Příklad c_012

Vypočtěte následující matici

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{129}.$$

Řešení

0.1 První způsob

Univerzální, pracnější, nevyžaduje nápad.

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,
- $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,
- $A^4 = A^2 \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,
- $A^{16} = A^4 \cdot A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 16 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,
- $A^{32} = A^{16} \cdot A^{16} = \begin{pmatrix} 1 & 32 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,
- $A^{64} = A^{32} \cdot A^{32} = \begin{pmatrix} 1 & 64 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,
- $A^{128} = A^{64} \cdot A^{64} = \begin{pmatrix} 1 & 128 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,
- $A^{129} = A \cdot A^{128} = \begin{pmatrix} 1 & 129 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

0.2 Druhý způsob

Elegantnější, rychlejší, intelektuálně náročnější, funguje jen na tuto konkrétní matici.

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,
- $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,
- $A^3 = A \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,
- $A^4 = A^2 \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \dots$

Pracovní hypotéza: $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Důkaz: pro $n = 1$ platí, předpokládejme, že platí pro $n-1$, tj. že $A^{n-1} = \begin{pmatrix} 1 & n-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Spočítáme A^n:

$$A^n = A \cdot A^{n-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & n-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vzorec $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ jsme tedy dokázali, a proto $A^{129} = \begin{pmatrix} 1 & 129 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.