Stavové rovnice spojitých a diskrétních systémů

prof. RNDr. Miroslav Vlček, DrSc.

16. března 2006

Spojitý stavový sytém	**Diskrétní stavový systém**
$\mathbf{u}(t)$ ... vstupní (řídící) vektor $\mathbf{x}(t)$ ... stavový vektor $\mathbf{y}(t)$ ... výstupní vektor	$\mathbf{u}(n)$ ... vstupní (řídící) vektor $\mathbf{x}(n)$ ... stavový vektor $\mathbf{y}(n)$ ... výstupní vektor
Obecný tvar stavových rovnic $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t)$ $\mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t)$	Obecný tvar stavových rovnic $\mathbf{x}(n+1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(n), \mathbf{u}(n), n)$ $\mathbf{y}(n) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(n), \mathbf{u}(n), n)$
Lineární stavový systém $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\,\mathbf{u}(t)$ $\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t)\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t)\mathbf{u}(t)$ $\mathbf{A}(t)$ je matice systému $(n \times n)$ $\mathbf{B}(t)$ je matice vstupů (řízení) $(n \times r)$ $\mathbf{C}(t)$ je výstupní matice $(m \times n)$ $\mathbf{D}(t)$ je výstupní matice $(m \times r)$	Lineární stavový systém $\mathbf{x}(n+1) = \mathbf{M}(n)\,\mathbf{x}(n) + \mathbf{N}(n)\,\mathbf{u}(n)$ $\mathbf{y}(n) = \mathbf{C}(n)\,\mathbf{x}(n) + \mathbf{D}(n)\mathbf{u}(n)$ $\mathbf{M}(n)$ je matice systému $\mathbf{N}(n)$ je matice vstupů (řízení) $\mathbf{C}(n)$ je výstupní matice $\mathbf{D}(n)$ je výstupní matice
Stacionární stavový systém matice $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$ jsou nezávislé na čase	Stacionární stavový systém matice $\mathbf{M}$, $\mathbf{N}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$ jsou nezávislé na čase

Příklad 1 Pohyb po **cykloidě** je popsán parametrickou soustavou rovnic

$$\begin{aligned} x &= at - b\sin t \quad \longrightarrow \quad x_1(t)\,, \\ y &= a - b\cos t \quad \longrightarrow \quad x_2(t)\,, \end{aligned} \tag{1}$$

která je pro $x_1(0) = 0$ a $x_2(0) = a - b$ dána řešením stavové rovnice

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ at \end{bmatrix}.$$

Příklad 2 Nelineární stavový model **vlci a ovečky** , který je znám v literatuře jako **Lotka - Volterra predator-prey model**, se týká populace ovcí popsané stavovou proměnnou $x_1(t)$ a populace vlků popsané stavovou proměnnou $x_2(t)$. Dynamický model je dán nelineární soustavou stavových rovnic

$$\frac{d}{dt}x_1(t) = a\,x_1(t) - b\,x_1(t)x_2(t)\,, \tag{2}$$

$$\frac{d}{dt}x_2(t) = -c\,x_2(t) + d\,x_1(t)x_2(t)\,. \tag{3}$$

Uvedený model můžeme snadno interpretovat. Žijí-li ovce a vlci odděleně, pro ovce platí rovnice

$$\frac{d}{dt}x_1(t) = a\,x_1(t)\,, \tag{4}$$

$$\tag{5}$$

jejímž řešením je exponenciální růst $x_1(t) = x_1(0)\,e^{at}$, zatímco vlci bez potravy

$$\frac{d}{dt}x_2(t) = -c\,x_2(t)\,, \tag{6}$$

$$\tag{7}$$

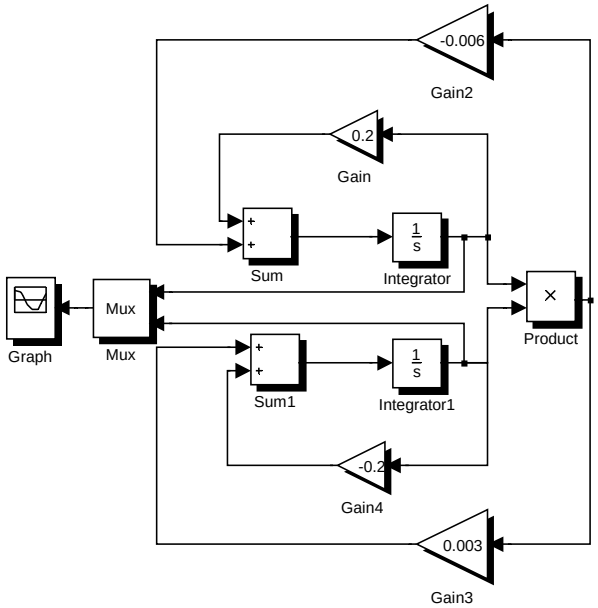
exponenciálně hynou, $x_2(t) = x_2(0)\,e^{-ct}$.

Počet sežraných ovcí a nasycených vlků je úměrný počtu jejich setkání, tj. součinu $x_1(t)x_2(t)$, a proto v rovnici (2) počet ovcí klesá úměrně s

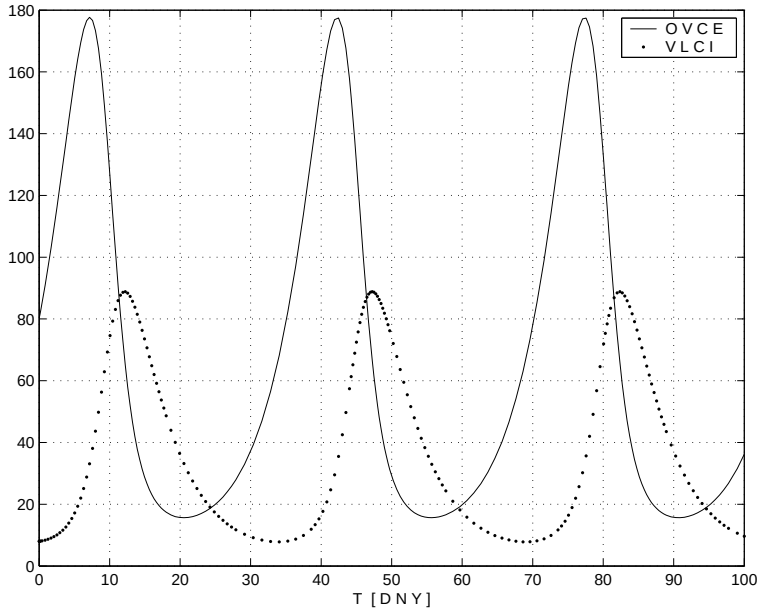
$$-b\,x_1(t)x_2(t),$$

zatímco v rovnici (3) se vlci mají dobře a jejich počet stoupá úměrně s

$$d\,x_1(t)x_2(t).$$



Obrázek 1: Vlci a ovečky - model v SIMULINKu



Obrázek 2: Vlci a ovečky - řešení soustavy nelineárních diferenciálních rovnic pomocí SIMULINKu