cestu, jejíž délka je menší, než nějaké c?“

Definice 4. Rozhodovací úloha L náleží do třídy $\mathcal{P}$, pokud existuje deterministický Turingův stroj, který tuto úlohu rozhodne v polynomiálním čase.

Příklady rozhodovacích úloh v třídě $\mathcal{P}$

Minimální kostra grafu – existuje kostra s ohodnocením menším, než c?

Nejkratší cesta v grafu – existuje cesta mezi dvěma uzly s ohodnocením menším, než c?

Lineární programování – existuje $\arg\max_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{w}^\top \boldsymbol{x} > c$ za daných omezujících podmínek?

Komprese dat (LZW) – přidá komprese řetězce s do slovníku slovo t?

Třída $\mathcal{NP}$

Definice 5. Rozhodovací úloha L náleží do třídy $\mathcal{NP}$, pokud existuje nedeterministický Turingův stroj, který tuto úlohu rozhodne v polynomiálním čase.

Nederministický Turingův stroj: vstupům může odpovídat více, než jedna jediná akce (sekvence $\Rightarrow$strom). Jeho chování si lze představit tak, že v každém přechodu může dojít k naklonování několika kopií stroje se stejnou historií, ale jiným cílovým stavem daného přechodu. Výsledkem provádění důkazu

rozhodovací úlohy je potom neustále se rozšiřující strom možností, z nichž v určitém čase jedna povede k cíli.

Platí $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{NP}$. Pokud použijeme nedeterministický Turingův stroj v takové konfiguraci, že v každém přechodu nedojde k naklonování žádné kopie, stroj bude vlastně deterministický a jsme v třídě $\mathcal{P}$.

Příklady rozhodovacích úloh v třídě $\mathcal{NP}$

Všechny úlohy třídy $\mathcal{P}$.

Izomorfismus grafu – lze dané dva grafy nakreslit stejně?

Faktorizace čísel – pro dané n a k, existuje $f : 1 < f < k, f|n$?

Všechny NP-úplné úlohy.

Třída NP-úplných úloh

Třída NP-úplných problémů je třídou rozhodovacích úloh, pro něž platí následující definice:

Definice 6. Rozhodovací úloha L je NP-úplná, pokud náleží do třídy $\mathcal{NP}$a zároveň jde o úlohu NP-těžkou

Co to znamená:

- Jakékoliv řešení L lze ověřit v polynomiálním čase
- Jakýkoliv problém z třídy NP lze převést na L transformací vstupů opět v polynomiálním čase

Tyto typy úloh umíme řešit pouze *přibližně*!

Základním úskalím NP-úplných úloh je to, že je sice možné rychle (tedy v polynomiálním čase) ověřit, zda zadané řešení úlohy platí, není ale známý žádný efekltivní způsob, jak toto řešení pro dané vstupy najít. Tento paradox je jednou z nejvýznamnějších vlastností této třídy úloh: Pro NP-úplnou úlohu není znám algoritmus, jenž by dokázal dostatečně rychle najít její řešení. Čas, potřebný k vyřešení takové úlohy jakýmkoliv v současné době známým algoritmem roste velmi rychle spolu s tím, jak roste „velikost“ řešeného problému (například počet cifer faktorizovaného čísla). Doba řešení takových úloh v současné době známými algortimy dosahuje i pro rozumně velké rozsahy vstupních data klidně miliónů let bez ohledu na to, jak roste výpočetní výkon současných počítačů.

Příklady NP-úplných problémů

Problém batohu – lze zabalit batoh tak, aby jeho hmotnost nepřesáhla m a cena věcí byla alespoň c? Vlastní problém lze možná lépe popsat takto: pokud mám množinu $\mathscr{A}$ obsahující N předmětů o hmotnosti μ a ceně γ, existuje $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{A}$ taková, že

$$\sum_{j \in \mathscr{B}} \mu_j \leq m \text{ a zároveň } \sum_{j \in \mathscr{B}} \gamma_j \geq c?$$

Problém obchodního cestujícího – existuje v grafu hamiltonovská kružnice o délce nejvýše c? *Hamiltonovská kružnice* v grafu prochází právě jednou všemi jeho vrcholy, stejně tak jako si přejeme, aby náš obchodní cestující navštívil každé město právě jednou.

Obarvení grafu – lze uzly daného grafu obarvit nejvýše c barvami tak, aby sousedící uzly neměly stejnou barvu?

Problém čínského listonoše (pouze na smíšeném grafu) – existuje v grafu eulerovská kružnice o délce nejvýše c? *Eulerovská kružnice* v grafu prochází právě jednou všechny hrany, stejně tak, jako pošťák musí projet všechny ulice, z nichž některé jsou jednosměrné.

Reference

[1] Kalman, D. – Mena, R.: The Fibonacci Numbers—Exposed. Mathematics Magazine, vol. 76, no. 3, 2003, pp. 167–181. Preprint dostupný na WWW: http://www.american.edu/cas/mathstat/People/kalman/pdffiles/fibpaper.pdf (staženo 18.11.2008).

[2] Demlová, M: Teroie algoritmů – stručný obsah přednášek. ČVUT FEL, Katedra matematiky, 2010. Dostupné na WWW: http://math.feld.cvut.cz/demlova/teaching/tal/predn_tal.html (staženo 30.10.2010).