Příklady na $\mathcal{Z}$-transformaci

Jan Přikryl, Miroslav Vlček, Bohumil Kovář, Jana Kuklová, Lucie Kárná

29. dubna 2015

Abstrakt

Na rozdíl od příkladů na Laplaceovu transformaci, které snad v LS 2012/2013 vykrystalizovaly do podoby, kdy je lze doporučit studentům k samostudiu, je toto psaní ve velmi vývojové fázi. Prosím proto o pečlivou kontrolu všech výpočtů.

29.4.2015 Jan Přikryl

Změny v dokumentu:

2014-03-21	jp	První použitelná interní verze rozeslána k připomínkám.
2014-07-25	bk	Revize od BK.
2014-09-04	lk	Revize od LK.
2014-09-29	jk	Revize od JK.
2015-02-06	jp	Doplnění rozkladu na parciální zlomky a zjednodušení příkladu na $H(z)$.
2015-04-29	jp	Příklad na zpětnou $\mathcal{Z}$-transformaci pomocí rozvoje v mocninnou řadu.

■Q1: Má smysl používat záporné mocniny z a ukazovat výpočty v z^{-1}?■
■Q2: Prozatím bych ignoroval cvičebnice DÚ a tohle vypracoval paralelně. Doplit a sloučit až poté.■

■T1: Doplnit příklad na převod y[n-2]...y[n] na y[n]...y[n+2]. Počáteční podmínky.■
■T2: Doplnit diskusi násobení všeho posunutého jednotkovým skokem.■
■T3: LK doplní neřešené příklady na zpětnou $\mathcal{Z}$-transformaci s výsledky.■

Milé kolegyně, milí kolegové, tyto sady příkladů nejsou nutně zcela správně, mohou se v nich vyskytnout chyby, kterých jsme se při přepisu dopustili. Kdo nějakou chybu odhalí jako první, dostane (nejvýše jeden) bod za aktivitu.

1 Rozklad na parciální zlomky

Případ rozkladu na parciální zlomky v případě jednoduchých pólů je podrobně vysvětlen v přednáškách a v doprovodných studijních materiálech pro základní matematické kurzy. Osvěžme si ale případ, kdy se v racionální lomené funkci objeví pól násobný. Nechť například

$$N(z) = \frac{6}{\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)^2\left(1+\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{6}z^{-1}\right)}. \tag{1}$$

Rozklad na parciální zlomky v tomto případě hledáme ve tvaru

$$N(z) = \frac{k_1^{(2)}}{\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)^2} + \frac{k_1^{(1)}}{1-\frac{1}{4}z^{-1}} + \frac{k_2}{1+\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{k_3}{1-\frac{1}{6}z^{-1}}. \tag{2}$$

1.1 Heavisideova metoda rozkladu

Pokud k řešení použijeme Heavisideovu variantu rozkladu, bude náš postup rozdělen do dvou kroků: Nejprve z rovnice (1) separujeme část, obsahující pouze jednoduché póly, tedy

$$N(z) = \frac{6}{\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)}\left[\frac{1}{\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)\left(1+\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{6}z^{-1}\right)}\right] = \frac{6}{\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)}\cdot Q(z) \tag{3}$$

a identifikujeme všechny jednoduché póly racionální lomené funkce $Q(z)$,

$$\begin{aligned} Q(z) &= \frac{q_1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}} + \frac{q_2}{1+\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{q_3}{1-\frac{1}{6}z^{-1}} = \\ &= \frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}} + \frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{-\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{6}z^{-1}}. \end{aligned}$$

V dalším kroku se vrátíme k rovnici (3), dosadíme za $Q(z)$, roznásobíme jednotlivé sčítance, čímž získáme konečný výsledek pro parciální zlomek $\frac{k_1^{(2)}}{\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)^2}$. Musíme ovšem ještě najít póly dvou zbývajících racionálních lomených funkcí s jednoduchými póly,

$$\begin{aligned} N(z) &= \frac{6}{\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)}\cdot Q(z) = \frac{6}{\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}} + \frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{-\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{6}z^{-1}}\right) = \\ &= \frac{6}{\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)^2} + \frac{3}{\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)\left(1+\frac{1}{2}z^{-1}\right)} + \frac{-3}{\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{6}z^{-1}\right)} = \\ &= \frac{6}{\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)^2} + \left(\frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}} + \frac{2}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}\right) + \left(\frac{-9}{1-\frac{1}{4}z^{-1}} + \frac{6}{1-\frac{1}{6}z^{-1}}\right) = \\ &= \frac{6}{\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)^2} - \frac{8}{1-\frac{1}{4}z^{-1}} + \frac{2}{1+\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{6}{1-\frac{1}{6}z^{-1}}. \end{aligned}$$

1.2 Přímý rozklad pomocí limit

V případě určování koeficientů $k_1^{(1)}, k_1^{(2)}, k_2$ a k_3 pomocí limit nedokážeme určit hodnotu koeficientu $k_1^{(1)}$. Budeme proto postupovat tak, že pomocí limity určíme nejprve $k_1^{(2)}$ a výraz následně upravíme tak, abychom se násobného pólu zbavili.

Začneme tím, že rovnice (1) a (2) vynásobíme členem $\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)^2$,

$$\frac{6\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)^2}{\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)^2\left(1+\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{6}z^{-1}\right)} = k_1^{(2)} + k_1^{(1)}\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right) + \frac{k_2\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)^2}{1+\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{k_3\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)^2}{1-\frac{1}{6}z^{-1}},$$

a nalezneme limitu pro $z \to \frac{1}{4}$,

$$\frac{6}{\left(1+\frac{4}{2}\right)\left(1-\frac{4}{6}\right)} = \frac{6}{3\cdot\frac{1}{3}} = 6 = k_1^{(2)}.$$

Nyní musíme do rovnice (2) dosadit známou hodnotu $k_1^{(2)}$ a osamostatnit neznámé na pravé straně rovnice. Odečteme-li výraz $\frac{6}{\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)^2}$ od obou stran rovnice (2), dostáváme

$$
\begin{aligned}
\frac{6}{\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)^2\left(1+\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{6}z^{-1}\right)} - \frac{6}{\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)^2} &= \\
&= \frac{6-6\left(1+\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{6}z^{-1}\right)}{(1-\frac{1}{4}z^{-1})^2(1+\frac{1}{2}z^{-1})(1-\frac{1}{6}z^{-1})} = \\
&= \frac{6-6+z^{-1}-3z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}}{(1-\frac{1}{4}z^{-1})^2(1+\frac{1}{2}z^{-1})(1-\frac{1}{6}z^{-1})} = \\
&= \frac{-2z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}}{(1-\frac{1}{4}z^{-1})^2(1+\frac{1}{2}z^{-1})(1-\frac{1}{6}z^{-1})} = \\
&= \frac{k_1^{(1)}}{1-\frac{1}{4}z^{-1}} + \frac{k_2}{1+\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{k_3}{1-\frac{1}{6}z^{-1}}.
\end{aligned}
$$

Pokud jsme počítali správně, bude polynom v čitateli racionální lomené funkce, tedy výraz $-2z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}$, dělitelný $\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)$. Opravdu tomu tak je a po vydělení nám vyjde rovnice

$$\frac{-2z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)\left(1+\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{6}z^{-1}\right)} = \frac{k_1^{(1)}}{1-\frac{1}{4}z^{-1}} + \frac{k_2}{1+\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{k_3}{1-\frac{1}{6}z^{-1}},$$

pro kterou se výpočet $k_1^{(1)}, k_2$ a k_3 redukuje již na případ s jednoduchými póly, jenž znáte z literatury a předchozího studia. Celkem snadno proto dopočteme $k_1^{(1)} = -8$, $k_2 = 2$ a $k_3 = 6$, a obdržíme stejný výsledek, jako v předchozím odstavci,

$$N(z) = \frac{6}{\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)^2} - \frac{8}{1-\frac{1}{4}z^{-1}} + \frac{2}{1+\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{6}{1-\frac{1}{6}z^{-1}}.$$

2 Řešení diferenční rovnice druhého řádu

Diferenční rovnici

$$y[n+2] - 2a\,y[n+1] + a^2 y[n] = u[n+2] \tag{4}$$

s počátečními podmínkami ve tvaru

$$y[0] = c_1 \quad \text{a} \quad y[1] = c_2$$

řešíme pomocí $\mathcal{Z}$-transformace. Protože platí

$$
\begin{aligned}
\mathcal{Z}\left\{y[n+1]\right\} &= z\,Y(z) - z\,y[0], \\
\mathcal{Z}\left\{y[n+2]\right\} &= z^2 Y(z) - z^2 y[0] - z\,y[1], \\
\mathcal{Z}\left\{u[n+2]\right\} &= z^2 U(z) - z^2 u[0] - z\,u[1],
\end{aligned}
$$

nalezneme $\mathcal{Z}$-transformací diferenční rovnice (4) její algebraický tvar

$$z^2 Y(z) - z^2 y[0] - z\,y[1] - 2a\left(z\,Y(z) - z\,y[0]\right) + a^2\,Y(z) = z^2 U(z) - z^2 u[0] - z\,u[1]. \tag{5}$$

Rovnici (5) řešíme pro obraz výstupní veličiny $Y(z)$ a dostáváme

$$\left(z^2 - 2az + a^2\right) Y(z) = z^2 U(z) + z^2(y[0]-u[0]) + z\left(y[1] + 2ay[0] - u[1]\right)$$

neboli

$$Y(z) = \frac{z^2U(z) + z^2(y[0] - u[0]) + z\,(y[1] + 2ay[0] - u[1])}{z^2 - 2az + a^2} =$$
$$= \frac{z^2U(z) + z^2(y[0] - u[0]) + z\,(y[1] + 2ay[0] - u[1])}{(z-a)^2}.$$

Bez znalosti vstupního signálu nelze posloupnost $y[n]$ jednoznačně určit – můžeme ale určit přenosovou funkci systému a jeho impulsní a přechodovou odezvu.

Připomeňme, že **přenosová funkce diskrétního systému** $H(z)$ matematicky popisuje závislost mezi vstupem a výstupem systému. V případě $\mathcal{Z}$-transformace je definována jako podíl obrazu výstupu k obrazu vstupu

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{\mathcal{Z}\{y[n]\}}{\mathcal{Z}\{u[n]\}}$$

pro nulové počáteční podmínky (tedy pro $y[0] = 0$, $y[1] = 0$, $u[0] = 0$ a $u[1] = 0$) a pro systém popsaný rovnicí (4) má tvar

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z^2}{z^2 - 2az + a^2} = \frac{z^2}{(z-a)^2}. \tag{6}$$

Impulsní odezva diskrétního systému $h[n]$ je dána inverzní $\mathcal{Z}$-transformací přenosové funkce a platí pro ni

$$h[n] = \mathcal{Z}^{-1}\{H(z)\} = \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z^2}{(z-a)}\right\} = (n+1)a^n = a^n + na^n.$$

Přechodovou odezvu $s[n]$ určíme inverzní $\mathcal{Z}$-transformací výrazu $\mathcal{Z}\{\mathbb{1}[n]\}\cdot H(z)$ – připomeňme, že pro přechodovou odezvu platí

$$s[n] = \sum_{m=0}^{n} h[m] = \sum_{m=0}^{n} \mathbb{1}[m-n]h[m],$$

což je konvoluční integrál a jeho $\mathcal{Z}$-obrazem je násobení obrazů obou posloupností, účastnících se konvoluce. Máme tedy

$$S(z) = \mathcal{Z}\{\mathbb{1}[n]\} \cdot H(z) = \frac{z}{z-1} \cdot H(z) = \frac{z^3}{(z-1)\,(z-a)^2}. \tag{7}$$

Rozkladu výsledné racionální lomené funkce na parciální zlomky vadí fakt, že polynomy v čitateli i jmenovateli jsou shodného (třetího) řádu. Podle toho, co o rozkladu na parciální zlomky víme, bychom měli nejprve zlomek podělit a rozklad počítat pouze ze zbytku po dělení. Vzhledem k tomu, že výpočet probíhá v kladných mocninách z, musí být ovšem výsledkem rozkladu racionální lomené funkce (7) na parciální zlomky takové zlomky, jež obsahují obvykle alespoň člen z v čitateli, přičemž polynomy v čitateli i jmenovateli jsou opět shodného řádu, což není standardní výsledek rozkladu na parciální zlomky. Připomeňme také, že při výpočtu v kladných mocninách z je obvykle čitatel zlomku dělitelný z.

Potřebného tvaru pro rozklad proto dosáhneme transformací $S(z)$ na $S(z)/z$ před rozkladem a následným vynásobením z po provedení rozkladu. Tímto postupem zajistíme, že rozkládaná racionální lomená funkce bude splňovat podmínky pro smysluplný rozklad na parciální zlomky a že po zpětném přenásobení budou parciální zlomky ve tvaru obrazů elementárních tabulkových funkcí.

Postupně vyjde

$$
\begin{aligned}
\frac{S(z)}{z} &= \frac{z^2}{(z-1)\,(z-a)^2} = \\
&= \left(\frac{z}{(z-1)(z-a)}\right)\frac{z}{z-a} = \left(\frac{\frac{1}{1-a}}{z-1} + \frac{\frac{a}{a-1}}{z-a}\right)\frac{z}{z-a} = \\
&= \left(\frac{\frac{1}{1-a}z}{(z-1)(z-a)}\right) + \frac{\frac{a}{a-1}z}{(z-a)^2} = \\
&= \frac{1}{z-1} - \frac{a}{z-a} + \frac{a}{a-1}\frac{z}{(z-a)^2}.
\end{aligned}
$$

Před zpětnou transformací vynásobíme celou rovnici z a obdržíme

$$
\begin{aligned}
s[n] &= \mathcal{Z}^{-1}\left\{S(z)\right\} = \\
&= \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{z-1}\right\} - a\,\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{z-a}\right\} + \frac{a}{a-1}\,\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{(z-a)^2}\right\} = \\
&= \mathbb{1}[n] - a\cdot a^n + \frac{a}{a-1}\cdot na^{n-1} = \\
&= \mathbb{1}[n] - a^{n+1} + \frac{1}{a-1}\cdot na^n.
\end{aligned}
$$

3 Stavový (vnitřní) popis

Na přednášce jsme si odvozovali vztah pro přenosovou funkci $H(z)$ ryzího diskrétního LTI systému. Připomeňme, že ryzí systém je takový systém, v němž vstup neovlivňuje přímo výstup – v rovnici pozorování (rovnici pro výstup) je matice $\mathbf{D}$ stavového popisu nulová. Uvažujme nyní obecný diskrétní LTI systém, jenž je popsán stavovými rovnicemi

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}[n+1] &= \mathbf{M}\,\mathbf{x}[n] + \mathbf{N}\,\mathbf{u}[n] \\
\mathbf{y}[n] &= \mathbf{C}\,\mathbf{x}[n] + \mathbf{D}\,\mathbf{u}[n]
\end{aligned}
$$

Při odvození přenosové funkce postupujeme analogicky s postupem z přednášek. Nejprve celou soustavu rovnis stavového popisu podrobíme $\mathcal{Z}$-transformaci,

$$
\begin{aligned}
z\mathbf{X}(z) + z\mathbf{x}[0] &= \mathbf{M}\,\mathbf{X}(z) + \mathbf{N}\,\mathbf{U}(z) \\
\mathbf{Y}(z) &= \mathbf{C}\,\mathbf{X}(z) + \mathbf{D}\,\mathbf{U}(z)
\end{aligned}
$$

z první rovnice pro $\mathbf{x}[0] = 0$ vyjádříme $\mathbf{X}(z)$

$$\mathbf{X}(z) = (z\mathbf{1} - \mathbf{M})^{-1}\mathbf{N}\,\mathbf{U}(z)$$

a dosadíme do obrazu rovnice pozorování

$$\mathbf{Y}(z) = \mathbf{C}\,(z\mathbf{1} - \mathbf{M})^{-1}\mathbf{N}\,\mathbf{U}(z) + \mathbf{D}\,\mathbf{U}(z).$$

Přenos stavově popsaného obecného diskrétního LTI systému je tedy

$$H(z) = \mathbf{C}\,(z\mathbf{1} - \mathbf{M})^{-1}\mathbf{N} + \mathbf{D} \tag{8}$$

Ověřme si nyní, že pokud převedeme vnější popis diskrétního systému (4) na popis stavový (vnitřní), bude výsledná přenosová funkce totožná s přenosovou funkcí (6).

V případě systému, popsaného rovnicí (4), nelze přímo použít na přednáškách demonstrovaný postup převodu vnějšího popisu na stavový popis. Musíme vyjít z alternativního zápisu s posuny doleva,

$$y[n] = 2a\,y[n-1] - a^2 y[n-2] + u[n], \qquad y[-2] = c_1, \quad y[-1] = c_2 \tag{9}$$

který sice popisuje nekauzální systém, nekauzality se ale v průběhu dalších úprav zbavíme. ■**opravdu?**■ Všimněte si, že rovnice (9) silně připomíná rovnici pozorování (rovnici pro výstup) stavového popisu systému s přímou vazbou vstupu na výstup.

Převod zahájíme volbou stavových proměnných, v případě rovnice (9) volíme

$$\begin{aligned} x_1[n] &\equiv y[n-1] = 2a\,y[n-2] - a^2 y[n-3] + u[n-1], \\ x_2[n] &\equiv y[n-2] \equiv x_1[n-1], \\ y[n-3] &\equiv x_2[n-1], \end{aligned}$$

z čehož po dosazení dostaneme

$$\begin{aligned} x_1[n] &= 2a\,x_1[n-1] - a^2 x_2[n-1] + u[n-1] \\ x_2[n] &= x_1[n-1], \end{aligned}$$

a po posunu $n \to n+1$ nakonec

$$\begin{aligned} x_1[n+1] &= 2a\,x_1[n] - a^2 x_2[n] + u[n] \\ x_2[n+1] &= x_1[n]. \end{aligned}$$

Jak jsme se zmínili výše, rovnici pozorování získáme dosazením za stavové proměnné do (9),

$$y[n] = 2a\,x_1[n] - a^2 x_2[n] + u[n],$$

Z rovnic odečteme prvky jednotlivých matic stavového popisu (pro úplnost dodáváme, že počáteční podmínky jsou dány vektorem $\mathbf{x}[0] = (c_2, c_1)^{\mathrm{T}}$, systém je tedy opět kauzální ■**opravdu?**■)

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 2a & -a^2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{N} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2a & -a^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}.$$

Pro přehlednost si předpočítáme matici $(z\mathbf{1} - \mathbf{M})^{-1}$,

$$\begin{aligned} z\mathbf{1} - \mathbf{M} &= \begin{bmatrix} z-2a & a^2 \\ -1 & z \end{bmatrix} \\ (z\mathbf{1} - \mathbf{M})^{-1} &= \frac{1}{(z-a)^2} \begin{bmatrix} z & -a^2 \\ 1 & z-2a \end{bmatrix} \end{aligned}$$

a dosadíme do rovnice (8),

$$\begin{aligned} H(z) = \mathbf{C}\,(z\mathbf{1} - \mathbf{M})^{-1}\mathbf{N} + \mathbf{D} &= \begin{bmatrix} 2a & -a^2 \end{bmatrix} \frac{1}{(z-a)^2} \begin{bmatrix} z & -a^2 \\ 1 & z-2a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 = \\ &= \begin{bmatrix} 2a & -a^2 \end{bmatrix} \frac{1}{(z-a)^2} \begin{bmatrix} z \\ 1 \end{bmatrix} + 1 = \\ &= \frac{2az - a^2}{(z-a)^2} + \frac{(z-a)^2}{(z-a)^2} = \frac{2az - a^2 \;+\; z^2 - 2az + a^2}{(z-a)^2}, \\ H(z) &= \frac{z^2}{(z-a)^2}. \end{aligned}$$

Opravu tedy platí, že pokud rovnici vnějšího popisu systému převedeme na stavový popis, přenosová funkce zůstává zachována. Stavový popis modeluje systém se stejnými vlastnostmi jako původní model vnějšího popisu.

4 Příklady na $\mathcal{Z}$-transformaci

V této části ukážeme použití $\mathcal{Z}$-transformace v analýze diskrétních LTI systémů. Jelikož přenosové funkce těchto systémů jsou ve tvaru racionální lomené funkce, ukážeme řešení impulsní a přenosové odezvy pro všechny možnosti kombinací pólů. Součástí problematiky je i řešení lineárních diferenčních rovnic.

Příklad 4.1 (jednoduché póly)**.** *Mějme přenosovou funkci diskrétního systému:*

$$H(z) = \frac{1}{1 - \frac{5}{6}z^{-1} + \frac{1}{6}z^{-2}} \tag{10}$$

Nalezněte impulsní odezvu tohoto systému.

Řešení:

Přenosovou funkci (10) *je možno rozložit na parciální zlomky tvaru*

$$H(z) = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right)} = \frac{k_1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{k_2}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}, \tag{11}$$

kde k_1 a k_2 jsou konstanty, které jsme se v základním kursu algebry naučili určovat například pomocí limit v pólech (tak zvaným „zakrývacím pravidlem“).

Tyto konstanty lze ale také dopočítat ze soustavy rovnic, vyplývající z nutné podmínky rovnosti koeficientů shodných polynomů na pravé i levé straně rovnice (obdobný způsob jsme si již ukazovali u spojitých systémů). Vyjdeme z rovnice (11)*, kterou přepíšeme na*

$$\frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right)} = \frac{k_1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{k_2}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}. \tag{12}$$

Vynásobením pravé i levé strany rovnice (12) *výrazem $\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right)$ získáme polynomiální rovnici*

$$1 + 0 \cdot z^{-1} = k_1\left(1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right) + k_2\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right),$$

kde porovnáním koeficientů polynomů u z^0 a z^{-1} na pravé i levé straně obdržíme následující vztahy pro neznámé parametry k_1 a k_2:

$$\begin{aligned} 1 &= k_1 + k_2, \\ 0 &= -\frac{1}{3}k_1 - \frac{1}{2}k_2. \end{aligned}$$

Výsledkem řešení jsou hodnoty koeficientů $k_1 = 3$, $k_2 = -2$. Rovnici (10) *můžeme tedy zapsat ve tvaru*

$$H(z) = \frac{3}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} - \frac{2}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}. \tag{13}$$

Pomocí věty o linearitě a tabulek $\mathcal{Z}$-transformace lze jednoduše vypočítat zpětnou $\mathcal{Z}$-transformaci přenosové funkce, udávající impulsní odezvu systému,

$$h[n] = 3\left(\frac{1}{2}\right)^n - 2\left(\frac{1}{3}\right)^n. \tag{14}$$

$\square$

Příklad 4.2 (násobné póly)**.** *Mějme přenosovou funkci diskrétního systému:*

$$H(z) = \frac{z}{z^3 - 7z^2 + 16z - 12} \tag{15}$$

Nalezněte jeho impulsní odezvu.

Řešení:

Přenosovou funkci (15) *lze rozepsat na parciální zlomky:*

$$\frac{H(z)}{z} = \frac{1}{(z-2)^2(z-3)} = \frac{k_1}{z-2} + \frac{k_2}{(z-2)^2} + \frac{k_3}{z-3}, \tag{16}$$

kde k_1, k_2 a k_3 jsou konstanty, které je nutno dopočítat.

Je vidět, že systém popsaný přenosovou funkcí (16) *má jeden pól jednoduchý a jeden pól násobný. Jak bylo uvedeno dříve, při násobném pólu musí být každý násobek zvlášť zopakován s rozdílnou konstantou.*

Budeme postupovat podle postupu, naznačeného v odstavci 1.2 pro záporné mocniny z. Vynásobením pravé i levé strany rovnice (16) *výrazem* $(z-2)^2$ *dostáváme rovnici*

$$\frac{1}{z-3} = k_1(z-2) + k_2 + \frac{k_3(z-2)^2}{z-3}. \tag{17}$$

Limitujme rovnici (17) *v bodě $z \to 2$. Výsledkem je vypočtení konstanty $k_2 = -1$.*

Dvojnásobný pól odstraníme z rovnice (16)*, pokud od její pravé i levé strany odečteme výraz $k_2/(z-2)^2$. Výsledkem této operace je rovnice*

$$\frac{1}{(z-2)(z-3)} = \frac{k_1}{z-2} + \frac{k_3}{z-3}, \tag{18}$$

která již obsahuje pouze jednoduché póly. Vynásobením obou stran rovnice (18) *výrazem* $(z-2)(z-3)$ *získáme polynomiální rovnici*

$$1 = k_1(z-3) + k_3(z-2),$$

z níž lze jednoduše vypočítat konstanty $k_1 = -1$ a $k_3 = 1$. Přenosovou funkci (15) *lze tedy přepsat do tvaru*

$$\frac{H(z)}{z} = \frac{-1}{z-2} + \frac{-1}{(z-2)^2} + \frac{1}{z-3}$$

a odtud

$$H(z) = -\frac{z}{z-2} - \frac{z}{(z-2)^2} + \frac{z}{z-3}. \tag{19}$$

Nyní již můžeme pomocí slovníku $\mathcal{Z}$-transformace zapsat impulsní odezvu systému jako zpětnou $\mathcal{Z}$-transformaci přenosové funkce ve tvaru (19) *následovně:*

$$h[n] = -2^n - n\,2^{n-1} + 3^n = 3^n - \left(1 + \frac{n}{2}\right) 2^n.$$

□

Příklad 4.3 (komplexně sdružené póly)**.** *Mějme přenosovou funkci diskrétního systému:*

$$H(p) = \frac{z^2 + 3z}{z^2 - 2z + 4}. \tag{20}$$

Nalezněte jeho impulsní odezvu.

Řešení:

Systém, popsaný přenosovou funkcí (20)*, má jednu dvojici komplexně sdružených pólů (kvadratický člen ve jmenovateli je v reálném oboru nerozložitelný). U komplexně sdruženého pólu buď počítáme s komplexními póly, potom ale koeficienty rozkladu vychází též komplexní, anebo počítáme v reálném oboru, ve jmenovateli s nerozložitelným kvadratickým členem. Zpětná* $\mathcal{Z}$*-transformace komplexně sdruženého pólu je potom založena na aplikaci jednoho či více ze čtveřice tabulkových výrazů*

$$\mathcal{Z}\left\{a^n \sin n\vartheta\right\} = \frac{az\sin\vartheta}{z^2 - 2az\cos\vartheta + a^2} \tag{21}$$

$$\mathcal{Z}\left\{a^n \cos n\vartheta\right\} = \frac{z^2 - az\cos\vartheta}{z^2 - 2az\cos\vartheta + a^2} \tag{22}$$

$$\mathcal{Z}\left\{a^n \sinh n\varphi\right\} = \frac{az\sinh\varphi}{z^2 - 2az\cosh\varphi + a^2} \tag{23}$$

$$\mathcal{Z}\left\{a^n \cosh n\varphi\right\} = \frac{z^2 - az\cosh\varphi}{z^2 - 2az\cos\varphi + a^2}. \tag{24}$$

Jmenovatel rovnic (21)–(24) *je vždy ve tvaru* $z^2 - 2az\psi(\cdot) + a^2$*, kde za funkci* $\psi(\cdot)$ *volíme buď* $\cos\vartheta$ *a nebo* $\cosh\varphi$*.*

Srovnáním absolutního členu jmenovatele funkce $H(z)$ *se jmenovatelem rovnic* (21)–(24) *získáme hodnotu parametru* $a = \pm 2$*. Srovnáním koeficientů u první mocniny* z *dostaneme* $-2 = -2a\psi(\cdot) = \pm 4\psi(\cdot)$*, tedy* $\psi(\cdot) = \pm 1/2$*. Vzhledem k tomu, že obor funkčních hodnot funkce* $\cos\vartheta$ *je interval* $\langle -1; +1\rangle$*, zatímco obor funkčních hodnot* $\cosh\varphi$ *je* $\langle -\infty; -1\rangle \cup \langle 1; \infty\rangle$*, nachází se ve jmenovateli racionální lomené funkce* (20) *funkce* $\cos\vartheta$ *a rozklad povede na tabulkový vzorec* (21) *či* (22)*, případně na jejich lineární kombinaci.*

Hodnota $\cos\vartheta = \pm 1/2$ *odpovídá* $\vartheta = \pi/4 + k\pi/2$*,* $k \in \mathbb{Z}$*. Vzhledem k periodicitě goniometrických funkcí bychom měli dále pracovat se dvěma hodnotami parametru* a *(*$a_1 = -2$*,* $a_2 = 2$*) a celkem čtyřmi hodnotami parametru* ϑ*, které jsou vždy po dvojicích spojeny s odpovídající hodnotou* a *(*$\vartheta_{11} = \pi/4$*,* $\vartheta_{12} = 7\pi/4$*,* $\vartheta_{21} = 3\pi/4$ *a* $\vartheta_{22} = 5\pi/4$*). Naštěstí lze dokázat, že všechna čtyři řešení jsou rozdílnými parametrizacemi jediné funkce, a lze tedy nadále počítat jen s* $a = 2$ *a* $\vartheta = \pi/4$*.*

Přenosovou funkci (20) *budeme rozkládat na součet parciálních zlomků ve tvaru*

$$H(z) = k_1\frac{az\sin\vartheta}{z^2 - 2az\cos\vartheta + a^2} + k_2\frac{z^2 - az\cos\vartheta}{z^2 - 2az\cos\vartheta + a^2} = k_1\frac{z}{z^2 - 2z + 4} + k_2\frac{z^2 - z}{z^2 - 2z + 4}.$$

Srovnáním s čitatelem původního zlomku snadno nahlédneme, že $k_1 = 4$ *a* $k_2 = 1$ *a že tedy*

$$H(z) = \frac{z^2 + 3z}{z^2 - 2z + 4} = 4 \cdot \frac{z}{z^2 - 2z + 4} + \frac{z^2 - z}{z^2 - 2z + 4}.$$

Nyní již jednoduše aplikujeme vzorce (21) *či* (22) *a impulsní odezvu systému popsaného přenosovou rovnicí* (20) *obdržíme ve tvaru*

$$h[n] = 2^{n+2}\sin\frac{n\pi}{4} + 2^n\cos\frac{n\pi}{4}.$$

□

Příklad 4.4 (komplexně sdružené póly)**.** *Nalezněte jeho impulsní odezvu diskrétního systému, jehož přenosová funkce je*

$$H(z) = \frac{3z^3 - 3z + 18}{z^3 + 27}. \tag{25}$$

Řešení:

Systém popsaný přenosovou funkcí (25) *má jeden pól jednoduchý a jeden pól komplexně sdružený.*

Jak jsme již uvedli v příkladu 4.3, u komplexně sdruženého pólu buď počítáme s komplexními póly, potom ale koeficienty rozkladu vychází též komplexní, anebo počítáme v reálném oboru, ve jmenovateli s nerozložitelným kvadratickým členem. V tom případě musí být v čitateli příslušného parciálního zlomku uveden lineární člen, aby byl zachován řád systému:

$$H(p) = \frac{3z^3 - 3z + 18}{(z^2 - 3z + 9)(z + 3)} = \frac{k_1 z + k_2}{z^2 - 3z + 9} + \frac{k_3}{z + 3} \tag{26}$$

kde k_1, k_2 a k_3 jsou konstanty, které je nutno dopočítat. Vynásobením pravé i levé strany rovnice (26) *výrazem $(z^2 - 3z + 9)(z + 3)$ dostáváme rovnici*

$$3z^3 - 3z + 18 = (k_1 z + k_2)(z + 3) + k_3\,(z^2 - 3z + 9). \tag{27}$$

Dosazením hodnoty $z = -3$ z rovnice vymizí člen $(k_1 z + k_2)$ a po vyřešení dostaneme hodnotu koeficientu $k_3 = -2$. Porovnáním koeficientů u mocniny z^2 polynomů na pravé a levé straně rovnice (27) *získáme rovnost $3 = k_1 + k_3$, porovnáním jejich absolutních členů rovnost $18 = 3k_2 + 9k_3$. Odtud jednoduše vypočítáme hodnoty koeficientů $k_1 = 1$, $k_2 = 0$. Přenosovou funkci* (25) *lze tedy zapsat ve tvaru*

$$H(z) = \frac{z}{z^2 - 3z + 9} - \frac{2}{z + 3}$$

Nyní již můžeme použít vzorec (21) *s hodnotami parametrů $a = 3$ a $\vartheta = \pi/4$, provést zpětnou $\mathcal{Z}$-transformaci a vyjádřit impulsní odezvu systému jako*

$$h[n] = \frac{2}{3} \cdot 3^n \sin\frac{n\pi}{4} + 2 \cdot \left((-3)^{n-1} + \frac{1}{3}\,\delta[n]\right). \tag{28}$$

□

Příklad 4.5 (přechodová odezva)**.** *Mějme přenosovou funkci diskrétního systému*

$$H(z) = \frac{z}{z - 2}.$$

Nalezněte jeho přechodovou odezvu.

Řešení:

Přechodová odezva je definována jako odezva systému na jednotkový skok. V operátorovém zápisu můžeme tuto odezvu zapsat

$$S(z) = H(z)\frac{z}{z - 1}$$

kde $S(z)$ je $\mathcal{Z}$-obraz přechodové odezvy $s[n]$ a $z/(z-1)$ je $\mathcal{Z}$-obraz jednotkového skoku $\mathbb{1}[n]$. Jednoduchou úpravou je možno vyjádřit funkci $S(z)$ následovně:

$$S(z) = \frac{z^2}{(z - 1)(z - 2)} = z\left(\frac{k_1}{z - 1} + \frac{k_2}{z - 2}\right) = \frac{2z}{z - 2} - \frac{z}{z - 1},$$

což je již varianta racionální lomené funkce s jednoduchými póly. Zapišme proto rovnou výsledek:

$$s[n] = 2^{n+1} - \mathbb{1}[n].$$

□

Příklad 4.6 (řešení diferenční rovnice s posunem doleva)**.** *Mějme diferenční rovnici:*

$$y[n + 2] + y[n + 1] + \frac{1}{4}y[n] = (-1)^n \tag{29}$$

a definované počáteční podmínky:

$$y[0] = 4, \quad y[1] = -8.$$

Nalezněte výstupní posloupnost $y[n]$.

Řešení:
Označme $Y(z) = \mathcal{Z}\{y[n]\}$. Pomocí tabulek pro $\mathcal{Z}$-transformaci převedeme diferenční rovnici (29) *na rovnici algebraickou, z níž je možno vyjádřit $Y(z)$ následovně:*

$$\begin{aligned} z^2Y(z) - 4z^2 + 8z + zY(z) - 4z + \frac{1}{4}Y(z) &= \frac{z}{z+1}, \\ Y(z) &= \frac{z}{(z+1)(z+\frac{1}{2})^2} + \frac{4z(z-1)}{(z+\frac{1}{2})^2}, \\ Y(z) &= \frac{4z^2-3}{(z+1)(z+\frac{1}{2})^2}. \end{aligned}$$

Rozkladem na parciální zlomky dostaneme

$$Y(z) = \frac{4z}{z+1} - \frac{4z}{(z+\frac{1}{2})^2}$$

což po zpětné $\mathcal{Z}$-transformaci vede na časové řešení diferenční rovnice ve tvaru:

$$y[n] = 4(-1)^n + 8n\left(-\frac{1}{2}\right)^n.$$

□

Příklad 4.7 (diferenční rovnice s posunem doprava)**.** *Mějme diferenční rovnici*

$$y[n-2] + 2y[n-1] - 3y[n] = (-1)^n \tag{30}$$

a definované počáteční podmínky

$$y[0] = 0, \qquad y[0] = 0.$$

Nalezněte výstupní posloupnost $y[n]$.

Řešení:
Označme $Y(z) = \mathcal{Z}\{y[n]\}$. Pomocí tabulek pro $\mathcal{Z}$-transformaci převedeme diferenční rovnici (30) *na rovnici algebraickou, z níž je možno vyjádřit $Y(z)$ následovně:*

$$\begin{aligned} z^{-2}Y(z) + 2z^{-1}Y(z) - 3Y(z) &= \frac{1}{1+z^{-1}}, \\ Y(z) &= \frac{1}{(1+z^{-1})(z^{-2}+2z^{-1}-3)}, \\ Y(z) &= \frac{-1}{(1+z^{-1})(1-z^{-1})(3+z^{-1})}. \end{aligned}$$

Rozkladem na parciální zlomky dostaneme

$$Y(z) = -\frac{\frac{1}{4}}{1+z^{-1}} - \frac{\frac{1}{8}}{1-z^{-1}} + \frac{\frac{1}{8}}{1+\frac{1}{3}z^{-1}}$$

a po zpětné $\mathcal{Z}$-transformaci získáme časové řešení diferenční rovnice ve tvaru

$$y[n] = -\frac{1}{4}(-1)^n - \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\left(-\frac{1}{3}\right)^n.$$

□

Příklad 4.8 (posun obrazu). *Nalezněte $f[n]$, máte-li dáno*

$$F(z) = \frac{1}{z^2 + 2z + 2}.$$

Řešení:

Obraz posloupnosti $F(z)$ nelze rozložit na parciální zlomky s reálnými kořeny. Řešení tedy budeme obdobně jako v příkladech 4.3 a 4.4 hledat jako kombinaci goniometrických nebo hyperbolických funkcí. Jmenovatele obrazu budeme hledat ve tvaru $z^2 - 2az\,\psi(\cdot) + a^2$, kde $\psi(\cdot)$ představuje buď $\cos\vartheta$ nebo $\cosh\varphi$. Správnou variantu určíme podle toho, jaký nám vyjde obor funkčních hodnot.

Nejprve určíme konstantu a

$$\begin{aligned} a^2 &= 2, \\ a &= \pm\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Nyní určíme, zda $\psi(\cdot)$ představuje funkci goniometrickou nebo hyperbolickou

$$\begin{aligned} -2a\,\psi(\cdot) &= 2, \\ \psi(\cdot) &= -\frac{1}{a} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Z výsledku je zřejmé, že absolutní hodnota $\psi(\cdot)$ bude vždy menší, než 1, a proto v tomto případě reprezentuje $\psi(\cdot)$ funkci $\cos\vartheta$ a je tedy

$$\cos\vartheta = -\frac{1}{a} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Tato rovnice má pro každé a dvě řešení, celkem tedy máme 4 řešení ve tvaru

1. $a_1 = \sqrt{2}$, $\vartheta_{11} = \frac{3}{4}\pi + 2k\pi$,
2. $a_1 = \sqrt{2}$, $\vartheta_{12} = \frac{5}{4}\pi + 2k\pi$,
3. $a_2 = -\sqrt{2}$, $\vartheta_{21} = \frac{1}{4}\pi + 2k\pi$,
4. $a_2 = -\sqrt{2}$, $\vartheta_{22} = \frac{7}{4}\pi + 2k\pi$,

kde $k \in \mathbb{Z}$.

Nyní bychom měli obdobně porovnávat čitatele. Ten však neobsahuje žádné z jako tabulkové výrazy, a proto použijeme posun obrazu, pro který platí

$$\begin{aligned} F(z) &= z^{-1}G(z) = z^{-1}\frac{z}{z^2 + 2z + 2}, \\ f[n] &= g[n-1]. \end{aligned}$$

Jmenovatel posunutého obrazu zůstává zachován, takže nyní už jen zbývá najít posloupnost $g[n]$ ve tvaru

$$g[n] = a^n \sin n\vartheta,$$

jejímž obrazem v $\mathcal{Z}$-transformaci je

$$G(z) = \frac{az\sin\vartheta}{z^2 - 2az\cos\vartheta + a^2}.$$

Pro každé ze 4 výše uvedených řešení pro a a ϑ najdeme konstanty C, které bude třeba vytknout před výrazem. Řešením jednoduché rovnice $C\,a\sin\vartheta = 1$ tedy získáme:

1. $c_1 = \frac{1}{a_1 \sin \vartheta_{11}} = 1$,
2. $c_2 = \frac{1}{a_1 \sin \vartheta_{12}} = -1$,
3. $c_3 = \frac{1}{a_2 \sin \vartheta_{13}} = -1$,
4. $c_4 = \frac{1}{a_2 \sin \vartheta_{14}} = 1$.

Nyní jsme již schopni na základě znalosti posloupnosti $g[n]$ vypsat všechna mořešení $f[n] = g[n-1]$, která vedou na stejné posloupnosti:

1. $f_1[n] = (\sqrt{2})^{(n-1)} \sin{(n-1)\vartheta_1}$, *kde* $\vartheta_1 = \frac{3}{4}\pi + 2k\pi$,
2. $f_1[n] = -(\sqrt{2})^{(n-1)} \sin{(n-1)\vartheta_2}$, *kde* $\vartheta_2 = \frac{5}{4}\pi + 2k\pi$,
3. $f_1[n] = -(-\sqrt{2})^{(n-1)} \sin{(n-1)\vartheta_3}$, *kde* $\vartheta_3 = \frac{1}{4}\pi + 2k\pi$,
4. $f_1[n] = (-\sqrt{2})^{(n-1)} \sin{(n-1)\vartheta_4}$, *kde* $\vartheta_4 = \frac{7}{4}\pi + 2k\pi$,

kde opět $k \in \mathbb{Z}$. $\square$

Příklad 4.9 (rozklad v mocninnou řadu)**.** *Nalezněte $x[n]$, je-li*

$$X(z) = \ln(1 + az^{-1}) \tag{31}$$

Řešení:

Stačí si vzpomenout, že Taylorův rozvoj funkce $\ln(1+x)$ je

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}$$

a že rovnici (31) můžeme tedy přepsat na

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} a^n}{n} z^{-n},$$

což je definiční vztah pro $\mathcal{Z}$-transformaci. Z tohoto zápisu je již zřejmé, že

$$x[n] = \frac{(-1)^{n+1} a^n}{n}.$$

$\square$

Příklad 4.10 (periodická posloupnost)**.** ■ ***doplnit nějaký jiný příklad, než jsou ty, uvedené ve cvičebnici domácí přípravy?*** ■

Řešení:

$\square$

Příklad 4.11 (doplnění)**.** *Určete impulsní odezvu z přenosové funkce*

$$H(z) = \frac{z^2 - z}{z^2 + 2z + 2}. \tag{32}$$

Řešení:

Přenosová funkce má komplexní póly, proto by její jmenovatel měl odpovídat výrazu

$$z^2 - 2az\cos\vartheta + a^2$$

a z rovnosti koeficientů polynomů vyplývá

$$
\begin{aligned}
2a\cos\vartheta &= -2,\\
a^2 &= 2.
\end{aligned}
$$

Máme tedy

$$
\begin{aligned}
a &= \sqrt{2},\\
\cos\vartheta &= -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2},\\
\vartheta &= -\pi/4.
\end{aligned}
$$

$\square$

Příklad 4.12 (diference)**.** *Určete přenosovou funkci systému popsaného diferencemi*

$$2\Delta^2 y[n] - \Delta y[n] = u[n]. \tag{33}$$

Řešení:

Z přednášek si pamatujeme, že

$$
\begin{aligned}
\mathcal{Z}\left\{\Delta f[n]\right\} &= (z-1)F(z) - f[0]z,\\
\mathcal{Z}\left\{\Delta^2 f[n]\right\} &= (z-1)^2F(z) - f[0]\,z(z-1) + \Delta f[0]z.
\end{aligned}
$$

Po dosazení do (33) *dostaneme algebraickou rovnici*

$$2\left[(z-1)^2Y(z) - f[0]\,z(z-1) + \Delta y[0]z\right] - \left[(z-1)Y(z) - f[0]z\right] = U(z)$$

která se za nulových počátečních podmínek redukuje na

$$2(z-1)^2Y(z) - (z-1)Y(z) = U(z)$$

a odtud již snadno

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{1}{2\,(z-1)^2 - (z-1)} = \frac{1}{2z^2 - 3z + 1}.$$

$\square$

Příklad 4.13 (rozklad kvadratického členu)**.** *Nalezněte $f[n]$, je-li*

$$F(z) = \frac{a}{(z-a)^2}.$$

Řešení:

Nejprve výraz upravíme,

$$\frac{a}{(z-a)^2} = \frac{a-z+z}{(z-a)^2} = \frac{a-z}{(z-a)^2} + \frac{z}{(z-a)^2} = \frac{z}{(z-a)^2} - \frac{1}{z-a}.$$

Z tabulek $\mathcal{Z}$-transformace víme, že

$$\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{(z-a)^2} - \frac{1}{z-a}\right\} = na^{n-1} - \left(a^{n-1} - \frac{1}{a}\,\delta[n]\right) = (n-1)a^{n-1} + \frac{1}{a}\,\delta[n].$$

$\square$

4.1 Neřešené příklady

1. S použitím $\mathcal{Z}$-transformace řešte homogenní diferenční rovnici

$$y[n+2] + y[n+1] - \frac{1}{2}y[n] = 0$$

při počátečních podmínkách $y[0] = 0$, $y[1] = 3$.

řešení: [???]

2. S použitím $\mathcal{Z}$-transformace řešte diferenční rovnici

$$y[n+2] + y[n] = \sin 2n$$

při počátečních podmínkách $y[0] = 0$, $y[1] = 0$.

řešení: [???]

3. S použitím $\mathcal{Z}$-transformace řešte diferenční rovnici

$$y[n+1] = (1+r)y[n]$$

s počáteční podmínkou $y[0] = 100$ a parametrem $r = 0{,}1$.

řešení: $\left[\, y[n] = 100\left(\tfrac{1}{10}\right)^n \,\right]$

4. S použitím $\mathcal{Z}$-transformace řešte diferenční rovnici

$$y[n+1] - 3y[n] = 4^n$$

s počáteční podmínkou $y[0] = 2$.

řešení: $[\, y[n] = 3^n + 4^n \,]$

5. ■ **bacha, toto má nenulové y[-1], což studenty neučíme** ■
S použitím $\mathcal{Z}$-transformace řešte diferenční rovnici

$$y[n] - 6y[n-1] + 9y[n-2] = 0$$

při počátečních podmínkách $y[-1] = 1$, $y[-2] = 0$.

řešení: $[\, y[n] = (6+3n)3^n \,]$

6. S použitím $\mathcal{Z}$-transformace řešte diferenční rovnici

$$y[n+1] - 5y[n] = 5^{n+1}$$

s počáteční podmínkou $y[0] = 0$.

řešení: $[\, y[n] = n\,5^n \,]$

7. S použitím $\mathcal{Z}$-transformace řešte soustavu diferenčních rovnici

$$\begin{aligned} x[n+1] &= \frac{\sqrt{2}}{2}x[n] - \frac{\sqrt{2}}{2}y[n] \\ y[n+1] &= \frac{\sqrt{2}}{2}x[n] - \frac{\sqrt{2}}{2}y[n] \end{aligned}$$

při počátečních podmínkách $x[0] = 1$ a $y[0] = 0$.

řešení: $[\, x[n] = \cos(\frac{\pi}{4}n),\, y[n] = \sin(\frac{\pi}{4}n)\,]$

8. Nalezněte f[n], pokud

$$F(z) = \frac{2z^2 - z}{2z^2 - 2z + 2}$$

řešení: $[\, f[n] = \cos(\frac{\pi}{3}n),\,]$

9. Nalezněte f[n], pokud

$$F(z) = \frac{3z^2 + 5}{z^4}$$

řešení: $[\, f[n] = 3\delta[n-2] + 5\delta[n-4],\,]$

10. S použitím $\mathcal{Z}$-transformace řešte diferenční rovnici

$$y[n+2] - 3y[n+1] - 4y[n] = 2n(-1)^n$$

při počátečních podmínkách $y[0] = 0$ a $y[1] = 1$.

řešení: $\left[\, \frac{1}{5}n^2(-1)^n - \frac{7}{25}n(-1)^n - \frac{23}{125}(-1)^n + \frac{23}{125}4^n \,\right]$

11. S použitím $\mathcal{Z}$-transformace řešte diferenční rovnici

$$y[n+2] - 5y[n+1] + 4y[n] = 4n^2\frac{1}{2}^n$$

při počátečních podmínkách $y(0) = -1$, $y[1] = 1$.

řešení (neověřeno): [???]

12. Nalezněte $f[n]$, pokud

$$F(z) = \left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{3}{4}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{2}{3}z^{-1}\right).$$

řešení: [???]

13. ■ **LK doplní příklad na zpětnou Z-trf** ■
Nalezněte $f[n]$, pokud

$$F(z) = \frac{?}{?}.$$

řešení: [???]

14. Určete základní periodu N_0 diskrétní harmonické posloupnosti $y[n] = \cos\frac{5}{7}\pi n$.

řešení: $[\, N_0 = 14\,]$

15. Zjistěte, zda je posloupnost $y[n] = 2\sin\left(\frac{n}{2}\right) + 3\tan^2\left(\frac{n}{6}\right)$ periodická. Jestliže ano, určete její fundamentální periodu.

řešení: $[\, ano, N_0 = 12\pi\,]$