Příklady na Z-transformaci

Jan Přikryl

20. května 2005*

Vím, že někteří se dožadovali příkladů řešených do posledních podrobností, ale u těch, které jsou uvedeny níže, myslím není třeba příliš pokynů k řešení. Vzhledem k tomu, jaké výkony jsou občas k vidění na cvičeních, vám vřele doporučuji:

- procvičit si ještě jednou rozklad na parciální zlomky,
- procvičit si algebraické úpravy rovnic (zejména úpravy typu minus před závorkou, násobení/dělení výrazu konstantou, nezapomenout přičítat/odečítat na obou stranách rovnice a podobně),
- naučit se opět řešit kvadratické rovnice.

1 Příklad 1

$$\begin{aligned} x(n+2) + 3x(n+1) + 2x(n) &= 6 \cdot \mathbf{1}(n) \\ x(0) &= 1 \\ x(1) &= -1 \end{aligned}$$

Rovnici transformujeme do Z-roviny:

$$z^2 X\left(z\right) - x\left(0\right) z^2 - x\left(1\right) z + 3\, zX\left(z\right) - 3\, x\left(0\right) z + 2\, X\left(z\right) = 6\, \frac{z}{z-1}$$

a převedeme na

$$z^2 X(z) - z^2 + z + 3zX(z) - 3z + 2X(z) = 6 \cdot \frac{z}{z-1}$$

a dále upravíme na

$$X(z) = \frac{z}{z-1} + \frac{2z}{z+2} - \frac{2z}{z+1}$$

a z toho

$$x(n) = 1 + 2 \cdot (-2)^n - 2 \cdot (-1)^n = 1 - 2 \cdot (-1)^n - (-2)^{n+1}.$$

*Toto je opravená a rozšířená verze příkladů z 21. května 2004. Neznamená to nutně, že je bez chyb, ale mělo by jich být významně méně, než v původní verzi.

2 Příklad 2

$$\begin{aligned} x\,(n+2)+3\,x\,(n+1)+2\,x\,(n) &= (-2)^n \\ x(0) &= 1 \\ x(1) &= -4 \end{aligned}$$

Rovnici transformujeme a dosadíme za počáteční podmínky:

$$z^2X\,(z)+2\,X\,(z)+3\,zX\,(z)+z-z^2=\frac{z}{z+2}.$$

Pro rozklad na parciální zlomky upravíme na

$$\frac{X\,(z)}{z}=\frac{z^2+z-1}{(z+2)\,(z^2+3\,z+2)},$$

z čehož vyjde

$$X\,(z)=2\,\frac{z}{z+2}-\frac{z}{(z+2)^2}-\frac{z}{z+1}.$$

Zpětnou transformací obdržíme

$$x(n)=2\cdot(-2)^n+\frac{1}{2}\cdot n\cdot(-2)^n-(-1)^n=\left[2+\frac{n}{2}\right](-2)^n-(-1)^n\,.$$

3 Příklad 2a

Varianta výše uvedeného s jinými počátečními podmínkami.

$$\begin{aligned} x\,(n+2)+3\,x\,(n+1)+2\,x\,(n) &= (-2)^n \\ x(0) &= -1 \\ x(1) &= 1 \end{aligned}$$

Rovnici transformujeme a dosadíme za počáteční podmínky:

$$z^2X\,(z)+2\,X\,(z)+3\,zX\,(z)+2\,z+z^2=\frac{z}{z+2}.$$

Pro rozklad na parciální zlomky upravíme na

$$\frac{X\,(z)}{z}=-\frac{z+3}{(z+2)^2},$$

z čehož vyjde

$$X\,(z)=-\frac{z}{z+2}-\frac{z}{(z+2)^2}.$$

Zpětnou transformací obdržíme

$$x(n)=-\,(-2)^n+\frac{1}{2}\cdot n\cdot(-2)^n=\left[\frac{n}{2}-1\right](-2)^n\,.$$

4 Příklad 3

$$\begin{aligned} x\,(n+3) + 7\,x\,(n+2) + 16\,x\,(n+1) + 12\,x\,(n) &= 0 \\ x(0) &= 1 \\ x(1) &= 0 \\ x(2) &= -1 \end{aligned}$$

Rovnici transformujeme s dosazením za počáteční podmínky a dostaneme vztah

$$z^3 X\,(z) + 12\,X\,(z) + 16\,zX\,(z) + 7\,z^2 X\,(z) - z^3 - 15\,z - 7\,z^2 = 0,$$

jenž upravíme na

$$\frac{X\,(z)}{z} = \frac{z^2 + 7\,z + 15}{z^3 + 7\,z^2 + 16\,z + 12}.$$

Rozklad na parciální zlomky vyjde

$$X\,(z) = -2\,\frac{z}{z+2} + 5\,\frac{z}{(z+2)^2} + 3\,\frac{z}{z+3},$$

z čehož po zpětné transformaci obdržíme

$$x(n) = -2 \cdot (-2)^n - \frac{5}{2} \cdot n \cdot (-2)^n + 3 \cdot (-3)^n$$

5 Příklad 4

$$\begin{aligned} x\,(n+3) - x\,(n+2) - 4\,x\,(n+1) + 4\,x\,(n) &= 36\,n\,(-1)^n \\ x(0) &= -1 \\ x(1) &= 0 \\ x(2) &= 1 \end{aligned}$$

Rovnici převedeme s dosazením za počáteční podmínky a dostaneme vztah

$$z^3 X\,(z) + 4\,X\,(z) - 4\,zX\,(z) - z^2 X\,(z) + z^3 - 5\,z - z^2 = -36\,\frac{z}{(z+1)^2},$$

jenž upravíme na

$$\frac{X\,(z)}{z} = -\frac{z^4 + z^3 - 6\,z^2 - 11\,z + 31}{(z+1)^2\,(z^3 - z^2 - 4\,z + 4)}.$$

Rozklad na parciální zlomky vyjde

$$X(z) = -6\,\frac{z}{(z+1)^2} - \frac{1}{4}\,\frac{z}{z-2} + \frac{4}{3}\,\frac{z}{z-1} - \frac{37}{12}\,\frac{z}{z+2} + \frac{z}{z+1}.$$

Z něj zpětnou transformací

$$x(n) = 6\,n\,(-1)^n - \frac{1}{4}\,2^n + \frac{4}{3} - \frac{37}{12}\,(-2)^n + (-1)^n\,.$$

Tak si to užijte.