Modelování systémů a procesů (K611MSAP)

Děčín – přednáška 3

Vlček, Přikryl, Kovář, Pěnička

Ústav aplikované matematiky
ČVUT v Praze, Fakulta dopravní

3. přednáška K611MSAP
čtvrtek 9. dubna 2009

Obsah přednášky

Matematické nářadí

Motivace

Chceme analyzovat chování nějakého systému, případně navrhnout systém, který má přesně specifikované parametry.

Opíráme se o

- **fyzikální model**, založený na fyzikálních zákonech
- **black-box model**, založený na pozorování, identifikaci

Analýza chování reálného systému je složitý proces (model představuje jedna či více diferenciálních či diferenčních rovnic vyššího řádu) $\Rightarrow$ numerické řešení.

Jak analýzu zjednodušit?

Matematické nářadí

Použití

Analýza či návrh systému v **časové oblasti** (vstupy a výstupy jsou funkcí času) jsou velmi pracné.

Převod do **frekvenční oblasti** (vstupy a výstupy jsou funkcí komplexní proměnné nazývané *úhlová frekvence*) nám

- poskytuje fundamentálně odlišný nástroj k pochopení funkce systému,
- často drasticky sníží složitost matematických výpočtů potřebných pro analýzu systému.

Obsah přednášky

Laplaceova transformace
Definice

Laplaceova transformace funkce $f(t)$, která je nanejvýš polynomiálního růstu, je definována integrálem

$$F(p) = \int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt$$

Tento vztah často zapisujeme $F(p) = \mathcal{L}\left[f(t)\right]$.

Zpětná Laplaceova transformace má tvar integrálu podél křivky v komplexní rovině

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(p)e^{pt}dp.$$

Laplaceova transformace

Vlastnosti: Linearita

Laplaceova transformace je lineární

$$\mathcal{L}\left[\sum_k a_k f_k(t)\right] = \sum_k a_k \mathcal{L}\left[f_k(t)\right]$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\sum_m b_m F_m(p)\right] = \sum_m b_m \mathcal{L}^{-1}\left[F_m(p)\right]$$

Laplaceova transformace

Vlastnosti: Změna měřítka

Věta o změně měřítka

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(p)] \qquad F(p) = \mathcal{L}[f(t)]$$

$$\frac{1}{b} f\left(\frac{t}{b}\right) = \mathcal{L}^{-1}[F(bp)] \qquad \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right) = \mathcal{L}[f(at)]$$

Laplaceova transformace

Vlastnosti: Posunutí

Věta o posunutí

$$\mathcal{L}\left[f(t-\tau)\right] = e^{-p\tau}\mathcal{L}\left[f(t)\right]$$

Laplaceova transformace

Vlastnosti: Konvoluce

Věta o konvoluci

$$\mathcal{L}\left[\int_0^\infty f(t-\tau)g(\tau)d\tau\right] = F(p)G(p)$$

Laplaceova transformace

Vlastnosti: Obraz derivace

Věta o obrazu derivace funkce $f(t)$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left[f(t)\right] &= F(p) \\
\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}f(t)\right] &= pF(p) - f(0) \\
\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}f(t)\right] &= p^2F(p) - pf(0) - f'(0) \\
&\vdots \\
\mathcal{L}\left[\frac{d^n}{dt^n}f(t)\right] &= p^nF(p) - p^{n-1}f(0) - p^{n-2}f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0)
\end{aligned}$$

Laplaceova transformace

Vlastnosti: Obraz integrálu

Věta o obrazu integrálu funkce $f(t)$

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)d\tau\right] = \frac{1}{p}F(p)$$

Tabulka Laplaceovy transformace

$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[F(p)\right]$	$F(p) = \mathcal{L}\left[f(t)\right]$
$\delta(t)$	1
$1(t)$	$\frac{1}{p}$
$e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{p+\alpha}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$
$\cos \omega t$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$

Tabulka Laplaceovy transformace

$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(p)]$	$F(p) = \mathcal{L}[f(t)]$
$e^{-\alpha t}\sin\omega t$	$\dfrac{\omega}{(p+\alpha)^2+\omega^2}$
$e^{-\alpha t}\cos\omega t$	$\dfrac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2+\omega^2}$
t^n	$\dfrac{n!}{p^{n+1}}$
$t^n e^{-\alpha t}$	$\dfrac{n!}{(p+\alpha)^{n+1}}$
$t\cos\omega t$	$\dfrac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}$
$t\sin\omega t$	$\dfrac{2\omega p}{(p^2+\omega^2)^2}$

Obsah přednášky

Inverzní Laplaceova transformace

K čemu to je

Jsme na půli cesty:

- Umíme převést diferenciální rovnici na lineární.
- Umíme si tedy spočíst $Y(p)$ – Laplaceův obraz hledané funkce $y(t)$ – jako podíl dvou polynomů.
- Ale co teď?

Potřebujeme jednoduchý nástroj, s jehož pomocí zvládneme inverzní Laplaceovu transformaci $Y(p) \to y(t)$.

Odvážní ji mohou počítat pomocí definičního integrálu. Jde to jednodušeji?

Inverzní Laplaceova transformace

Nuly a póly

Mějme racionální lomenou funkci

$$Y(p) = \frac{Q(p)}{N(p)}.$$

O této funkci říkáme, že má nulové body (nuly)

$$p_{0\nu} \Leftrightarrow Q(p_{0\nu}) = 0$$

a že má póly

$$p_{\infty\mu} \Leftrightarrow N(p_{\infty\mu}) = 0.$$

Znalost polohy pólů je důležitá (nejenom) pro zpětnou Laplaceovu transformaci.

Racionální lomená funkce

Jednoduché a násobné póly

Pokud má racionální lomená funkce jednoduché póly, potom

$$N(p) = \prod_{\mu=1}^{n} (p - p_{\infty\mu}) = (p - p_{\infty 1})\,(p - p_{\infty 2}) \ldots (p - p_{\infty n})$$

Situace pro násobné póly, kde

$$N(p) = (p - p_{\infty 1})^{\beta_1}\,(p - p_{\infty 2})^{\beta_2} \ldots (p - p_{\infty n})^{\beta_n}$$

je složitější, ale stále řešitelná, jak si ukážeme později.

Racionální lomená funkce

Rozklad na parciální zlomky

Každou racionální lomenou funkci lze rozložit na součet parciálních zlomků ve tvaru

$$
\begin{aligned}
Y(p) = \frac{Q(p)}{N(p)} &= \sum_{\mu=1}^{n} \frac{k_\mu}{p - p_{\infty\mu}} \\
&= \frac{k_1}{p - p_{\infty 1}} + \frac{k_2}{p - p_{\infty 2}} + \cdots + \frac{k_n}{p - p_{\infty n}},
\end{aligned}
$$

kde k_μ se nazývají rezidua.

Rezidua určíme například

- pomocí limit v pólech
- porovnáním koeficientů polynomů

Racionální lomená funkce
Rezidua pomocí limit

Pro rezidua platí

$$\begin{aligned} k_\mu &= \lim_{p \to p_{\infty\mu}} (p - p_{\infty\mu}) \frac{Q(p)}{N(p)} \\ &= Q(p_{\infty\mu}) \lim_{p \to p_{\infty\mu}} (p - p_{\infty\mu}) \frac{1}{N(p)} \\ &= Q(p_{\infty\mu}) \frac{1}{N'(p_{\infty\mu})} \end{aligned}$$

kde

$$N'(p_{\infty\mu}) = \prod_{i=1, i \neq \mu}^{n} (p - p_{\infty i}).$$

Inverzní Laplaceova transformace

Heavisideův vzorec

Protože

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p-\alpha}\right] = e^{\alpha t},$$

dostaneme

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{Q(p)}{N(p)}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\sum_{\mu=1}^{n}\frac{k_\mu}{p-p_{\infty\mu}}\right] = \sum_{\mu=1}^{n} k_\mu e^{p_{\infty\mu}t}.$$

Tím jsme dokázali Heavisideův vzorec pro zpětnou transformaci racionální lomené funkce s jednoduchými póly.

Heavisideův vzorec

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{Q(p)}{N(p)}\right] = \sum_{\mu=1}^{n} \frac{Q(p_{\infty\mu})}{N'(p_{\infty\mu})} e^{p_{\infty\mu} t}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{Q(p)}{pN(p)}\right] = \frac{Q(0)}{N(0)} + \sum_{\mu=1}^{n} \frac{Q(p_{\infty\mu})}{p_{\infty\mu} N'(p_{\infty\mu})} e^{p_{\infty\mu} t}$$

Inverzní Laplaceova transformace
Vícenásobné póly

Jestliže

$$N(p) = (p - p_1)^{\beta_1}(p - p_2)^{\beta_2} \dots (p - p_n)^{\beta_n}$$

má násobné kořeny, inverzní Laplaceova transformace má tvar

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{Q(p)}{N(p)}\right] &= e^{p_1 t}\left[k_1^{(1)} + k_1^{(2)}\frac{t}{1!} + \dots k_1^{(\beta_1)}\frac{t^{\beta_1 - 1}}{(\beta_1 - 1)!}\right] \\ &+ e^{p_2 t}\left[k_2^{(1)} + k_2^{(2)}\frac{t}{1!} + \dots k_2^{(\beta_2)}\frac{t^{\beta_2 - 1}}{(\beta_2 - 1)!}\right] \\ &\vdots \\ &+ e^{p_n t}\left[k_n^{(1)} + k_n^{(2)}\frac{t}{1!} + \dots k_n^{(\beta_n)}\frac{t^{\beta_n - 1}}{(\beta_n - 1)!}\right]\end{aligned}$$

Obsah přednášky

Laplaceova transformace – příklad 1

Rozklad na parciální zlomky

Nechť

$$Y(p) = \frac{Q(p)}{N(p)} = \frac{p+3}{(p-2)^2(p+5)(p+7)}.$$

Rozklad na parciální zlomky hledáme ve tvaru

$$\frac{Q(p)}{N(p)} = \frac{k_1^{(2)}}{(p-2)^2} + \frac{k_1^{(1)}}{p-2} + \frac{k_2}{p+5} + \frac{k_3}{p+7} \tag{1}$$

Laplaceova transformace – příklad 1

Rozklad na parciální zlomky

Rovnici vynásobíme členem s nejvyšší mocninou, $(p-2)^2$:

$$\frac{(p+3)(p-2)^2}{(p-2)^2(p+5)(p+7)} = \\ = k_1^{(2)} + k_1^{(1)}(p-2) + \frac{k_2(p-2)^2}{p+5} + \frac{k_3(p-2)^2}{p+7} \tag{2}$$

a nalezneme limitu pro $p \to 2$

$$\frac{2+3}{(2+5)(2+7)} = \frac{5}{63} = k_1^{(2)} \tag{3}$$

Laplaceova transformace – příklad 1

Rozklad na parciální zlomky

Po dosazení za $k_1^{(2)}$ obdržíme

$$\frac{p+3}{(p-2)^2(p+5)(p+7)} = \frac{\frac{5}{63}}{(p-2)^2} + \frac{k_1^{(1)}}{p-2} + \frac{k_2}{p+5} + \frac{k_3}{p+7}.$$

Výraz $\dfrac{5}{63(p-2)^2}$ odečteme od obou stran:

$$\frac{p+3}{(p-2)^2(p+5)(p+7)} - \frac{\frac{5}{63}}{(p-2)^2} = \frac{k_1^{(1)}}{p-2} + \frac{k_2}{p+5} + \frac{k_3}{p+7}.$$

Laplaceova transformace – příklad 1

Rozklad na parciální zlomky

Upravíme na

$$\frac{-5p^2+3p+14}{63(p-2)^2(p+5)(p+7)} = \frac{k_1^{(1)}}{p-2} + \frac{k_2}{p+5} + \frac{k_3}{p+7}.$$

Čitatel levé strany musí být dělitelný $(p-2)$ beze zbytku. Výsledná rovnice je po úpravě

$$\frac{-5p+2}{63(p-2)(p+5)(p+7)} = \frac{k_1^{(1)}}{p-2} + \frac{k_2}{p+5} + \frac{k_3}{p+7}.$$

Laplaceova transformace – příklad 1
Rozklad na parciální zlomky

Pro tuto rovnici se výpočet k_μ redukuje na případ s jednoduchými póly a platí

$$\begin{aligned}
k_1^{(1)} &= \lim_{p\to 2} \frac{-5p+2}{63(p+5)(p+7)} = -\frac{8}{3969} \\
k_2 &= \lim_{p\to -5} \frac{-5p+2}{63(p-2)(p+7)} = -\frac{3}{98} \\
k_3 &= \lim_{p\to -7} \frac{-5p+2}{63(p-2)(p+5)} = \frac{37}{1134}
\end{aligned}$$

Laplaceova transformace – příklad 1

Inverzní transformace

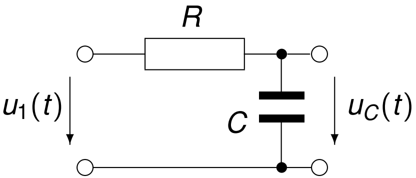
Zpětnou transformaci provedeme Heavisideovým vzorcem a dostaneme

$$y(t) = \frac{5}{63} t e^{2t} - \frac{8}{3969} e^{2t} - \frac{3}{98} e^{-5t} + \frac{37}{1134} e^{-7t}.$$

Laplaceova transformace – příklad 2

RC člen

Výstupní napětí $u_C(t)$ integračního RC článku



lze popsat diferenciální rovnicí prvního řádu pro $y(t) = u_C(t)$

$$RC\,\frac{d}{dt}y(t) + y(t) = u_1(t), \tag{4}$$

kde $u_1(t) = U_0 \cdot \mathbf{1}(t)$ je připojené stejnosměrné napětí U_0.
Počáteční hodnota výstupního napětí je $y(0) = U_A$.

RC člen – příklad 2

Postup řešení diferenciální rovnice

1. provedeme Laplaceovu transformaci původní diferenciální rovnice pro $y(t)$ a získáme tak algebraickou rovnici pro neznámou veličinu $Y(p)$
2. s použitím počátečních podmínek nalezneme řešení algebraické rovnice ve tvaru racionální lomené funkce $Y(p) = \dfrac{Q(p)}{N(p)}$,
3. nalezneme rozklad racionální lomené funkce na parciální zlomky
4. provedeme zpětnou Laplaceovu transformaci a získáme tak řešení původní diferenciální rovnice pro $y(t) \mid t \geq 0$

RC člen – příklad 2

Transformace na algebraickou rovnici

Vstupní namětí je stejnosměrné (konstantní), pro $t \leq 0$ je transformace $\mathcal{L}[U_0] = \mathcal{L}[U_0 \cdot \mathbf{1}(t)]$.
Transformace původní diferenciální rovnice na algebraickou, $y(t) \rightarrow Y(p)$ je pak

$$RC\,[\,pY(p) - y(0)\,] + Y(p) = U_0 \cdot \frac{1}{p} \tag{5}$$

RC člen – příklad 2

Nalezení řešení

S použitím počátečních podmínek (v tomto případě $y(0) = U_A$) nalezneme řešení algebraické rovnice ve tvaru racionální lomené funkce.

$$Y(p) = \frac{U_0 + pU_ARC}{p(1 + pRC)} \tag{6}$$

RC člen – příklad 2

Rozklad na parciální zlomky

Nalezneme rozklad racionální lomené funkce (6) na parciální zlomky

$$Y(p) = \frac{U_0 + pU_A RC}{p(1 + pRC)} = \frac{k_1}{p} + \frac{k_2}{1 + pRC}, \tag{7}$$

a určíme k_1 a k_2

$$\begin{aligned} k_1 &= \lim_{p \to 0} \frac{U_0 + pU_A RC}{(1 + pRC)} = U_0, \\ k_2 &= \lim_{p \to -1/RC} (1 + pRC) \frac{U_0 + pU_A RC}{p} = -RC(U_0 - U_A). \end{aligned}$$

Získáme tak tvar $Y(p)$ vhodný pro zpětnou transformaci:

$$Y(p) = \frac{U_0}{p} - \frac{U_0 - U_A}{p + 1/RC}. \tag{8}$$

RC člen – příklad 2

Zpětná transformace

Zpětnou transformaci získáme řešení původní diferenciální rovnice pro $t \geq 0$ ve tvaru

$$y(t) = U_0 - (U_0 - U_\mathrm{A})e^{-\frac{t}{RC}}. \tag{9}$$