Matice I

Lineární algebra – přednáška 3

Lucie Kárná

karna@fd.cvut.cz

October 13, 2021

1. Matice
   - Definice
   - Prvky matice
   - Trojúhelníková, diagonální matice

2. Maticové operace
   - Rovnost, transpozice
   - Sčítání matic
   - Násobení skalárem
   - Hodnost matice

Matice

Matice (reálných čísel) typu $m \times n$ (též (m, n)) je schéma

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

kde $a_{ij} \in \mathbf{R}$ nazýváme prvky matice $\mathbf{A}$.

Zkrácený zápis:

$$\mathbf{A} = (a_{ij}) = (a_{ij})_{(m,n)} = (a_{ij})_{j=1,\dots,n}^{i=1,\dots,m}$$

$m = n \Rightarrow$ čtvercová matice

Matice

SLOUPEC

ŘÁDEK

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

SLOUPCOVÝ INDEX

$$a_{ij}$$

ŘÁDKOVÝ INDEX

Prvky matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

diagonála: vektor $(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{kk})$, kde $k = \min(m, n)$

prvky

- diagonální
- naddiagonální
- poddiagonální

Prvky matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

diagonála: vektor $(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{kk})$, kde $k = \min(m, n)$

prvky

- diagonální
- naddiagonální
- poddiagonální

Trojúhelníková matice

horní trojúhelníková matice

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

diagonální matice

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

dolní trojúhelníková matice

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

nulová matice

$$\mathbf{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Rovnost matic. Transponovaná matice.

Dvě matice $\mathbf{A} = (a_{ij})_{j=1,\dots,n}^{i=1,\dots,m}$ a $\mathbf{B} = (b_{kl})_{k=1,\dots,p}^{l=1,\dots,q}$ se rovnají, když

- $n = p$ a $m = q$, a
- $a_{ij} = b_{ij}$ pro všechna $i = 1, \dots, m$ a $j = 1, \dots, n$.

Je-li $\mathbf{A} = (a_{ij})$ matice typu $m \times n$, pak
transponovaná matice je matice $\mathbf{A}^{\mathbf{T}} = (\bar{a}_{ij})$ typu $n \times m$,
kde $\bar{a}_{ij} = a_{ji}$ pro všechna $i = 1, \dots, n$ a $j = 1, \dots, m$.

Sčítání matic

- matice $\mathbf{A} = (a_{ij})$ a $\mathbf{B} = (b_{ij})$, **stejného** typu $m \times n$
- součet matic $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ je matice $\mathbf{C} = (c_{ij})$ téhož typu,
  kde $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ pro všechna $i = 1, \dots, m$ a $j = 1, \dots, n$
- značení: $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$

Vlastnosti: pro všechny matice $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ stejného typu platí:

- $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$
- $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})$
- $\mathbf{A} + \mathbf{O} = \mathbf{A}$

Násobení skalárem

- matice $\mathbf{A} = (a_{ij})$ typu $m \times n$,
- číslo $\lambda \in \mathbf{R}$
- λ-násobek matice $\mathbf{A}$ je matice $\mathbf{C} = (c_{ij})$ téhož typu, kde $c_{ij} = \lambda a_{ij}$ pro všechna $i = 1, \ldots, m$ a $j = 1, \ldots, n$
- značení: $\mathbf{C} = \lambda \cdot \mathbf{A}$, případně $\mathbf{C} = \lambda \mathbf{A}$

Vlastnosti: pro všechny matice $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ stejného typu a každé $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ platí:

- $0 \cdot \mathbf{A} = \mathbf{O}$
- $\lambda(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \lambda\mathbf{A} + \lambda\mathbf{B}$
- $(\lambda + \mu)\mathbf{A} = \lambda\mathbf{A} + \mu\mathbf{A}$
- $(\lambda(\mu\mathbf{A}) = (\lambda\mu)\mathbf{A}$
- $1 \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}$

Hodnost matice

- Hodnost matice $\mathrm{hod}(\mathbf{A})$ je dimenze prostoru generovaného řádkovými vektory matice $\mathbf{A}$
    - alternativní značení: $\mathrm{h}(\mathbf{A})$, $\mathrm{r}(\mathbf{A})$ (*rank*)
- Elementární transformační úpravy nemění hodnost matice:
    - změna pořadí řádků
    - vynásobení řádku nenulovým skalárem
    - přičtení libovolného násobku jednoho řádku k jinému
- hodnost matice dále nemění
    - vynechání nulového řádku
    - transponování matice
    - analogické sloupcové úpravy
- hodnost *odstupňované* matice je rovna počtu jejích nenulových řádků
- Defekt matice $\mathrm{d}(\mathbf{A}) = \mathrm{def}(\mathbf{A}) = m - \mathrm{hod}(\mathbf{A})$