Matematické nářadí - Laplaceova transformace

prof. RNDr. Miroslav Vlček, DrSc.

30. března 2006

Laplaceova transformace - definice

Laplaceova transformace funkce $f(t)$, která je nanejvýš polynomiálního růstu, je definována integrálem

$$F(p) = \int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt\,, \tag{1}$$

který často označujeme $F(p) = \mathcal{L}[f(t)]$. Funkci $f(t)$ nazýváme vzorem a funkci $F(p)$ Laplaceovým obrazem. Zpětná Laplaceova transformace má tvar integrálu podél křivky v komplexní rovině p

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(p) e^{pt} dp\,. \tag{2}$$

Praktické počítání zpětné Laplaceovy transformace vychází z residuové věty, která pro racionálně lomené funkce v proměnné p vede v operátorovém počtu na Heavisideovu větu.

Laplaceova transformace - vlastnosti

- Laplaceova transformace je lineární

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{\sum_k a_k f_k(t)\right\} &= \sum_k a_k \mathcal{L}\{f_k(t)\} \\
\mathcal{L}^{-1}\left\{\sum_m b_m F_m(p)\right\} &= \sum_m b_m \mathcal{L}^{-1}\{F_m(p)\}
\end{aligned}$$

- Věta o změně měřítka

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(p)\} \qquad F(p) = \mathcal{L}\{f(t)\}$$

$$\frac{1}{b} f\left(\frac{t}{b}\right) = \mathcal{L}^{-1}\{F(bp)\} \qquad \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right) = \mathcal{L}\{f(at)\}$$

- Věta o posunutí

$$\mathcal{L}\{f(t-\tau)\} = e^{-p\tau}\mathcal{L}\{f(t)\}$$

- Věta o konvoluci

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^\infty f(t-\tau) g(\tau) d\tau\right\} = F(p)G(p)$$

- Věta o obrazu derivace funkce $f(t)$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{f(t)\} &= F(p) \\
\mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt} f(t)\right\} &= pF(p) - f(0) \\
\mathcal{L}\left\{\frac{d^2}{dt^2} f(t)\right\} &= p^2 F(p) - p\, f(0) - f'(0) \\
&\vdots \\
\mathcal{L}\left\{\frac{d^n}{dt^n} f(t)\right\} &= p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) \\
&\quad \cdots - p\, f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)
\end{aligned}$$

- Věta o obrazu integrálu funkce $f(t)$

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau) d\tau\right\} = \frac{1}{p} F(p)$$

Inverzní Laplaceova transformace - jednoduché póly

O racionální lomené funkci $\dfrac{Q(p)}{N(p)}$ říkáme, že má **nulové** body $p_{0\nu}$, jestliže $Q(p_{0\nu}) = 0$ a že má **póly** $p_{\infty\mu}$, jestliže $N(p_{\infty\mu}) = 0$. Pokud má funkce $\dfrac{Q(p)}{N(p)}$ jednoduché póly, potom

$$N(p) = \prod_{\mu=1}^n (p - p_{\infty\mu}) = (p-p_{\infty 1})(p-p_{\infty 2})\ldots(p-p_{\infty n}).$$

Rozklad racionální lomené funkce na parciální zlomky má tvar

$$\begin{aligned}
\frac{Q(p)}{N(p)} &= \sum_{\mu=1}^n \frac{k_\mu}{p - p_{\infty\mu}} \\
&= \frac{k_1}{p - p_{\infty 1}} + \frac{k_2}{p - p_{\infty 2}} + \ldots \\
&\qquad \cdots + \frac{k_n}{p - p_{\infty n}},
\end{aligned} \tag{3}$$

kde k_μ se nazývají residua a platí

$$
\begin{aligned}
k_\mu &= \lim_{p\to p_{\infty\mu}} (p - p_{\infty\mu}) \frac{Q(p)}{N(p)} \\
&= Q(p_{\infty\mu}) \lim_{p\to p_{\infty\mu}} (p - p_{\infty\mu}) \frac{1}{N(p)} \\
&= Q(p_{\infty\mu}) \lim_{p\to p_{\infty\mu}} \frac{1}{\dfrac{N(p)}{p - p_{\infty\mu}}} \\
&= Q(p_{\infty\mu}) \frac{1}{N'(p_{\infty\mu})}
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Pro jednoduchost budeme dále psát $p_{\infty\mu} \to p_\mu$. Protože platí

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p+\alpha}\right\} = e^{-\alpha t},$$

dostaneme

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{Q(p)}{N(p)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\sum_{\mu=1}^{n} \frac{k_\mu}{p - p_\mu}\right\} = \sum_{\mu=1}^{n} k_\mu e^{p_\mu t}.$$

Tím jsme dokázali tzv.

• Heavisideův vzorec pro zpětnou transformaci racionální lomené funkce s jednoduchými póly

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{Q(p)}{N(p)}\right\} &= \sum_{\mu} \frac{Q(p_\mu)}{N'(p_\mu)} e^{p_\mu t} \\
\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{Q(p)}{pN(p)}\right\} &= \frac{Q(0)}{N(0)} + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{Q(p_\nu)}{p_\nu N'(p_\nu)} e^{p_\nu t}
\end{aligned}
$$

Inverzní Laplaceova transformace - násobné póly

Je zřejmé, že v inverzní transformaci hrají výsadní roli póly racionální lomené funkce. Proto se v dalším můžeme zabývat pouze takovými racionálně lomenými funkcemi, jejichž čitatel je jednotkový

$$H(p) = \frac{1}{N(p)}.$$

Jestliže tedy

$$N(p) = (p - p_1)^{\beta_1} (p - p_2)^{\beta_2} \dots (p - p_n)^{\beta_n}$$

má násobné kořeny, potom inverzní Laplaceova transformace má tvar

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{N(p)}\right\} &= e^{p_1 t}\left[k_1^{(1)} + k_1^{(2)} \frac{t}{1!} + \dots k_1^{(\beta_1)} \frac{t^{\beta_1 - 1}}{(\beta_1 - 1)!}\right] \\
&+ e^{p_2 t}\left[k_2^{(1)} + k_2^{(2)} \frac{t}{1!} + \dots k_2^{(\beta_2)} \frac{t^{\beta_2 - 1}}{(\beta_2 - 1)!}\right] \\
&\dots + e^{p_n t}\left[k_n^{(1)} + k_n^{(2)} \frac{t}{1!} + \dots k_n^{(\beta_n)} \frac{t^{\beta_n - 1}}{(\beta_n - 1)!}\right]
\end{aligned}
\tag{5}
$$

kde koeficienty $k_\mu^{(\beta_m)}$ získáme následujícím postupem. Nechť například

$$N(p) = (p-2)^2(p+5)(p+7).$$

Rozklad na parciální zlomky hledáme ve tvaru

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{(p-2)^2(p+5)(p+7)} \\
&\qquad = \frac{k_1^{(2)}}{(p-2)^2} + \frac{k_1^{(1)}}{p-2} + \frac{k_2}{p+5} + \frac{k_3}{p+7}
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Vynásobíme rovnici členem $(p-2)^2$

$$
\begin{aligned}
&\frac{(p-2)^2}{(p-2)^2(p+5)(p+7)} \\
&\qquad = k_1^{(2)} + k_1^{(1)}(p-2) + \frac{k_2(p-2)^2}{p+5} + \frac{k_3(p-2)^2}{p+7}
\end{aligned}
\tag{7}
$$

a nalezneme limitu pro $p \to 2$,

$$k_1^{(2)} = \frac{1}{(2+5)(2+7)} = \frac{1}{7\times 9} \tag{8}$$

Odečteme-li výraz $\dfrac{1}{63(p-2)^2}$ od obou stran rovnice (4) dostáváme

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{(p-2)^2(p+5)(p+7)} - \frac{1}{63(p-2)^2} \\
&\qquad = \frac{k_1^{(1)}}{p-2} + \frac{k_2}{p+5} + \frac{k_3}{p+7}
\end{aligned}
\tag{9}
$$

resp. rovnici

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{63}\left[\frac{-(p+14)}{(p-2)(p+5)(p+7)}\right] \\
&\qquad = \frac{k_1^{(1)}}{p-2} + \frac{k_2}{p+5} + \frac{k_3}{p+7},
\end{aligned}
\tag{10}
$$

pro kterou se výpočet k_μ redukuje na případ s jednoduchými póly a platí

$$
\begin{aligned}
k_1^{(1)} &= -\frac{2^4}{7^2\times 9^2}, \\
k_2 &= \frac{1}{2\times 7^2}, \\
k_3 &= -\frac{1}{2\times 9^2}.
\end{aligned}
\tag{11}
$$

Tabulka Laplaceovy transformace

$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{F(p)\right\}$	$F(p) = \mathcal{L}\left\{f(t)\right\}$
$f(t) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(p)e^{pt}dp$	$F(p) = \displaystyle\int_{0}^{\infty} f(t)e^{-pt}dt$
$\delta(t)$	1
$1(t)$	$\dfrac{1}{p}$
$e^{-\alpha t}$	$\dfrac{1}{p+\alpha}$
$\sin\omega t$	$\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$
$\cos\omega t$	$\dfrac{p}{p^2+\omega^2}$
$e^{-\alpha t}\sin\omega t$	$\dfrac{\omega}{(p+\alpha)^2+\omega^2}$
$e^{-\alpha t}\cos\omega t$	$\dfrac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2+\omega^2}$
t^n	$\dfrac{n!}{p^{n+1}}$
$t^n e^{-\alpha t}$	$\dfrac{n!}{(p+\alpha)^{n+1}}$
$t\cos\omega t$	$\dfrac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}$
$t\sin\omega t$	$\dfrac{2\omega p}{(p^2+\omega^2)^2}$