Linearita, časová invariance a kauzalita

prof. RNDr. Miroslav Vlček, DrSc.

9. března 2006

Základní diskrétní signály

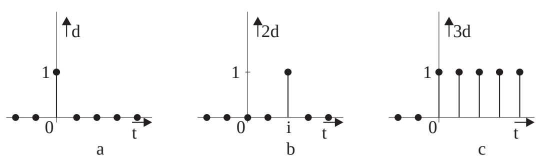
Vznik diskrétních signálů

- *přirozeně* např. průměrné denní teploty, denní kurzy, počty studentů
- *vzorkováním spojitých signálů* např. naměření teploty každou hodinu, měřením průtoku

Diskrétní jednotkový impuls je v diskrétní oblasti definován vztahem:

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & \text{pro } n = 0 \\ 0 & \text{pro } n \neq 0\,. \end{cases} \tag{1}$$

Jednotkový skok je v diskrétní oblasti značen $1(n)$



Obrázek 1: Diskrétní signály a) jednotkový impuls, b) posunutý jednotkový impuls, c) jednotkový skok.

a definován vztahem

$$1(n) = \begin{cases} 1 & \text{pro } n \geq 0 \\ 0 & \text{pro } n < 0 \end{cases} \tag{2}$$

Funkci jednotkového skoku používáme při popisu kauzálního systému nebo při definici diskrétní posloupnosti pro $n > 0$.

Pokud spojitý sinusový signál $f(t) = \sin \omega t$ s periodou $T = 2\pi/\omega$ vzorkujeme s periodou $T_0 > 0$, získáme diskrétní sinusový signál

$$f[n] = f(nT) = \sin \omega n T_0\,, \tag{3}$$

kde $n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots$ Diskrétní signál $f(n)$ je periodický, jestliže existuje kladné celé číslo N takové, že platí

$$f(n) = f(n+N) = f(n+2N) = \ldots = f(n+kN) \tag{4}$$

pro všechna n z intervalu $(-\infty,\ \infty)$ a pro libovolné celé k.Potom N se nazývá perioda diskrétního signálu. Spojitá sinusovka $\sin \omega t$ je periodická pro libovolné ω. Vzorkovaná sinusová posloupnost však nemusí být nutně periodická pro každé ω a pro každou vzorkovací periodu T_0. Funkce $\sin \omega n T_0$ je periodická jen tehdy, pokud existuje celé číslo k, pro které

$$N = \frac{2k\pi}{\omega T_0} \tag{5}$$

je celé kladné číslo.

Vstup a výstup

Odezvu systému na jednotkový impuls $\delta(n)$ budeme nazývat impulsní odezvou a pro obecný popis systémové funkce $\mathcal{T}\,[*]$ platí

$$h(n) = \mathcal{T}\,[\delta(n)] \qquad \& \qquad h(n,m) = \mathcal{T}\,[\delta(n-m)]\,. \tag{6}$$

Jednotkový skok $1(n)$ je posloupnost jedniček od počátku časové osy $n = 0$, kterou můžeme zapsat pomocí součtu

$$\begin{aligned} 1(n) = \sum_{m=0}^{n} \delta(n-m) = & \\ = \delta(n) + \delta(n-1) + \delta(n-2) + \ldots\,, & \end{aligned} \tag{7}$$

Odezva systému na jednotkový skok $1(n)$ se nazývá přechodová odezva $s(n)$ a platí

$$\begin{aligned} s(n) &= \mathcal{T}\,[1(n)] = \mathcal{T}\left[\sum_{m=0}^{n} \delta(n-m)\right] \\ &= \sum_{m=0}^{n} \mathcal{T}\,[\delta(n-m)] \\ &= \sum_{m=0}^{n} h(n,m)\,. \end{aligned} \tag{8}$$

Postupná úprava rovnice (8) je umožněna právě díky **linearitě systému**, kterou budeme studovat pro obecný vstupní signál

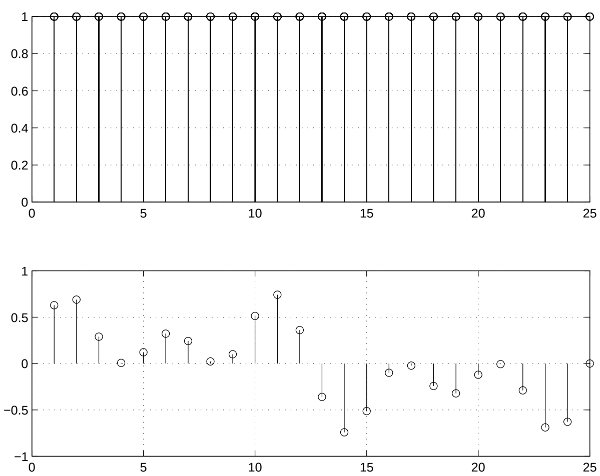
$$x(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\delta(n-m)\,. \qquad (9)$$

Na obrázku 1 je podrobně znázorněna souvislost mezi posloupností jedniček, které tvoří bázi pro diskrétní signály, jehož každá komponenta je vyjádřena součinem $x(m)\delta(n-m)$. Příklad posloupnosti příslušné jednotkovému skoku

$$1(n) = \sum_{m=0}^{25} \delta(n-m)$$

a odpovídající posloupnost konečného signálu

$$x(n) = \sum_{m=0}^{25} x(m)\delta(n-m)$$



Obrázek 2: Posloupnost jednotkového skoku $1(n)$ a příslušná posloupnost signálu $x(n)$

Lineární a nelineární

Řekli jsme si, že systém není nic jiného, než černá skříňka *black box*, kterou se velmi často pokoušíme nejprve identifikovat a poté reprodukovat. Při identifikaci se nejprve ptáme, zda se jedná o systém **lineární**, potom pro vstupní $x(n)$ a výstupní $y(n)$ signál platí **princip superpozice**

$$\begin{aligned} y(n) &= \mathcal{T}\left[x(n)\right] = \mathcal{T}\left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\delta(n-m)\right] \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\mathcal{T}\left[\delta(n-m)\right] \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n,m) \qquad (10) \end{aligned}$$

- *Příklad lineárního systému*
  Kombinace dvou různých vstupních signálů $x(n) = a_1x_1(n) + a_2x_2(n)$

$$\begin{aligned} a_1\left[y_1(n) + ay_1(n-1)\right] &= a_1x_1(n) \\ a_2\left[y_2(n) + ay_2(n-1)\right] &= a_2x_2(n) \qquad (11) \end{aligned}$$

  dává lineární kombinaci výstupních signálů a pro $y(n) = a_1y_1(n) + a_2y_2(n)$ platí

$$y(n) + ay(n-1) = x(n)\,. \qquad (12)$$

- *Příklad nelineárního systému - numerický výpočet odmocniny*

$$y(n) = \frac{1}{2}\left[y(n-1) + \frac{x(n-1)}{y(n-1)}\right]. \qquad (13)$$

  Odmocnina z čísla 10 je s přesností na 10 desetinných míst rovna $\sqrt{10} = 3.16227766017$. Pro $x(n-1) \equiv x(0) = 10$ dostáváme postupně

$$\begin{array}{ll} y(1) = 3 & y^2(1) = 9 \\ y(2) = 3.165 & y^2(2) = 10.017225 \\ y(3) = 3.162278 & y^2(3) = 10.00000214928 \\ y(4) = 3.1622776601 & y^2(3) = 9.999999999568 \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

Časově invariantní, stacionární, konvoluce

Pokud se jedná o systém **časově invariantní**, jsou všechny události v čase závislé pouze na časovém intervalu (rozdílu časových událostí) $n-m$, nikoliv na každém časovém okamžiku n a m samostatně.

$$\begin{array}{lrcl} \text{dneska}\ldots & y(n) &=& \mathcal{T}\left[x(n)\right] \\ \text{včera}\ldots & y(n-1) &=& \mathcal{T}\left[x(n-1)\right] \qquad (14) \\ & & \vdots & \end{array}$$

potom také rovnice (6) pro impulsní odezvu přejde z maticového tvaru na prostý vektorový zápis

$$h(n,m) \to h(n-m) = \mathcal{T}\left[\delta(n-m)\right]. \qquad (15)$$

V důsledku časové invariance dostáváme z rovnice (10) **konvoluční sumu**

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(n-m)x(m) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k)\,, \qquad (16)$$

která bývá občas značená

$$y(n) = h(n) * x(m) = x(n) * h(n)\,. \qquad (17)$$

- *Příklad časově invariantního systému*
  Uvažujme mikroekonomický systém variace ceny popsaný diferenční rovnici
  $$y(n) + ay(n-1) = x(n)\,. \tag{18}$$
  Protože její koeficienty nezávisí na čase, tj. a není funkcí n, zachovává tato rovnice tvar při záměně $n \to n-m$ tvar. Impulsní odezva je potom
  $$h(n) = (-a)^n 1(n) \tag{19}$$
  Pokud se budeme ptát na přechodovou odezvu, obdržíme
  $$\begin{aligned} s(n) &= \sum_{m=0}^{n} h(n-m) = \sum_{k=0}^{n} h(k) \\ &= 1(n)\sum_{k=0}^{n}(-a)^k = 1(n)\frac{1-(-a)^{n+1}}{1-(-a)} \end{aligned} \tag{20}$$
- *Příklad časově proměnného systému*
  Uvažujme diferenční rovnici
  $$y(n) + ny(n-1) = x(n)\,. \tag{21}$$
  Protože koeficient u $y(n-1)$ závisí na čase, nezachovává tato rovnice tvar při záměně $n \to n-m$ tvar. Impulsní odezva je potom
  $$h(n) = (-1)^n n! 1(n) \tag{22}$$

Kauzální, příčinný systém
Výstupní signál $y(n)$ kauzální systému závisí pouze na současných a minulých hodnotách vstupního signálu $\{x(n), x(n-1), x(n-2), \ldots\}$ takže v konvoluční sumě (16)

$$\begin{aligned} y(n) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{-1} h(k)x(n-k) + \sum_{k=0}^{\infty} h(k)x(n-k) \end{aligned} \tag{23}$$

musíme položit všechny členy impulsní odezvy $h(k) = 0$ pro $k < 0$. Konvoluční suma pro lineární, časově invariantní a kauzální systém má tvar

$$y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)x(n-k)\,. \tag{24}$$

V mnoha případech z reálného prostředí máme jednoznačně definovaný počátek pozorování. Jestliže tedy budeme uvažovat vstupní a výstupní signály, které jsou nulové pro $n \le 0$ a $x(n) \neq 0, y(n) \neq 0$ pouze pro $n \ge 0$, potom platí

$$y(n) = \sum_{k=0}^{n} h(k)x(n-k) = \sum_{k=0}^{n} x(k)h(n-k)\,. \tag{25}$$

Lineární časově invariantní kauzální analogový systém
Podobně můžeme postupovat v analogovém případě a odvodit pro lineární časově invariantní systém konvoluční integrál

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau\,. \tag{26}$$

Uvedený integrál opět nazýváme konvolucí a velmi často ho označujeme jako

$$y(t) = h(t) * x(t)\,. \tag{27}$$

Funkce $h(t)$ se nazývá impulsní odezva. Jedná se o výstupní signál filtru, na jehož vstupu se uplatní Diracův impuls $x(t) = \delta(t)$. Platí totiž

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\delta(t-\tau)d\tau = h(t)\,. \tag{28}$$

Z důvodů kauzality, která vyjadřuje zachování příčinné posloupnosti událostí při transformaci signálu ze vstupu na výstup, požadujeme

$$h(t) \neq 0 \quad \text{pro } t \ge 0\,, \tag{29}$$
$$h(t) = 0 \quad \text{pro } t < 0\,. \tag{30}$$

Potom přirozeně můžeme konvoluční integrál (26) psát ve tvaru

$$y(t) = \int_{0}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau\,. \tag{31}$$