

MSP 1

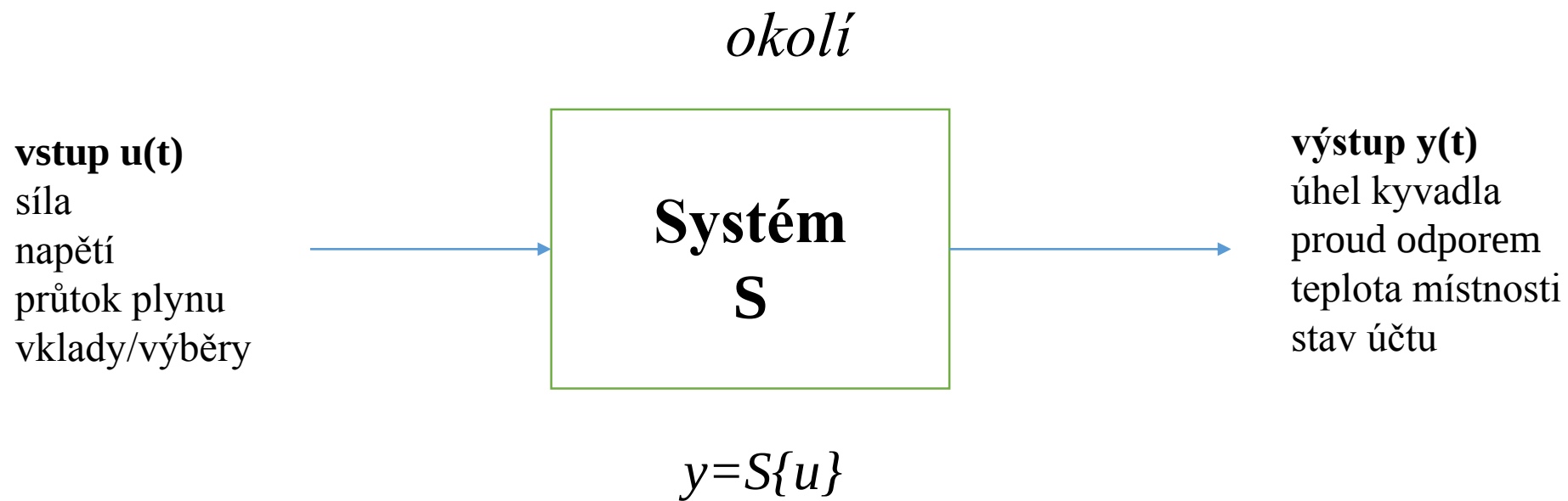
Úvod do systémů

System (soustava)

- část reality oddělená od zbytku (okolí) – značíme **S**
- sledujeme (měříme) v čase alespoň jednu výstupní veličinu (signál) – **výstup** $y(t)$, také odezva (response)
- často mívá i vstupní veličiny – **vstup** $u(t)$ neboli řízení, buzení
- jde vlastně o zobrazení, které vstupnímu signálu (funkci!) přiřazuje výstupní signál:

$$y(t) = S\{u(t)\}$$

System



Spojité a diskrétní systém (v čase)

- **spojitý** systém – čas nabývá hodnot z nějakého reálného intervalu, systémy klasické fyziky, užíváme derivace, integrály,...

např. oscilátor: $my''(t) + ky(t) = F(t); t \geq 0$

($y(t)$ poloha, m hmotnost kmitajícího tělesa, k tuhost pružiny, F vnější síla působící na těleso)

- **diskrétní** systém – čas nabývá celočíselných hodnot, diskrétní signál často vzniká tzv. *vzorkováním* spojitého signálu (*sampling*) – periodicky sledujeme hodnoty ze spojitého signálu, užíváme difference, sumy,...

např. spoření: $y[n+1] = (1+i) \cdot y[n] + u[n+1]; n=0, 1, \dots$

(i je úroková míra, $y[n]$ zůstatek na účtu v čase n , $u[n]$ vklad/výběr v čase n)

Analogový a digitální systém

- **analogové** systémy – hodnoty všech veličin (výstup, ...) z nějakého intervalu reálných čísel („spojité ve stavu“), těmi se budeme zabývat
- **digitální** (číslicové) systémy – hodnoty veličin diskrétní (celočíselné), tzv. **kvantované** (např. u CD 16 bitů tj. $65\,536 = 2^{16}$ hodnot), pro převod se používají tzv. AD a DA převodníky)

Lineární a nelineární systém

- **linearita** je nejdůležitější vlastnost, platí tzv. **princip superpozice** (skládání) signálů, zahrnuje aditivitu a homogenitu

- **aditivita** – výstup pro součet vstupů je součtem výstupů

$$S\{u_1(t)+u_2(t)\}=S\{u_1(t)\}+S\{u_2(t)\}; \text{ pro každé signály } u_1(t), u_2(t)$$

- **homogenita** – výstup pro konstantní násobek je stejným násobkem výstupu

$$S\{k.u(t)\}=k.S\{u(t)\}; \text{ pro každé reálné číslo } k$$

- obrazem **lineární kombinace** vstupů je stejná lineární kombinace výstupů

- S je tedy **lineární zobrazení**

- nelineární systémy mnohem složitější (modelujeme často numericky, např. v Simulinku)

Stacionární systém (časově invariantní, TI)

- důležitá vlastnost, „systém se nemění v čase“ (veličiny ano)
- při libovolném posunu (zpoždění) vstupního signálu je výstupem stejně posunutý signál

$$y(t)=S\{u(t)\}$$

$$y(t-d)=S\{u(t-d)\}, \text{ pro každé } d$$

např. $y[n+1] - n.y[n]=u[n]$ – nestacionární (časové proměnný, TV)

$$y''(t) + \omega^2 y(t) = u(t); t \geq 0, \omega = \text{konst} - \text{je stacionární (TI)}$$

- v TI systému se čas t se může vyskytovat jen v argumentech signálů (příp. diferenciálech dt), ne explicitně např. u koeficientů

LTI systém, autonomní systém

- **LTI** systém – lineární a stacionární (časově invariantní) – ty budeme převážně studovat
- **autonomní** systém – bez vstupu (s nulovým vstupem), rovnice popisu jsou „bez pravé strany“, homogenní

Např. oscilátor může kmitat nuceně (vstupem je vnější síla) nebo autonomně, nezávisle (bez vnější síly)

- **SISO** systém (single input, single output) – jeden vstup i výstup
- **MIMO** systém (multiple input, multiple output) – více vstupů nebo výstupů

Dynamický a statický systém

- **dynamický** systém – popsáný např. diferenciálními nebo diferenčními rovnicemi, obsahuje zpoždění, změna hodnoty vstupu se neprojeví hned na výstupu
- **statický** systém – změna vstupu se projeví okamžitě na výstupu, např. rezistor: $y = G \cdot u$ (y elektrický proud, u napětí, $G = 1/R$ vodivost)

Deterministický a stochastický systém

- **deterministický** systém – všechny veličiny deterministické (nenáhodné)
- **stochastický** systém – aspoň jedna veličina náhodná, hodnoty výstupu už není jednoznačně určen vstupem a systémem, sledujeme např. střední hodnotu, rozdělení, ...

Např. $Y[n+1] - 2.Y[n] = U[n]$; $U[n]$ jsou nezávislé náhodné veličiny s rovnoměrným rozdělením na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$

Vnější popis spojitého LTI systému

Pomocí obyčejné lineární diferenciální rovnice k -tého řádu s konstantními koeficienty:

$$y^{(k)}(t) + a_{k-1}y^{(k-1)}(t) + \dots + a_1y'(t) + a_0y(t) = u(t); \quad 0 \leq t < \infty$$

parametry systému a_i nezávisí na čase (konstanty).

Pro určení výstupu potřebujeme znát vstup $u(t)$ a k počátečních podmínek $y(0)$, $y'(0), \dots, y^{(k-1)}(0)$.

Např. $y''(t) + 2y'(t) + 25y(t) = \sin t$; $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$ (*nucené kmity tlumeného harmonického oscilátoru*).

Vnější popis diskrétního LTI systému

Pomocí lineární diferenční rovnice k-tého řádu s konstantními koeficienty:

$$y[n+k] + a_{k-1} y[n+k-1] + \dots + a_1 y[n+1] + a_0 y[n] = u[n]; n=0,1,2, \dots$$

parametry systému a_i nezávisí na čase (konstanty).

Pro určení výstupu potřebujeme znát vstup $u[n]$ a k počátečních podmínek $y[0], y[1], \dots, y[k-1]$.

Např. systém s popisem: $y[n+2] - 3y[n+1] + 2y[n] = n; y[0] = 1, y[1] = 5$.

Shrnutí

Budeme se zabývat dynamickými deterministickými analogovými lineárními stacionárními (**LTI**) systémy s vnějším popisem:

- pro **spojité** systémy

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = u(t); 0 \leq t < \infty, a_k = \text{konst},$$

- pro **diskrétní** systémy

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n + k] = u[n]; n=0,1,2 \dots (a_k = \text{konst}).$$