

Přednáška č. 2

DISKRÉTNÍ NÁHODNÁ VELIČINA

18. 2. 2021

P. Pecherková

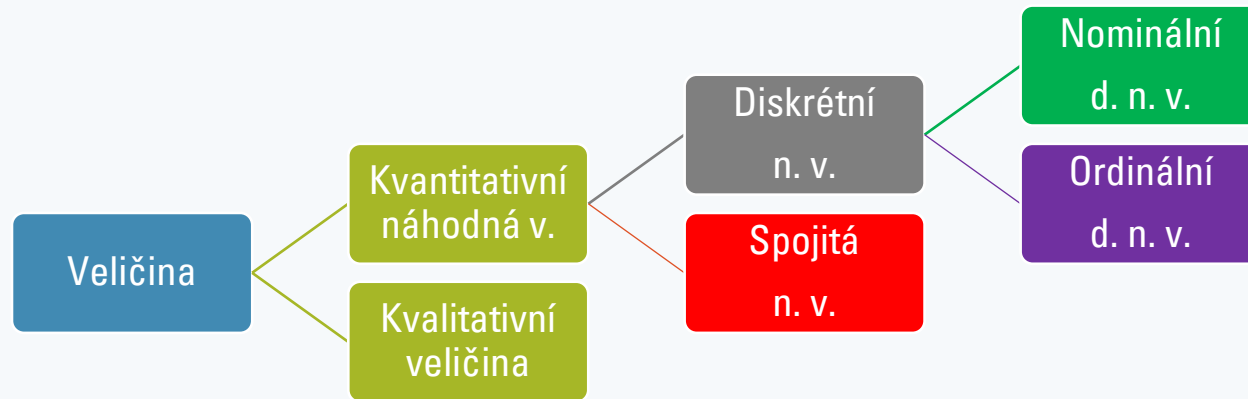
NÁHODNÁ VELIČINA

- **Veličina (proměnná)** – znak, kterým lze statistickou jednotku charakterizovat
 - Osoba (statistická jednotka) – věk, výška, váha, BMI, doba učení... (veličina, proměnná)
 - Automobil (statistická jednotka) – rychlost, sjetí pneumatik, zařazená rychlost ... (veličina, proměnná)
- **Náhodný pokus** – pokus, z něhož získáváme náhodné výsledky (dává různé za stejných podmínek)
- **Náhodná veličina** – Náhodná veličina X je zobrazení výsledků náhodné pokusu Ω do množiny

reálných čísel:

$$X: \Omega \rightarrow R$$





- Kvalitativní veličina – veličina, která je zpravidla popisná a nelze jí vyjádřit číselně (jiné v dotazníku)
- Kvantitativní veličina – číselná nebo nečíselná veličina, kterou ale lze vyjádřit číselně
 - Rub, líc $\rightarrow \{0; 1\}$
 - Světlo, šero, tma $\rightarrow \{0; 1; 2\}$
 - Rychlost vozidel $\rightarrow \{90,888; 68,25; 160,04 \dots\}$
- Diskrétní náhodná veličina – veličina, která má konečný a spočetný počet realizací
 - Nominální d. n. v. – veličina, kde (přiřazené) hodnoty nemají žádný další význam
 - Ordinální d. n. v. – veličina, kde (přiřazené) hodnoty jsou uspořádané
- Spojitá náhodná veličina – veličina, která má nekonečný nebo nespočetný počet realizací

DISKRÉTNÍ NÁHODNÁ VELIČINA – ÚPLNÝ POPIS

- Neúplný popis – popisná statistika
 - Charakteristiky polohy
 - Charakteristiky variability
- Úplný popis
 - Pravděpodobnostní funkce
 - Distribuční funkce

Házeli jsme 200x kostkou. Z těchto hodů jsme zjistili, že průměrná hodnota na kostce byla $\bar{x} = 3,25$ a medián $\tilde{x}_{0,5} = 3$. Minimum bylo $\min(x) = 1$ a $\max(x) = 6$.

PRAVDĚPODOBNOSTNÍ FUNKCE

Def.: Pro diskrétní náhodnou veličinu X s realizacemi x_i , $i = 1, 2, \dots, n$ definujeme pravděpodobnostní funkci f_X jako reálnou funkci diskrétnímu argumentu jako

$$f_X(x_i) = P(X = x_i)$$

Hodnota pravděpodobnostní funkce v bodě x_i se rovná pravděpodobnosti této funkce.

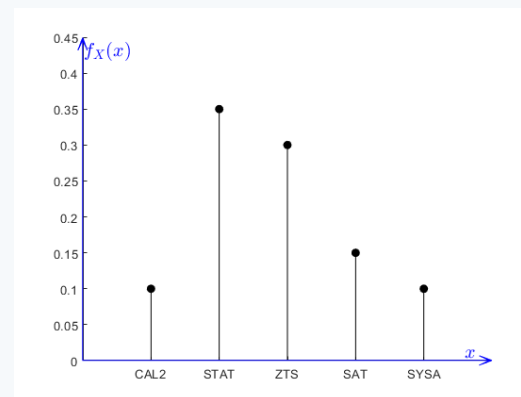
Vlastnosti pravděpodobnostní funkce.

- Všechny její členy jsou nezáporné
- Součet všech jejích členů je roven jedné

Zeptali jsme se 100 studentů, který předmět mají nejraději.

Odpověděli nám následovně:

	CAL2	STAT	ZTS	statika	SYSA
Četnost (n_i)	10	35	30	15	10
Pravd. (p_i)	0,1	0,35	0,3	0,15	0,1



DISTRIBUČNÍ FUNKCE

Distribuční funkce F_X reálného argumentu x pro náhodnou veličinu X je definována vztahem

$$F_X(x) = P(X \leq x)$$

Distribuční funkce je součet pravděpodobností, které jsou menší nebo rovno danému bodu x .

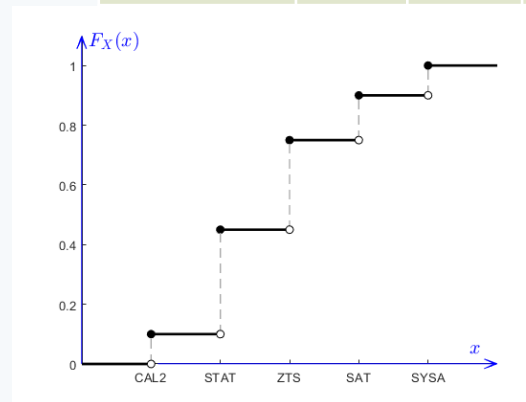
Vlastnosti distribuční funkce:

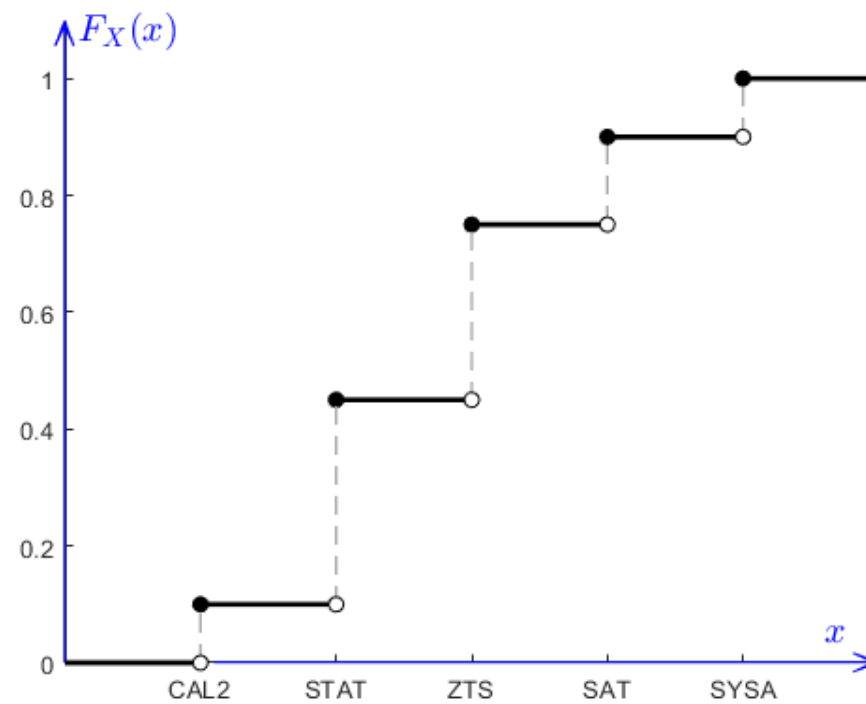
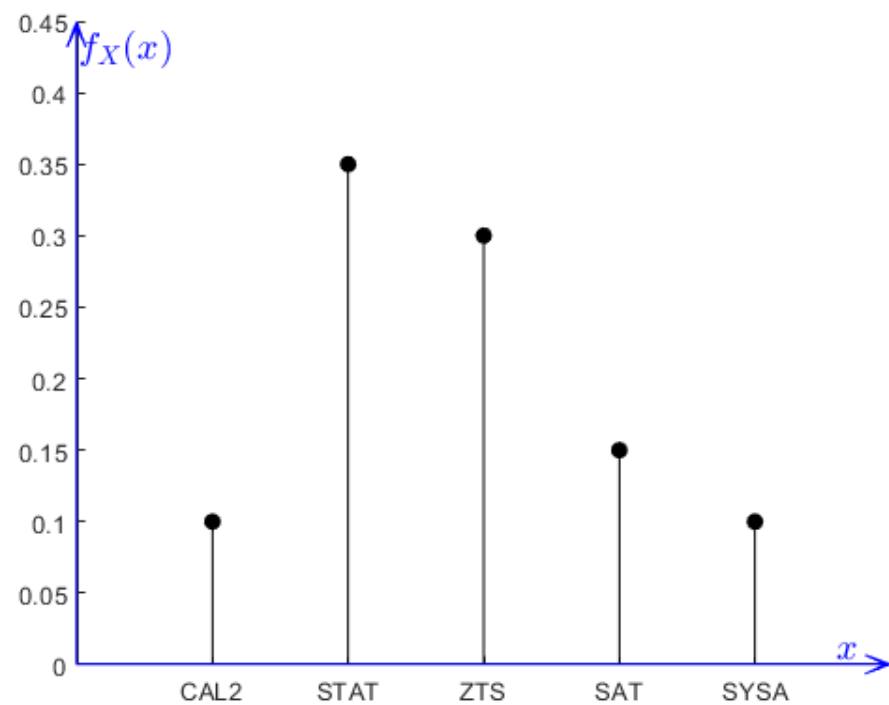
- Neklesající v celém oboru
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$

Zeptali jsme se 100 studentů, který předmět mají nejraději.

Odpověděli nám následovně:

	CAL2	STAT	ZTS	statika	SYSA
Četnost (n_i)	10	35	30	15	10
Pravd. (p_i)	0,1	0,35	0,3	0,15	0,1
F(x)					

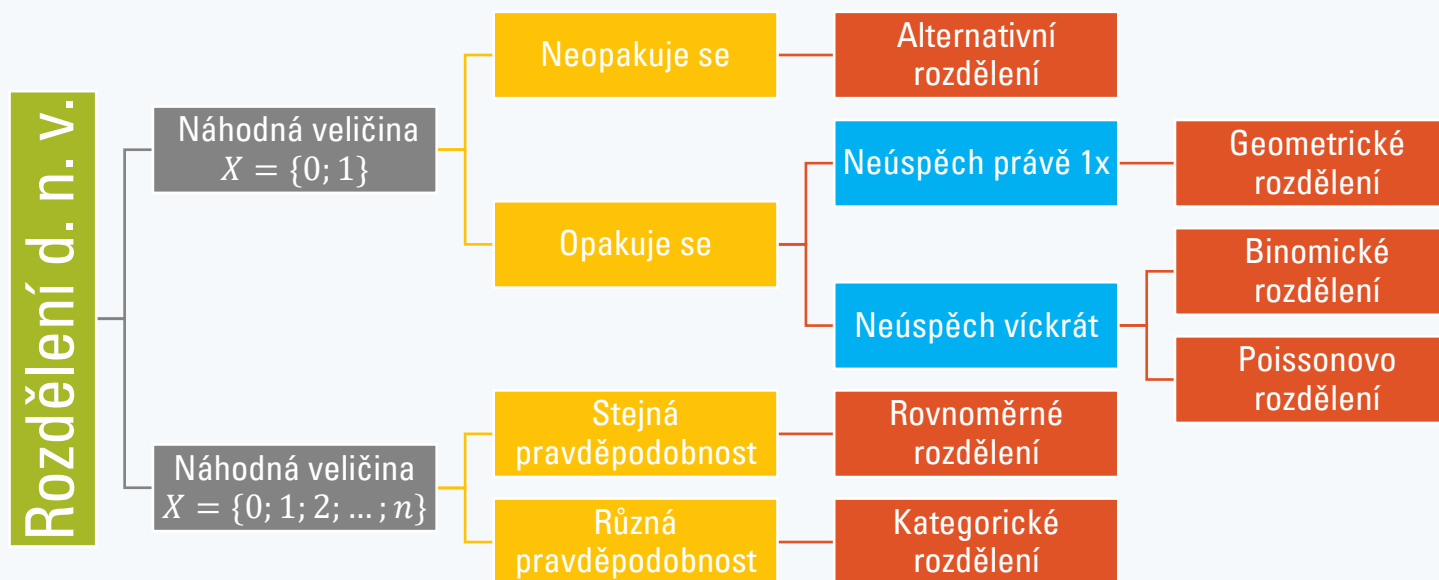




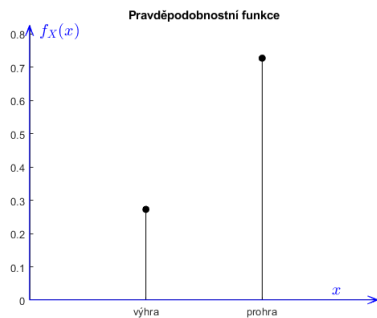
	1	2	3	4	5
Četnost (n_i)	10	20	30	30	10
Pravd. (p_i)	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1

ROZDĚLENÍ DISKRÉTNÍ NÁHODNÉ VELIČINY

- Některé chování náhodné veličiny je popsáno pomocí různých již známých rozdělení
- Těchto rozdělení je velké množství, budeme se učit základní

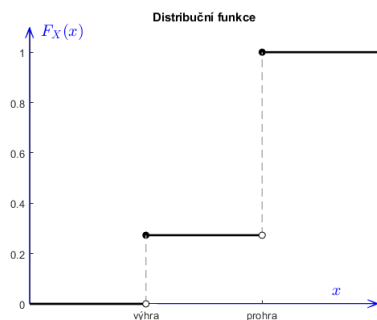


Alternativní rozdělení = Alt(p)



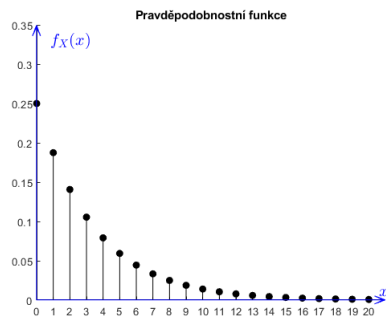
- Jedná se o rozdělení popisující jeden pokus, který může mít dva různé výsledky: $\{0; 1\}$
- Pravděpodobnostní funkce:

$$f(x) = p^x(1-p)^{1-x} \quad x \in \{0,1\}, p \in (0; 1)$$



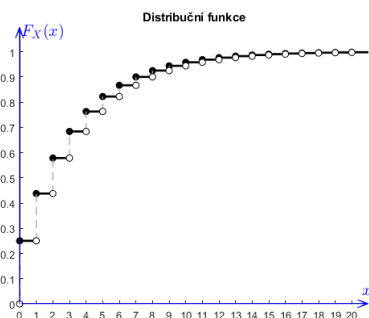
- Distribuční funkce: $F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1-p & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$
- Střední hodnota: $E[X] = p$
- Rozptyl: $D[X] = p(1-p)$

Geometrické rozdělení $G(p)$



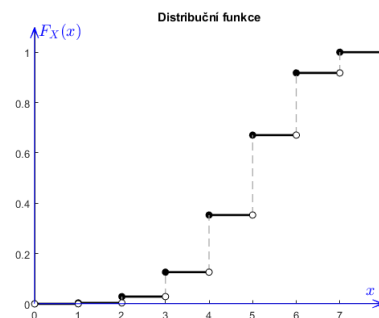
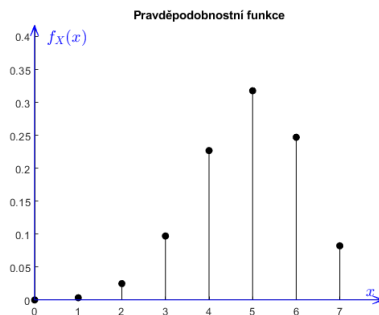
- Jedná se o rozdělení, které popisuje výsledek několika pokusů, než nastane první neúspěch. Pokus může mít dva různé výsledky: $\{0; 1\}$
- Pravděpodobnostní funkce:

$$f(x) = p(1 - p)^x \quad x \in \{0; 1; 2; \dots\}, p \in (0; 1)$$



- Distribuční funkce: $F(x) = 1 - (1 - p)^{k+1}$
- Střední hodnota: $E[X] = \frac{1-p}{p}$
- Rozptyl: $D[X] = \frac{1-p}{p^2}$

Binomické rozdělení = B(n,p)

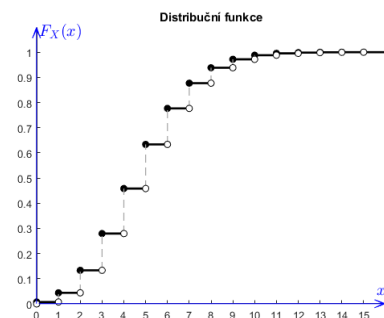
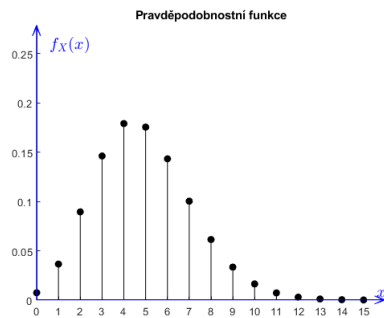


- Binomické rozdělení popisuje pravděpodobnost, že nastane úspěch v případě n nezávislých pokusů, kdy každý pokus může mít dva různé výsledky: $\{0; 1\}$.
- Pravděpodobnostní funkce:

$$f(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \text{ kde } x = \{0; 1; 2; \dots; n\}$$

- Distribuční funkce: $F(x) = \sum_{i=0}^x \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$
- Střední hodnota: $E[X] = np$
- Rozptyl: $D[X] = np(1-p)$

Poissonovo rozdělení = $\text{Pois}(\lambda)$

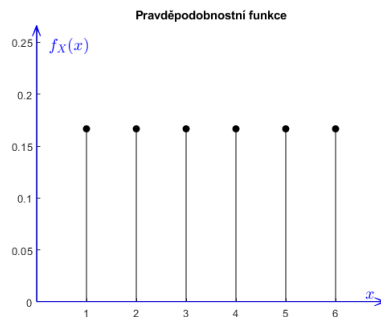
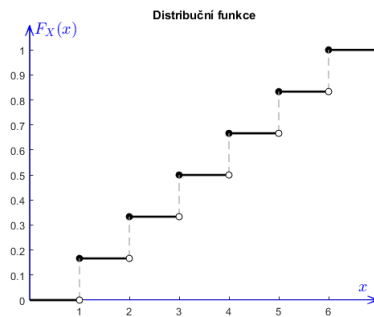


- Poissonovo rozdělení je limitním případem binomického, a to v případě, že máme velký počet pokusů ($n \rightarrow \infty$) a naopak malou pravděpodobnost výskytu ($p \rightarrow 0$). Toto nelze „upočítat“.
- Intenzita Poissonova rozdělení $\lambda = n \cdot p$.
- Pravděpodobnostní funkce:

$$f(x) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} \text{ kde } x = \{0; 1; 2; \dots\}$$

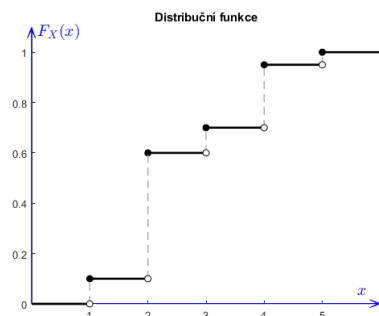
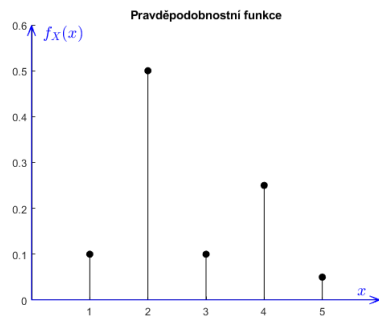
- Distribuční funkce: $F(x) = e^{-\lambda} \sum_{i=0}^x \frac{\lambda^i}{i!}$
- Střední hodnota: $E[X] = \lambda$
- Rozptyl: $D[X] = \lambda$

Rovnoměrné rozdělení = $U\{a,b\}$



- Rovnoměrné rozdělení pro diskrétní náhodnou veličinu je rozdělení, které nabývá několika možných výsledků po jednom náhodném pokusu.
Pravděpodobnost výskytu každého výsledku je stejná a to rovna $\frac{1}{n}$, kdy $n = b - a + 1$.
- Pravděpodobnostní funkce: $f(x) = \frac{1}{n}$
- Distribuční funkce: $F(x) = \frac{k-a+1}{n}$ kde k je výsledek
- Střední hodnota: $E[X] = \frac{a+b}{2}$
- Rozptyl: $D[X] = \frac{n^2-1}{12}$

Kategorické rozdělení



- Rovnoměrné rozdělení pro diskrétní náhodnou veličinu je rozdělení, které nabývá několika možných výsledků po jednom náhodném pokusu. Pravděpodobnost výskytu každého výsledku je různá.
- Pravděpodobnostní funkce: **dána tabulkou**
- Distribuční funkce: dána tabulkou
- Střední hodnota: $E[X] = \frac{1}{n} x_i$
- Rozptyl: $D[X] = \frac{1}{n} (x_i - E[X])^2$

Příklad: Projíždíme 3 světelné křižovatky, na kterých zůstaneme stát (S) nebo jedeme (J). Pravděpodobnost, že projedeme je 0,4.

- a) Najděte vhodné rozdělení
- b) Spočtěte pravděpodobnost, že projedeme pokaždé (3xJ)
- c) Spočtěte pravděpodobnost, že projedeme pouze 1x (1xJ, 2xS)
- d) Spočtěte střední hodnotu
- e) Spočtěte rozptyl
- f) Nakreslete distribuční a pravděpodobnostní funkci