Modelování systémů a procesů

prof. Miroslav Vlček

31. března 2011

Obsah

Obsah

Obsah

Obsah

Zpětná Laplaceova transformace-definice

Již jsme si řekli, zpětná Laplaceova transformace má tvar integrálu podél křivky v komplexní rovině p

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(p) e^{pt} dp \equiv \mathcal{L}^{-1}\left[F(p)\right].$$

Pro racionální lomené funkce v proměnné p budeme postupovat jinak.

Jak na to?

$f(t) \Rightarrow$	$\Leftarrow \quad F(p)$
$e^{-\alpha t}$	$\dfrac{1}{p+\alpha}$
$e^{-\alpha t}\cos\omega t$ $= \dfrac{e^{-(\alpha-\imath\omega)t}+e^{-(\alpha+\imath\omega)t}}{2}$	$\dfrac{p}{(p+\alpha)^2+\omega^2}$ $= \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{p+\alpha-\imath\omega}+\dfrac{1}{p+\alpha+\imath\omega}\right)$
$e^{-\alpha t}\sin\omega t$ $= \dfrac{e^{-(\alpha-\imath\omega)t}-e^{-(\alpha+\imath\omega)t}}{2\imath}$	$\dfrac{\omega}{(p+\alpha)^2+\omega^2}$ $= \dfrac{1}{2\imath}\left(\dfrac{1}{p+\alpha-\imath\omega}-\dfrac{1}{p+\alpha+\imath\omega}\right)$

Zpětná Laplaceova transformace

O racionální lomené funkci $\dfrac{Q(p)}{N(p)}$ říkáme, že má nulové body $p_{0\nu}$, jestliže $Q(p_{0\nu}) = 0$ a že má póly $p_{\infty\mu}$, jestliže $N(p_{\infty\mu}) = 0$.

Pokud má funkce $\dfrac{Q(p)}{N(p)}$ jednoduché póly, potom

$$N(p) = \prod_{\mu=1}^{n} (p - p_{\infty\mu}) = (p - p_{\infty 1})(p - p_{\infty 2}) \dots (p - p_{\infty n}).$$

Zpětná Laplaceova transformace

Příklad a) Jestliže

$$N(p) = p^3 + 3p^2 + 6p + 4 = (p+1)(p^2 + 2p + 4)$$

určete rozklad na kořenové činitele.

Je samozřejmě

$$N(p) = (p+1)(p^2+2p+4) = (p+1)(p+1+\imath\sqrt{3})(p+1-\imath\sqrt{3})$$

takže platí

$$N(p) = \prod_{\mu=1}^{3}(p - p_\mu) = (p - p_1)(p - p_2)(p - p_3).$$

Zpětná Laplaceova transformace

Póly v tomto případě jsou

$$\begin{aligned} p_1 &= -1 \\ p_2 &= -1 - \imath\sqrt{3} \\ p_3 &= -1 + \imath\sqrt{3} \end{aligned}$$

a platí $N(p_1) \equiv N(-1) = 0$ atd.

Z tohoto příkladu plyne první krok, který musíme při zpětné Laplaceově transformaci provést: nalezení kořenů polynomu ve jmenovateli racionální funkce $N(p)$

Zpětná Laplaceova transformace

Rozklad racionální lomené funkce na parciální zlomky má tvar

$$\begin{aligned}\frac{Q(p)}{N(p)} &= \sum_{\mu=1}^{n} \frac{k_\mu}{p - p_{\infty\mu}} \\ &= \frac{k_1}{p - p_{\infty 1}} + \frac{k_2}{p - p_{\infty 2}} + \cdots + \frac{k_n}{p - p_{\infty n}} \\ &\equiv \frac{k_1}{p - p_1} + \frac{k_2}{p - p_2} + \cdots + \frac{k_n}{p - p_n},\end{aligned}$$

kde k_μ se nazývají residua...

Zpětná Laplaceova transformace

... a platí

$$
\begin{aligned}
k_\mu &= \lim_{p \to p_{\infty\mu}} (p - p_{\infty\mu}) \frac{Q(p)}{N(p)} \\
&= Q(p_{\infty\mu}) \lim_{p \to p_{\infty\mu}} (p - p_{\infty\mu}) \frac{1}{N(p)} \\
&= Q(p_{\infty\mu}) \lim_{p \to p_{\infty\mu}} \frac{1}{\dfrac{N(p)}{p - p_{\infty\mu}}} \\
&= Q(p_{\infty\mu}) \frac{1}{N'(p_{\infty\mu})}
\end{aligned}
$$

Zpětná Laplaceova transformace

Pro jednoduchost budeme dále psát $p_{\infty\mu} \to p_\mu$. Protože platí

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p-\alpha}\right] = e^{\alpha t},$$

dostaneme

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{Q(p)}{N(p)}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\sum_{\mu=1}^{n}\frac{k_\mu}{p-p_\mu}\right] = \sum_{\mu=1}^{n} k_\mu e^{p_\mu t}.$$

Zpětná Laplaceova transformace

Tím jsme dokázali tzv. Heavisideův vzorec pro zpětnou transformaci racionální lomené funkce s jednoduchými póly

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{Q(p)}{N(p)}\right] = \sum_{\mu} \frac{Q(p_\mu)}{N'(p_\mu)} e^{p_\mu t}$$

Zpětná Laplaceova transformace - jak na to?

Jestlže $N(p) = (p - p_1)^{\beta_1}(p - p_2)^{\beta_2} \dots (p - p_n)^{\beta_n}$ má násobné kořeny s násobností β_i, musíme předchozí postup modifikovat, protože platí

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}\left[e^{-\alpha t}\right] &= \frac{1}{p+\alpha} \\
\mathcal{L}\left[te^{-\alpha t}\right] &= \frac{1!}{(p+\alpha)^2} \\
\mathcal{L}\left[t^2e^{-\alpha t}\right] &= \frac{2!}{(p+\alpha)^3} \\
&\vdots \\
\mathcal{L}\left[t^ne^{-\alpha t}\right] &= \frac{n!}{(p+\alpha)^{n+1}}
\end{aligned}
$$

Zpětná Laplaceova transformace - násobné póly

Je zřejmé, že v inverzní transformaci hrají výsadní roli póly racionální lomené funkce. Proto se v dalším můžeme zabývat pouze takovými racionálně lomenými funkcemi, jejichž čitatel je jednotkový

$$H(p) = \frac{1}{N(p)}.$$

Jestliže tedy

$$N(p) = (p - p_1)^{\beta_1}(p - p_2)^{\beta_2} \dots (p - p_n)^{\beta_n}$$

má násobné kořeny, potom inverzní Laplaceova transformace má tvar...

Zpětná Laplaceova transformace - násobné póly

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{N(p)}\right] = & \, e^{p_1 t}\left[k_1^{(1)} + k_1^{(2)}\frac{t}{1!} + \ldots k_1^{(\beta_1)}\frac{t^{\beta_1-1}}{(\beta_1-1)!}\right] \\
& + e^{p_2 t}\left[k_2^{(1)} + k_2^{(2)}\frac{t}{1!} + \ldots k_2^{(\beta_2)}\frac{t^{\beta_2-1}}{(\beta_2-1)!}\right] \\
& \vdots \\
& + e^{p_n t}\left[k_n^{(1)} + k_n^{(2)}\frac{t}{1!} + \ldots k_n^{(\beta_n)}\frac{t^{\beta_n-1}}{(\beta_n-1)!}\right]
\end{aligned}
$$

Zpětná Laplaceova transformace - násobné póly

Koeficienty $k_{\mu}^{(\beta_m)}$ můžeme získat následujícím postupem.

Nechť například

$$N(p) = (p-2)^2(p+5)(p+7).$$

Rozklad na parciální zlomky hledáme ve tvaru

$$\frac{1}{(p-2)^2(p+5)(p+7)} = \frac{k_1^{(2)}}{(p-2)^2} + \frac{k_1^{(1)}}{p-2} + \frac{k_2}{p+5} + \frac{k_3}{p+7}$$

Zpětná Laplaceova transformace - násobné póly

Vynásobíme rovnici členem $(p-2)^2$

$$\frac{(p-2)^2}{(p-2)^2(p+5)(p+7)}$$
$$=k_1^{(2)}+k_1^{(1)}(p-2)+\frac{k_2(p-2)^2}{p+5}+\frac{k_3(p-2)^2}{p+7}$$

a nalezneme limitu pro $p\to 2$,

$$\frac{1}{(2+5)(2+7)}=k_1^{(2)}$$

Zpětná Laplaceova transformace - násobné póly

Odečteme-li výraz $\dfrac{1}{63(p-2)^2}$ od obou stran původní rovnice dostáváme

$$\frac{1}{(p-2)^2(p+5)(p+7)} - \frac{1}{63(p-2)^2}$$
$$= \frac{k_1^{(1)}}{p-2} + \frac{k_2}{p+5} + \frac{k_3}{p+7}$$

resp. rovnici

$$\frac{1}{63}\left[\frac{-(p+14)}{(p-2)(p+5)(p+7)}\right] = \frac{k_1^{(1)}}{p-2} + \frac{k_2}{p+5} + \frac{k_3}{p+7},$$

Zpětná Laplaceova transformace - násobné póly

pro kterou se výpočet k_μ redukuje na případ s jednoduchými póly a platí

$$\begin{aligned} k_1^{(1)} &= -\frac{2^4}{7^2 \times 9^2}\,, \\ k_2 &= \frac{1}{2 \times 7^2}\,, \\ k_3 &= -\frac{1}{2 \times 9^2}\,. \end{aligned}$$

Laplaceova transformace - příklad 1

Příklad 1

Uvažujme lineární spojitý systém, který je posaný diferenciální rovnicí

$$\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + 2y(t) = 5u(t),$$

kde $u(t) = 1(t)$ je jednotkový skok a počáteční stav systému je dán hodnotami $y(t)$ a $\dot{y}(t)$ v čase $t = 0$, tj. $y(0) = -1$ a $\dot{y}(0) = 2$.

Máme nalézt řešení $y(t)$.

Laplaceova transformace - příklad 1

Po Laplaceově transformaci diferenciální rovnice dostaneme algebraickou rovnici

$$p^2Y(p) - py(0) - \dot{y}(0) + 3pY(p) - 3y(0) + 2Y(p) = \frac{5}{p}.$$

S použitím počátečních podmínek nalezneme řešení algebraické rovnice ve tvaru

$$Y(p) = \frac{5 - p - p^2}{p(p+1)(p+2)}.$$

Laplaceova transformace - příklad 1

Rozložíme racionální lomenou funkci na parciální zlomky

$$Y(p) = \frac{5}{2p} - \frac{5}{p+1} + \frac{3}{2(p+2)}.$$

Hledané řešení je pro $t \geq 0$

$$y(t) = \frac{5}{2} - 5e^{-t} + \frac{3}{2}e^{-2t}.$$

První člen odpovídá ustálenému stavu, další dva členy popisují přechodový děj.

Obecné řešení diferenciální rovnici druhého řádu

Příklad 2

Diferenciální rovnici

$$\ddot{y}(t) + 2a\dot{y}(t) + (a^2 + b^2)y(t) = u(t)$$

s počátečními podmínkami ve tvaru

$$y(0) = c_1 \quad \text{a} \quad \dot{y}(0) = c_2,$$

řešíme pomocí Laplaceovy transformace.

Obecné řešení diferenciální rovnici druhého řádu

Protože platí

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left(\frac{d}{dt}y(t)\right) &= pY(p) - y(0) \\ \mathcal{L}\left(\frac{d^2}{dt^2}y(t)\right) &= p^2Y(p) - py(0) - \dot{y}(0) \end{aligned}$$

nalezneme Laplaceovou transformací diferenciální rovnice její algebraický tvar

$$p^2Y(p) - py(0) - \dot{y}(0) + 2a(pY(p) - y(0)) + (a^2 + b^2)Y(p) = U(p).$$

Obecné řešení diferenciální rovnici druhého řádu

Vyřešíme předchozí rovnici vzhledem k obrazu výstupní veličiny Y(p) a dostáváme

$$\left(p^2 + 2ap + (a^2 + b^2)\right) Y(p) = U(p) + py(0) + \dot{y}(0) + 2ay(0)$$

nebo

$$\boxed{Y(p) = \frac{U(p) + c_2 + (p + 2a)c_1}{(p + a + ib)(p + a - ib)}}$$

Obecné řešení diferenciální rovnici druhého řádu

Přenosová funkce $H(p)$ je definována jako podíl obrazu výstupu k obrazu vstupu $\dfrac{Y(p)}{U(p)}$ pro nulové počáteční podmínky a tedy

$$\boxed{H(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{1}{(p+a+ib)(p+a-ib)}}$$

Obecné řešení diferenciální rovnici druhého řádu

Impulsní odezvu určíme jako zpětnou Laplaceovu transformaci přenosové funkce a platí

$$\boxed{\mathcal{L}^{-1}(H(p)) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(p+a)^2+b^2}\right) = \frac{1}{b}e^{-at}\sin bt}$$

Obecné řešení diferenciální rovnici druhého řádu

Přechodovou odezvu $s(t)$ určíme zpětnou Laplaceovu transformaci $s(t) = \mathcal{L}^{-1}(H(p)\dfrac{1}{p})$ a platí

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p((p+a)^2+b^2)}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{a^2+b^2}\left[\frac{1}{p} - \frac{p+2a}{(p+a)^2+b^2}\right]\right) =$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{a^2+b^2}\left[\frac{1}{p} - \frac{p+a}{(p+a)^2+b^2} - \frac{a}{(p+a)^2+b^2}\right]\right)$$

$$= \frac{1}{a^2+b^2}\left[1 - e^{-at}\cos bt - \frac{a}{b}e^{-at}\sin bt\right] .$$

Obecné řešení diferenciální rovnici druhého řádu

Přechodovou odezvu $s(t)$ určíme zpětnou Laplaceovu transformaci

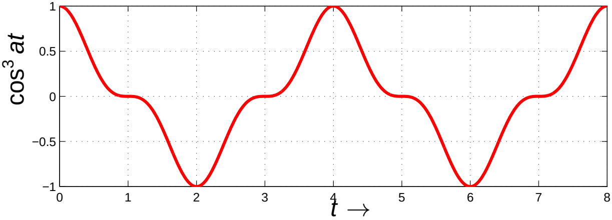
$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{a^2+b^2}\left[\frac{1}{p}-\frac{p+2a}{(p+a)^2+b^2}\right]\right)=$$

$$\frac{1}{a^2+b^2}\left[1-e^{-at}\cos bt-\frac{a}{b}e^{-at}\sin bt\right]$$

Zpětná Laplaceova transformace - příklad 3

Ukažte, že

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{p(p^2+7a^2)}{(p^2+a^2)(p^2+9a^2)}\right] = \cos^3 at$$



Obrázek: Průběh funkce $\cos^3 at$ pro $a = \pi/2$.

Zpětná Laplaceova transformace - příklad 3

Použijeme-li vztah

$$\cos 3at = 4\cos^3 at - 3\cos at\,,$$

máme podle tabulek

$$\mathcal{L}\left[4\cos^3 at\right] = \mathcal{L}\left[\cos 3at + 3\cos at\right] = \frac{p}{p^2+9a^2} + \frac{3p}{p^2+a^2}\,,$$

který snadno upravíme do tvaru

$$\frac{p}{p^2+9a^2} + \frac{3p}{p^2+a^2} = p\frac{3p^2+27a^2+p^2+a^2}{(p^2+a^2)(p^2+9a^2)} = 4p\frac{p^2+7a^2}{(p^2+a^2)(p^2+9a^2)}.$$

QED


Don't
switch!