Převod spojitého systému na diskrétní a bilineární transformace

prof. RNDr. Miroslav Vlček, DrSc.

16. května 2010

Převod spojitého systému na diskrétní
Spojitý systém popsaný stavovými rovnicemi

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\,\mathbf{u}(t), && (1)\\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t), && (2) \end{aligned}$$

můžeme převést na ekvivalentní diskrétní systém tak, že čas t nahradíme diskrétními časovými okamžiky $t = nT$, kde T je vzdálenost mezi následujícími časovými okamžiky. Všechny veličiny měříme pouze v čase $t = nT$ a proto

$$x(t) = x(nT) \to x(n),$$

$$y(t) = y(nT) \to y(n),$$

$$u(t) = u(nT) \to u(n).$$

Derivaci stavu $\dot{x}(t)$ nahradíme v prvním přiblížení první diferencí

$$\dot{\mathbf{x}}(t) \approx \frac{\mathbf{x}((n+1)T) - \mathbf{x}(nT)}{T} = \frac{1}{T}(\mathbf{x}(n+1) - \mathbf{x}(n))\,. \qquad (3)$$

Dosazení do (1) a (2) dostaneme po úpravě diskrétní tvar stavových rovnic

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(n+1) &= (\mathbf{1} + T\mathbf{A})\,\mathbf{x}(n) + T\mathbf{B}\,\mathbf{u}(n) && (4)\\ \mathbf{y}(n) &= \mathbf{C}\,\mathbf{x}(n) + \mathbf{D}\mathbf{u}(n) && (5) \end{aligned}$$

Bilineární transformace
Odvození bilineární transformace, kterou můžeme převést popis spojitého systému na diskrétní, lze odvodit několika ekvivalentními způsoby. Řešení diferenciálních rovnic numerickou integrací lichoběžníkovou metodou vede na bilineární transformaci způsobem, který je používán v **teorii řízení.** Zde je velmi často spojována se jménem Tutsinova transformace [1]. Vzorkování analogového signálu a Laplaceova transformace vzorkovací funkce vede na ekvivalenci

$$z^{-1} \sim e^{-pT}\,. \qquad (6)$$

Komplexní kmitočet p lze získat úpravou vztahu (6)

$$p = \frac{1}{T}\ln z\,. \qquad (7)$$

Abychom se vyhnuli transcendentním funkcím při vyjadřování přenosových vlastností, rozvineme pravou stranu rovnice (7) v řadu, přičemž v dalších úvahách vezmeme v úvahu jen první člen rozvoje. Platí

$$\begin{aligned} \ln z &= \frac{z-1}{1} - \frac{(z-1)^2}{2} + \frac{(z-1)^3}{3} - \cdots \\ &= \frac{z-1}{z} + \frac{1}{2}\left(\frac{z-1}{z}\right)^2 + \cdots && (8)\\ &= 2\left[\frac{z-1}{z+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^5 + \cdots\right]. \end{aligned}$$

Po dosazení do vztahu (7) vždy prvních členů rozvoje funkce $\ln z$ získáme tři transformace $z \to p$, které jsou v literatuře označovány jako FD (forward difference), BD (backward difference) a bilineární transformace. Všimněme si jakým způsobem bilineární transformace transformuje imaginární osa kmitočtů. Z rovnice

$$\begin{aligned} j\Omega &= \frac{2}{T}\frac{1-e^{-j\omega T}}{1+e^{-j\omega T}} = j\frac{2}{T}\frac{e^{j\omega T/2} - e^{-j\omega T/2}}{e^{j\omega T/2} + e^{-j\omega T/2}} \\ &= j\frac{2}{T}\frac{\sin(\omega T/2)}{\cos(\omega T/2)} = j\frac{2}{T}\tan\frac{\omega T}{2}\,. && (9) \end{aligned}$$

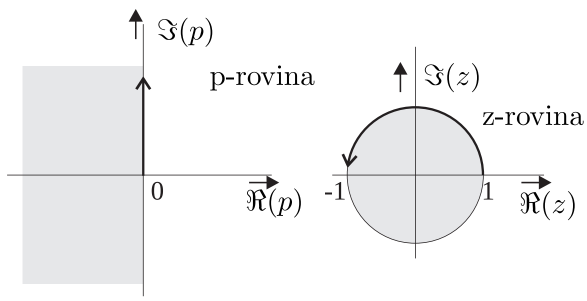
vyplývá, že pro všechna ω je $|z = e^{j\omega T}| = 1$, což je rovnice kružnice se středem o poloměru 1. Toto zobrazení je na obrázku 1. Z rovnice (9) můžeme dále vyvodit, že kmitočtové osy jsou vzájemně zkreslené a platí

$$\Omega = \frac{2}{T}\tan\frac{\omega T}{2}\,. \qquad (10)$$

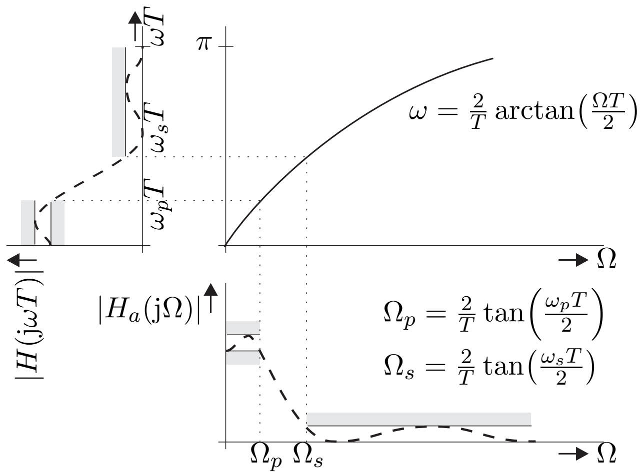
[1] Johnson J. R.: *Introduction to Digital Signal Processing,* Prentice-Hall Inc., 1989

Tabulka 1: Řešení diferenciálních a diferenčních rovnic

spojitý čas	diskrétní čas
$\frac{d}{dt}y(t) = x(t)$	
$\int_{(n-1)T}^{nT} \frac{d}{dt}y(t)dt = \int_{(n-1)T}^{nT} x(t)dt$ integrace diferenciální rovnice	$y(nT) - y((n-1)T) = T\frac{x(nT) + x((n-1)T)}{2}$ numerická integrace
	$Y(z)(1 - z^{-1}) = \frac{T}{2}X(z)(1 + z^{-1})$ z-transformace
$pY(p) = X(p)$ Laplaceova transformace	$\frac{2}{T}\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}Y(z) = X(z)$



Obrázek 1: Zobrazení roviny p na rovinu z při transformaci $p = \frac{2}{T}\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$.



Obrázek 2: Zkreslení kmitočtových os při bilineární transformaci analogového dolní propusti na číslicovou dolní propust.