Soustavy lineárních rovnic s parametrem

Lineární algebra – prémiové cvičení

Lucie Kárná

karna@fd.cvut.cz

January 5, 2021

Řešení SLR pomocí determinantů

- mějme soustavu lineárních rovnic $\mathbf{A} \cdot \vec{x} = \vec{b}$ se čtvercovou maticí $\mathbf{A}$
- označme $\mathbf{B}_j$ matici, kterou získáme z matice $\mathbf{A}$ nahrazením jejího j-tého sloupce sloupcem pravých stran $\vec{b}$

- pokud je matice $\mathbf{A}$ regulární (tj. $\det(\mathbf{A}) \neq 0$), má soustava právě jedno řešení $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, pro které platí Cramerovo pravidlo:

$$x_j = \frac{\det(\mathbf{B}_j)}{\det(\mathbf{A})} \qquad \forall j = 1, \ldots, n.$$

Příklad 1

Řešte soustavu lineárních rovnic

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
2x & - & y & + & 2z & = & -4 \\
4x & + & y & + & 4z & = & -2 \\
x & + & y & + & 2z & = & -1
\end{array}
$$

Příklad 1

Řešte soustavu lineárních rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & y & + & 2z & = & -4 \\ 4x & + & y & + & 4z & = & -2 \\ x & + & y & + & 2z & = & -1 \end{array}$$

Řešení:

- $\det(\mathbf{A}) = 6$
- $\mathcal{S} = \{(1, 2, -2)\}$

Příklad 2

Řešte soustavu lineárních rovnic s parametrem $a \in \mathbf{R}$

$$\begin{array}{rcrcr} ax & + & y & = & a^2 \\ x & + & ay & = & 1 \end{array}$$

Příklad 2

Řešte soustavu lineárních rovnic s parametrem $a \in \mathbf{R}$

$$\begin{array}{rcrcr} ax & + & y & = & a^2 \\ x & + & ay & = & 1 \end{array}$$

Řešení:

- $\det(\mathbf{A}) = (a+1)(a-1)$
- $$\begin{aligned} a = 1 &: \ \mathcal{S} = \{(1,0) + t \cdot (-1,1), t \in \mathbf{R}\} \\ a = -1 &: \ \mathcal{S} = \emptyset \\ a \in \mathbf{R} \setminus \{-1,1\} &: \ \mathcal{S} = \left\{ \left(\frac{a^2+a+1}{a+1}, \frac{-a}{a+1} \right) \right\} \end{aligned}$$

Příklad 3a

Řešte soustavu lineárních rovnic s parametrem $a \in \mathbb{R}$

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & ay & + & 2z & = & 0 \\ ax & + & y & + & 2z & = & 0 \\ 2x & + & y & + & z & = & 3 \end{array}$$

Příklad 3a

Řešte soustavu lineárních rovnic s parametrem $a \in \mathbf{R}$

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & ay & + & 2z & = & 0 \\ ax & + & y & + & 2z & = & 0 \\ 2x & + & y & + & z & = & 3 \end{array}$$

Řešení:

- $\det(\mathbf{A}) = (a-5)(1-a)$
- $$\begin{aligned} a=1:&\quad \mathcal{S} = \{(-3,-3,0) + s\cdot(1,-3,1), s \in \mathbf{R}\} \\ a=5:&\quad \mathcal{S} = \emptyset \\ a \in \mathbf{R}\setminus\{1,5\}:&\quad \mathcal{S} = \left\{\left(\frac{6}{5-a}, \frac{6}{5-a}, 3\,\frac{a+1}{a-5}\right)\right\} \end{aligned}$$

Příklad 3b

Řešte soustavu lineárních rovnic s parametrem $p \in \mathbf{R}$

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & y & - & pz & = & 1 \\ x & - & 2y & + & 3z & = & 2 \\ x & + & py & - & z & = & 1 \end{array}$$

Příklad 3b

Řešte soustavu lineárních rovnic s parametrem $p \in \mathbf{R}$

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & y & - & pz & = & 1 \\ x & - & 2y & + & 3z & = & 2 \\ x & + & py & - & z & = & 1 \end{array}$$

Řešení:

- $\det(\mathbf{A}) = (p+6)(1-p)$
- $p = 1$: $\mathcal{S} = \{(1,1,1) + t \cdot (-1,4,3), t \in \mathbf{R}\}$
  $p = -6$: $\mathcal{S} = \emptyset$
  $p \in \mathbf{R} \setminus \{1,-6\}$: $\mathcal{S} = \left\{ \left(\frac{2p+7}{p+6}, \frac{-1}{p+6}, \frac{1}{p+6} \right) \right\}$

Příklad 4

Řešte soustavu lineárních rovnic s parametrem $p \in \mathbf{R}$

$$\begin{array}{rcrcrcl} px & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & py & + & z & = & 1 \\ x & + & y & + & pz & = & 1 \end{array}$$

Příklad 4

Řešte soustavu lineárních rovnic s parametrem $p \in \mathbf{R}$

$$\begin{array}{rcrcrcl} px & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & py & + & z & = & 1 \\ x & + & y & + & pz & = & 1 \end{array}$$

Řešení:

$p = 1$: $\mathcal{S} = \{(1,0,0) + s \cdot (-1,1,0) + t \cdot (-1,0,1); t, s \in \mathbf{R}\}$

$p = -2$: $\mathcal{S} = \emptyset$

$p \in \mathbf{R} \setminus \{1,-2\}$: $\mathcal{S} = \left\{\left(\frac{1}{p+2}, \frac{1}{p+2}, \frac{1}{p+2}\right)\right\}$

Příklad 5

Řešte soustavu lineárních rovnic s parametrem $a \in \mathbb{R}$

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & az & = & 1 \\ ax & - & y & + & 2z & = & 0 \\ ax & + & 2y & - & 4z & = & 0 \end{array}$$

Příklad 5

Řešte soustavu lineárních rovnic s parametrem $a \in \mathbf{R}$

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & az & = & 1 \\ ax & - & y & + & 2z & = & 0 \\ ax & + & 2y & - & 4z & = & 0 \end{array}$$

Řešení:

$$a = 0\text{:}\ \ \mathcal{S} = \{(1,0,0) + t \cdot (-2,2,1), t \in \mathbf{R}\}$$

$$a = -2\text{:}\ \ \mathcal{S} = \emptyset$$

$$a \in \mathbf{R} \setminus \{0,-2\}\text{:}\ \ \mathcal{S} = \left\{\left(0, \frac{2}{a+2}, \frac{1}{a+2}\right)\right\}$$