Modelování systémů a procesů

ČVUT Fakulta dopravní

Vzory příkladů na Laplaceovu transformaci ke zkoušce

Příklad VL1

Nalezněte přenosovou funkci $H(p)$ spojitého LTI systému popsaného stavovými rovnicemi

$$\begin{aligned} x'(t) &= \mathbf{A}\,x(t) + \mathbf{B}\,u(t) \\ y(t) &= \mathbf{C}\,x(t) + \mathbf{D}\,u(t) \end{aligned}$$

Při odvození použijte Laplaceovu transformaci.

Příklad VL2

Určete podmínky stability spojitého systému s impulsní odezvou

$$h(t) = e^{at} \cdot \sin bt$$

Příklad VL3

Určete, jakých hodnot může nabývat konstanta a, má-li být spojitý systém popsaný rovnicí

$$y''(t) + 2y'(t) + (1 + a^2)y(t) = u(t)$$

stabilní.

Jaký tvar má přenosová funkce příslušná výše uvedené diferenciální rovnici?

Nalezněte $y(t)$ pro $x(t) = e^{bt}$.

Příklad VL4

Určete, jakých hodnot mohou nabývat konstanty a a b, má-li být spojitý systém popsaný rovnicí

$$y''(t) + (a - b)\,y'(t) - ab\,y(t) = u(t)$$

stabilní?

Jaký tvar má přenosová funkce příslušná výše uvedené diferenciální rovnici?

Nalezněte $y(t)$ pro $x(t) = t\,e^{abt}$.

Příklad VL5

Určete hotnoty a, b, c, pro něž je systém, popsaný přenosovou funkcí

$$H(p) = \frac{1}{(p-a)\left(p-\frac{b}{a}\right)\left(p-\frac{c}{b}\right)}$$

stabilní.

Pro obecný vstup $u(t)$ sestavte diferenenciální rovnici vnějšího popisu systému s výše uvedeným přenosem.

Jaká bude impulsní odezva $h(t)$ tohoto systému?

Příklad VL6

Lineární spojitý systém je popsán stavovými rovnicemi

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= a \cdot x_2(t) \\ x_2'(t) &= x_1(t) \\ y(t) &= x_1(t) \end{aligned}$$

s počátečními podmínkami $x_1(0) = a$, $x_2(0) = -1$. Sestavte diferenciální rovnici pro $y(t)$ a řešte ji pomocí Laplaceovy transformace. Určete, pro jaké hodnoty a je uvedený systém stabilní.

Modelování systémů a procesů

ČVUT Fakulta dopravní

Vzory příkladů na $\mathcal{Z}$-transformaci ke zkoušce

Příklad VZ1

Nalezněte přenosovou funkci $H(z)$ diskrétního LTI systému popsaného stavovými rovnicemi

$$\begin{aligned} x(n+1) &= \mathbf{M}\, x(n) + \mathbf{N}\, u(n) \\ y(n) &= \mathbf{P}\, x(n) + \mathbf{Q}\, u(n) \end{aligned}$$

Při odvození použijte $\mathcal{Z}$-transformaci.

Příklad VZ2

Určete podmínky stability diskrétního systému s časovou odezvou

$$y(n) = \frac{a^n - b^n}{c - d}$$

Příklad VZ3

Určete, jakých hodnot může nabývat konstanta a, má-li být diskrétní systém popsaný rovnicí

$$y(n-2) + 2 \cdot y(n-1) + (1 + a^2) \cdot y(n) = x(n)$$

stabilní.

Nalezněte $y(n)$ pro $x(n) = \delta(n)$, kde $\delta(n)$ je jednotkový impuls v nule.

Jaký tvar má přenosová funkce příslušná výše uvedené diferenční rovnici?

Příklad VZ4

Určete, jakých hodnot může nabývat konstanta a, má-li být diskrétní systém popsaný rovnicí

$$y(n+1) + a \cdot y(n) = x(n), \quad y(0) = 0$$

stabilní.

Nalezněte $y(n)$ pro $x(n) = u(n)$, kde $u(n)$ je jednotkový skok v nule.

Jaký tvar má přenosová funkce příslušná výše uvedené diferenční rovnici?

Příklad VZ5

Určete $y(n)$, které je řešením diferenční rovnice

$$y(n) - y(n-1) + \frac{3}{4} \cdot y(n-2) = u(n), \quad y(0) = 0, y(-1) = 0$$

pro

1. vstupní signál $u(n) = \mathbf{1}(n)$, kde $\mathbf{1}(n)$ je jednotkový skok v bodě 0,
2. vstupní signál $u(n)$ je periodická posloupnost $u(n) = u(k+4)$, kde jednotlivé hodnoty během periody jsou

$$\begin{array}{rcl} u(0) & = & 0, \\ u(1) & = & u(3) \;=\; 2, \\ u(2) & = & 4, \end{array}$$

   (tip: pro výpočet $\mathcal{Z}$-obrazu periodické posloupnosti lze s výhodou použít věty o posunutí a vztahu $\mathcal{Z}[u(n)] = \mathcal{Z}[u(n+4)]$).

Příklad VZ6

Lineární diskrétní systém je popsán stavovými rovnicemi

$$\begin{array}{rcl} x_1(n+1) & = & x_2(n) \\ x_2(n+1) & = & a \cdot x_1(n) \\ y(n) & = & x_1(n) \end{array}$$

s počátečními podmínkami $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = -a$. Nalezněte diferenční rovnici pro $y(n)$ a řešte ji pomocí $\mathcal{Z}$-transformace. Určete, pro jaké hodnoty a je uvedený systém stabilní.