1 Příklad a_018

Zadání

Jsou dány lineárně nezávislé vektory a, b, c. Zjistěte, zda vektory m, n a p jsou lineárně závislé či nezávislé.

$$\begin{aligned} m &= a+b+c\ , \\ n &= a+b-c\ , \\ p &= a-b+c. \end{aligned}$$

Řešení

Lineární závislost/nezávislost vektorů m, n a p poznáme podle definice tak, že zjistíme, jestli rovnice

$$\alpha \cdot m + \beta \cdot n + \gamma \cdot p = o \tag{1}$$

pro $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}$ má nebo nemá *netriviální* řešení.
Dosadíme za m, n, p a upravíme:

$$\begin{aligned} \alpha \cdot m + \beta \cdot n + \gamma \cdot p &= \alpha \cdot (a+b+c) + \beta \cdot (a+b-c) + \gamma \cdot (a-b+c) = \\ &= (\alpha+\beta+\gamma)a + (\alpha+\beta-\gamma)b + (\alpha-\beta+\gamma)c = o. \end{aligned} \tag{2}$$

Protože a, b, c jsou lineárně nezávislé vektory, má rovnice (2) pouze triviální řešení

$$\begin{aligned} \alpha+\beta+\gamma &= 0 \\ \alpha+\beta-\gamma &= 0 \\ \alpha-\beta+\gamma &= 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Matice soustavy lineárních rovnic (3) je regulární (její determinant je -4) a proto má soustava (3) pouze triviální řešení $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Tudíž i rovnice (1) má pouze triviální řešení a proto jsou vektory a, b a c lineárně nezávislé.

2 Příklad a_019

Zadání

Zjistěte, zda jsou vektory a, b a c lineárně závislé či nezávislé (i, j jsou lineárně nezávislé vektory).

$$\begin{aligned} a &= 2i + 3j\ , \\ b &= 3i - 2j\ , \\ c &= 4j\ . \end{aligned}$$

Řešení

Lineární závislost/nezávislost vektorů a, b a c poznáme podle definice tak, že zjistíme, jestli rovnice

$$\alpha \cdot a + \beta \cdot b + \gamma \cdot c = o \tag{4}$$

pro $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}$ má nebo nemá *netriviální* řešení.
Dosadíme za a, b, c a upravíme:

$$\alpha \cdot a + \beta \cdot b + \gamma \cdot c = \alpha \cdot (2i + 3j) + \beta \cdot (3i - 2j) + \gamma \cdot 4j = (2\alpha + 3\beta)i + (3\alpha - 2\beta + 4\gamma)j = o. \tag{5}$$

Protože i, j jsou lineárně nezávislé vektory, má rovnice (5) pouze triviální řešení

$$\begin{aligned} 2\alpha + 3\beta &= 0 \\ 3\alpha - 2\beta + 4\gamma &= 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Soustava lineárních rovnic (6) má nekonečně mnoho řešení, tj. existuje i její netriviální řešení (například $\alpha = 12$, $\beta = -8$, $\gamma = -13$, ale najít ho nepotřebujeme). Tudíž i rovnice (4) má netriviální řešení a proto jsou vektory a, b a c lineárně závislé.